GEOMETRIE

diplomová práce

ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ POJMY

- bod, přímka, rovina
- vzájemné vztahy bodů, přímek a rovin vyjadřují axiomy incidence, uspořádání, rovnoběžnosti

- značení, vztahy

Axiomy incidence

- I_1 Dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.
- I_2 Na každé přímce leží alespoň dva různé body.
- I_3 Existuje aspoň jedna trojice bodů, které neleží na téže přímce.

  .

  .
- I_8 Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, které neleží v žádné rovině.

Axiomy uspořádání

- U_1 Leží-li bod B mezi body A, C, jsou A, B, C tři různé body přímky a platí též, že bod B leží mezi body C, A.
- U_2 Jsou-li A, B dva různé body, pak na přímce procházející body A, B existuje aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C.

.

.

Axiom rovnoběžnosti

- Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou p a bodem A leží nejvýše jedna přímka procházející bodem A, která nemá s přímkou p žádný společný bod.

- eukleidovská geomerie

- úsečka $AB = \{X \in Z; X = A \vee X = B \vee X \mu AB\}$
- polopřímka $\mapsto AB = \{X \in Z; X \in AB \vee B \mu AX\}$
- polorovina

$$\mapsto pA = \{X \in \leftrightarrow pA; AX \cap p = \emptyset \vee AX \cap p = \{X\}\}$$

- poloprostor

$$\mapsto \alpha A = \{X \in Z; AX \cap \alpha = \emptyset \vee AX \cap \alpha = \{X\}\}$$

KONVEXNÍ, NEKONVEXNÍ ÚTVARY

M je konvexní množina $\Leftrightarrow (\forall X, Y \in M)[XY \subset M \vee M = \emptyset \vee M = \{X\}]$.

U je nekonvexní množina bodů $\Leftrightarrow (\exists\, X, Y \in U)[XY \not\subseteq U]$

Načrtněte dva konvexní rovinné útvary, a to takové, že jejich sjednocení (průnik), je rovinný útvar
a) konvexní, b) nekonvexní.

Neleží-li body A, V, B v přímce, nazýváme konvexním úhlem AVB množinu všech bodů X roviny AVB, k nimž existuje bod Y úsečky AB takový, že X patří polopřímce VY.

Nechť A, V, B jsou tři libovolné navzájem různé body. Konvexním úhlem AVB pak nazýváme:
1. Průnik polorovin AVB a BVA v případě, že body A, V, B neleží v přímce.
2. Každou polorovinu s hraniční přímkou AB, leží-li body A, V, B v přímce a bod V leží mezi body A, B.
3. Leží-li body A, V, B v přímce a bod V neleží mezi body A, B, nazýváme konvexním úhlem AVB

a) každou rovinu obsahující přímku AB,
b) polopřímku VA.

Nechť A, V, B jsou tři body, které neleží v přímce. Potom sjednocení doplňku konvexního úhlu AVB v rovině AVB a polopřímek VA a VB nazýváme ……..

Vlastnosti bodů, přímek a rovin, které jsou založeny na vztazích incidence, uspořádání a rovnoběžnosti nazýváme **polohové**.

Z axiomů „I,U,R“ se odvozují další vlastnosti a vztahy geometrických útvarů.

Jakou vzájemnou polohu mají dvě přímky v prostoru?

a) přímky splývají
b) přímky mají jediný společný bod
c) přímky nemají společný bod a leží v téže rovině
d) přímky nemají společný bod a neexistuje rovina, jíž by obě náležely

pojmenování: rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A ROVINY

- přímka leží v rovině
- přímka má s rovinou jediný společný bod
- přímka nemá s rovinou žádný společný bod

- přímka a rovina jsou rovnoběžné, různoběžné

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU ROVIN

- obě roviny splývají
- mají společnou právě jednu přímku
- nemají žádný společný bod

- rovnoběžné,různoběžné
- **průsečnice**-společná přímka dvou různoběžných rovin

VZÁJEMNÁ POLOHA TŘÍ RŮZNÝCH ROVIN

a) každé dvě z daných rovin jsou rovnoběžné
b) dvě z daných rovin jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
c) všechny tři roviny procházejí jednou přímkou
d) každé dvě roviny se protínají, každé dvě průsečnice jsou různé rovnoběžky
e) všechny tři roviny mají jediný společný bod

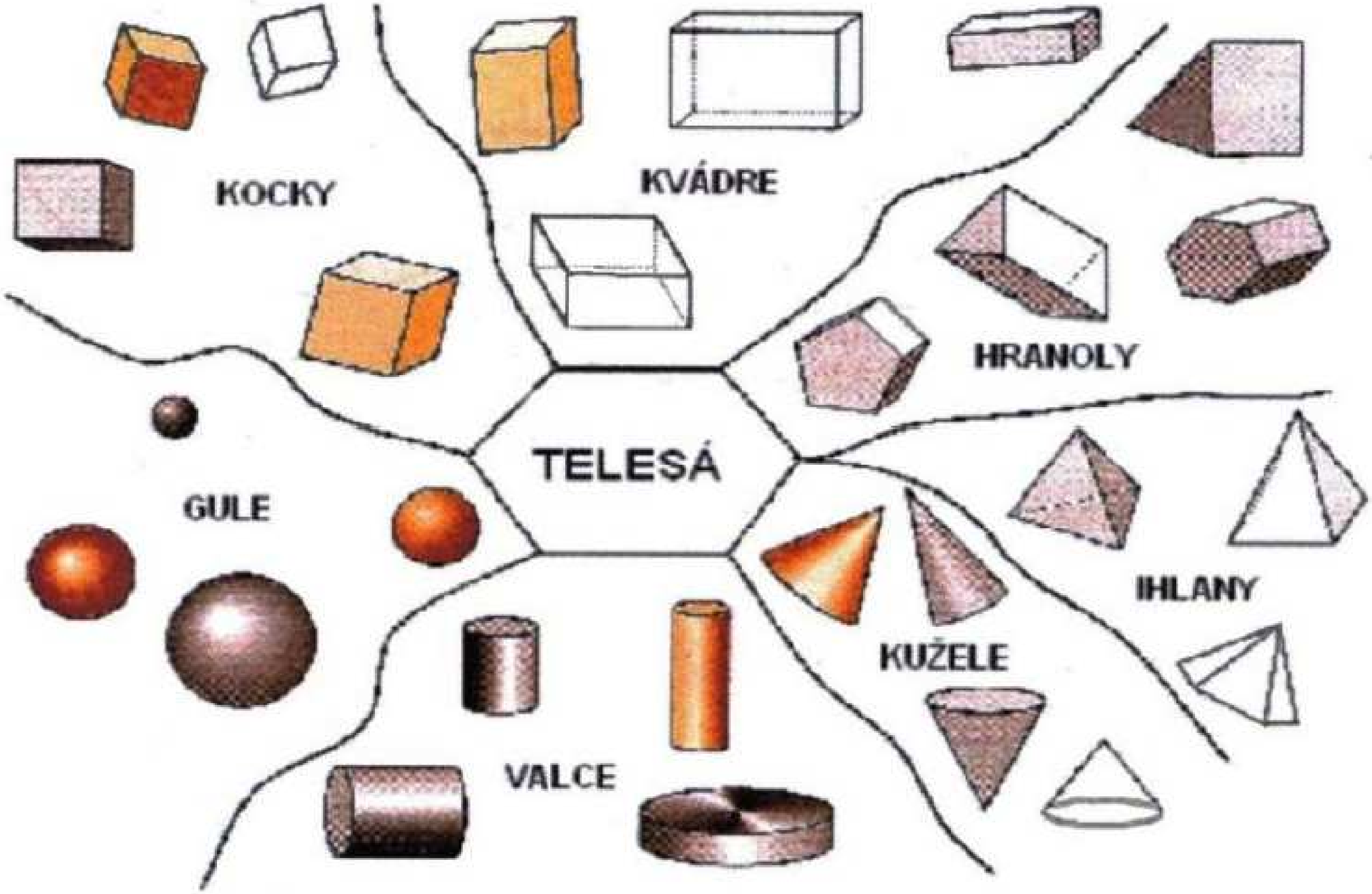
Lomená čára

- Lomenou čárou A_0 A_1 A_2 … A_n , ($n > 1$), rozumíme sjednocení všech úseček A_0 A_1, A_1 A_2, … A_{n-1} – A_n konečné posloupnosti úseček, z nichž žádná neleží v přímce, která obsahuje předcházející (následující) úsečku této posloupnosti.
- dvě sousední úsečky mají společný pouze jeden (krajní) bod
- jednoduchá lomená čára- každé dvě nesousední strany nemají společný bod

Mnohoúhelník A_1 A_2 … A_n nazýváme sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry A_0 A_1 A_2 … A_n , $A_0 = A_n$, a její vnitřní oblastí.

konvexní mnohoúhelník, konvexní mnohostěn

TĚLESA



- Hrana je v geometrii úsečka, tvořená průnikem dvou sousedních stěn mnohostěnu.
- Stěna je mnohoúhelník, jehož strany jsou sousedními hranami tělesa.
- Vrchol je průsečík tří nebo více hran sousedních stěn (v mnohostěnu).
- Strana je v geometrii úsečka, spojující dva sousední vrcholy mnohoúhelníku.

- Krychle – všechny stěny jsou shodné čtverce
- Kvádr – protější stěny jsou shodné obdélníky (čtverce)
- Hranol – podstavy-shodné mnohoúhelníky,

  boční stěny- rovnoběžníky,

  pravidelný n-boký hranol-podstavy-pravidelné n-úhleníky,

  boční stěny-shodné obdélníky (čtverce)
- Rotační válec – vznikne rotací obdélníku (čtverce) kolem přímky, která obsahuje jednu jeho stranu

- Čtyřstěn – všechny stěny jsou trojúhelníky, pravidelný čtyřstěn- stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky
- Jehlan- podstavou je mnohoúhelník, boční stěny jsou trojúhelníky,

  pravidelný n-boký jehlan-podstavou je pravidelný n-úhelník, boční stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky
- Rotační kužel – vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jeho jednu odvěsnu

AXIOMY SHODNOSTI

S_1 Je-li $AB \cong CD$, je $A \neq B$ a $C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB \cong CD$.

S_2 Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Pak existuje jediný bod E polopřímky CD, pro který platí $AB \cong CE$.

S_3 Je-li $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak je $AB \cong EF$.

S_4 Leží-li bod C mezi body A, B, bod C´mezi body A´, B´a platí-li $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, pak platí $AB \cong A'B'$.

S_5 Nechť A, B, C a A´, B´, K jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nech´t $AB \cong A'B'$. Pak existuje jediný bod C´poloroviny A´B´K, pro který platí $AC \cong A'C'$ a $BC \cong B'C'$.

- S_6 Nechť A, B, C a A´, B´, C´ jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $CA \cong$ ´a´. Leží-li bod P mezi body A, B, bod P´mezi body A´, B´a platí-li, že $AP \cong A'P'$, je $CP \cong C'P'$.

- porovnávání úseček
- grafický součet úseček
- grafický rozdíl úseček
- násobek úsečky

Konvexní úhel AVB je shodný s konvexním úhlem CUD právě tehdy, když na polopřímkách UC, UD existují takové body A´, B´, že platí UA´≅VA, UB´≅VB a A´B´≅AB.

Trojúhelník ABC, A´B´C´se nazývají shodné (v tomto pořadí vrcholů), jestliže platí AB ≅A´B´, BC ≅B´C´ a CA ≅C´A´.

věty: sss, sus, usu, Ssu

Nechť AVB je úhel, který není plný ani nulový. Pak osou úhlu AVB nazýváme přímku VX právě tehdy, když bod S leží v téže rovině jako úhel AVB a platí, že konvexní úhle AVX je shodný s konvexním úhlem BVX. Osou plného nebo nulového úhlu AVB rozumíme přímku VA.

Úhel, který je shodný s úhlem k němu vedlejším nazýváme pravý úhel.

Dvě různoběžné přímky AP a BP nazýváme kolmé právě tehdy, když úhle APB je pravý.

Přímku o nazýváme osa úsečky AB (A ≠B) právě tehdy, když jsou přímky AB a o navzájem kolmé a přímka o prochází středem úsečky AB.

TROJÚHELNÍK

- Nechť A, B, C jsou tři body neležící v přímce. **Trojúhelníkem ABC** nazveme průnik polorovin ABC, ACB, BCA.
- Nechť A, B, C jsou tři body neležící v přímce. **Trojúhelníkem ABC** nazýváme množinu všech bodů X prostoru, které patří úsečce AY a Y patří úsečce BC.
- pojmy: vrcholy, strany trojúhelníku, obvod, vnitřní a vnější úhly

Trojúhelník

- Trojúhelníková nerovnost
- Součet velikostí kterýchkoliv dvou stran trojúhelníka je větší než velikost strany třetí.

- Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka je 180°.

- Vnějším úhlem trojúhelníka nazýváme úhel, který je vedlejší k jeho vnitřnímu úhlu.

- Velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů, k nimž tento úhel není vedlejší.

- Vnější úhel trojúhelníka při daném vrcholu je větší než kterýkoliv jeho vnitřní úhel při zbývajícím vrcholu.

- Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Proti větší ze dvou stran leží větší vnitřní úhel.

- Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany, proti většímu ze dvou vnitřních úhlů leží větší strana.

- a) Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly.
- Nechť $AC \cong BC$. Dokažte, že platí $\alpha \cong \beta$. sus

- b) Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany.
- Nechť $\alpha \cong \beta$. Dokažte, že platí $BC \cong AC$. usu

- V trojúhelníku ABC označme po řadě A_1, B_1, C_1 středy stran a, b, c. Úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 se nazývají **střední příčky** trojúhelníka ABC příslušné po řadě ke stranám c, a, b.
- Úsečky AA_1, BB_1, CC_1 se nazývají **těžnice trojúhelníka** ABC.

- Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná se stranou tohoto trojúhelníka, jejíž střed neobsahuje, a její velikost se rovná polovině velikosti této strany.

- Těžnice trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem T, zvaným **těžiště trojúhelníka**. Těžiště T dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta část, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé části.
- V trojúhelníku ABC označíme po řadě v_a, v_b, v_c kolmice vedené vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC k přímkám BC, AC, AB. Přímky v_a, v_b, v_c se nazývají **výšky trojúhelníka** ABC.

- přímka, úsečka, velikost úsečky

- Výšky trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem V, zvaným průsečík výšek nebo též ortocentrum trojúhelníka ABC.

- Osami stran trojúhelníka ABC nazýváme osy úseček AB, BC a AC.
- Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané.

- Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané.

TŘÍDĚNÍ TROJÚHELNÍKŮ

- <u>- podle déle k stran</u>:

různostranné (žádné dvě strany nejsou shodné),
rovnoramenné (dvě strany jsou shodné) -ramena, základna,
rovnostranné (všechny strany shodné),

- - <u>podle velikosti vnitřních úhlů</u>:

ostroúhlé (všechny ostré úhly),
tupoúhlé (jeden tupý úhel),
pravoúhlé (jeden pravý úhel).

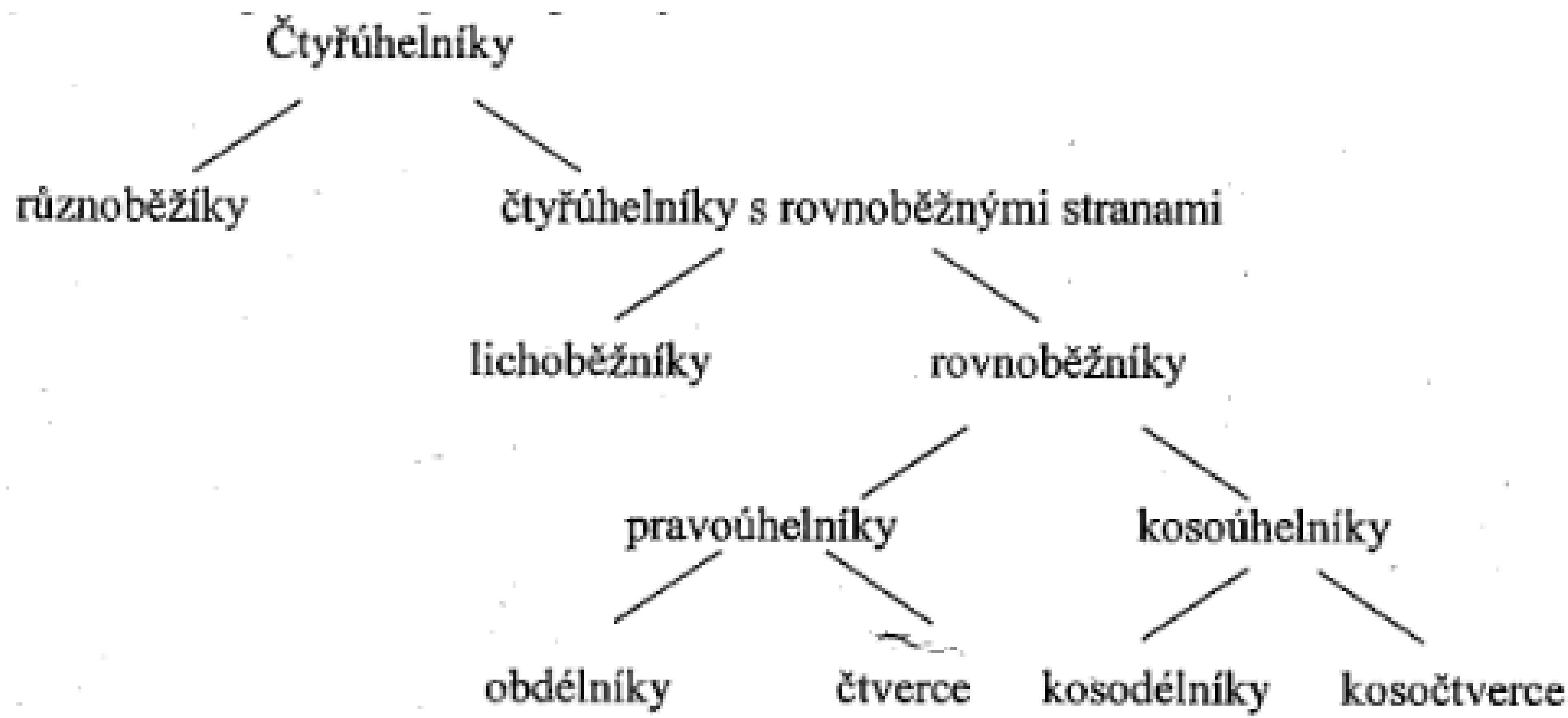
- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku, trojúhelníková nerovnost, střední příčka trojúhelníku, těžnice a výšky trojúhelníku.

ČTYŘÚHLENÍKY

- **Čtyřúhelník** je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy. (Mnohoúhelníkem rozumíme sjednocení uzavřené lomené čáry s její vnitřní oblastí.)

- Jsou-li A, B, C, D čtyři body téže roviny a z nich žádné tři neleží v jedné přímce, pak **čtyřúhelníkem ABCD** nazýváme sjednocení trojúhelníku ABC a ACD, právě když průnikem těchto trojúhelníků je úsečka AC.

TŘÍDĚNÍ ČTYŘÚHELNÍKŮ PODLE VZÁJEMNÉ POLOHY STRAN



DEFINICE A VLASTNOSTI ROVNOBĚŽNÍKŮ

- Rovnoběžník je čtyřúhelník, který má každé dvě protější strany rovnoběžné.
- Každý rovnoběžník má tyto vlastnosti:
- Každé dvě protější strany jsou shodné.
- Úhlopříčky se půlí (tj. mají společný bod, který je středem každé z nich).
- Protější vnitřní úhly jsou shodné.

KRUH, KRUŽNICE

- Množina všech bodů (roviny), které mají do bodu S vzdálenost menší nebo rovnu *r*, se nazývá **kruh** K (S;r). Bod S je střed kruhu, číslo r poloměr kruhu.

- Je dán bod S a kladné číslo *r*. **Kružnice** k (S;r) je množina všech bodů roviny, která mají od bodu S vzdálenost *r*.

- A, B jsou dva různé body kružnice, úsečku AB nazveme tětivou kružnice.
- Tětiva, která prochází středem, je průměr kružnice.
- Dvě části kružnice rozdělené body A, B nazveme oblouky kružnice. Je-li AB průměr, nazýváme oba oblouky půlkružnice
- U kruhu rozlišujeme kruhové výseče, kruhové úseče, půlkruh.

VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KRUŽNICE

- přímka a kružnice mají dva společné body (přímka je sečna kružnice)
- přímka a kružnice mají jeden společný bod (přímka je tečna kružnice)
- přímka a kružnice nemají žádný společný bod (přímka je vnější přímkou kružnice)

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU KRUŽNIC

- Kružnice, které mají společný střed nazýváme soustředné. Soustředné kružnice o stejném poloměru jsou totožné. Soustředné kružnice o různých poloměrech tvoří mezikruží.
- Kružnice, které nemají společný střed nazýváme nesoustředné.

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU KRUŽNIC

- jedna kružnice leží vně druhé
- kružnice se protínají ve dvou bodech
- kružnice leží uvnitř druhé
- kružnice mají vnější dotyk
- kružnice se dotýkají uvnitř

- # Vzdálenost bodů, přímek a rovin

- Vzdálenost dvou bodů X, Y nazýváme délku (velikost) úsečky XY.
- Nechť M je množina všech bodů, přímek a rovin. Vzdáleností geometrických útvarů U_1, U_2 náležících množině M rozumíme délku (vzdálenost) nejmenší úsečky XY, kde X náleží útvaru U_1 a Y náleží útvaru U_2.

  Značíme $|U_1U_2|$

VELIKOST GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

- Velikost geometrického útvaru určujeme tak, že danému útvaru přiřazujeme nezáporné reálné číslo podle určitých podmínek:

1. Existuje útvar, který má velikost 1 – jednotkový útvar.
2. Jsou-li dva útvary shodné, pak se jejich velikosti rovnají.
3. Součet velikostí dvou nepřekrývajících se útvarů je roven velikosti jejich sjednocení.

Délka úsečky (obsah rovinného obrazce, objem tělesa) je číslo, které udává, kolika jednotkovými útvary můžeme daný útvar pokrýt.

délka úsečky-celočíselný násobek jednotkové sečky