MODUL 2. MECHANIKA TEKUTIN A TERMODYNAMIKA

2.1. HYDROSTATIKA A AEROSTATIKA

SHRNUTÍ

Studuje podmínky rovnováhy a zákonitosti pohybu nejen tekutin, ale i pevných těles ponořených do tekutiny

Tekutiny:

kapaliny a plyny

- jsou pružné
- nemají stálý tvar, zaujímají tvar nádoby

Plyn: nemá stálý objem ani tvar, vyplní vždy celý objem nádoby , rozpíná se

Kapalina: je objemově stálá, v tíhovém poli Země udržuje vodorovný volný povrch v klidu

Ideální tekutina:

- bez viskozity
- nepotřebuje ke změně tvaru energii

Ideální plyn: je dokonale stlačitelný, molekuly na sebe působí pouze odpudivými silami, molekuly plynu mají zanedbatelný objem

Ideální kapalina: je dokonale nestlačitelná, dokonale tekutá

Tlak v tekutině:

- šíří se **všemi směry**
- síla je vždy kolmá k plošce na povrchu či uvnitř tekutiny
- $p = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$, kde $\mathrm{d}\vec{F} \perp \mathrm{d}S$
- **jednotka**:
  Pa = pascal, Pa = $\mathrm{N.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}}$
  bar = 10^5 Pa (1 mbar = 1 hPa)
  torr = (1 mm Hg) = 133,322 Pa

Tlaková síla: $\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}\vec{F} = p\,\mathrm{d}S\,\vec{n}_0 = p\mathrm{d}\vec{S}$

- je-li působící tlak všude stejný: $F = pS$
- **je-li tlak proměnný:** $\vec{F} = \int\limits_{(S)} p\mathrm{d}\vec{S}$

Pascalův zákon: Tlak v tekutině způsobený vnější silou je ve všech místech stejný $p = \dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2} = konst.$

Pro **hydraulický lis** platí: $\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}A_2 \;\Rightarrow\; F_1\mathrm{d}s_1 = F_2\mathrm{d}s_2$

Tlak vyvolaný vlastní tíhou tekutiny

I. KAPALINY

Hydrostatický tlak (kapalina v klidu, v tíhovém poli Země):

$$F_G = mg = V\rho g = \rho Shg$$
$$p = \frac{F}{S} = \frac{F_G}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = h\rho g$$

Uvnitř kapaliny v nádobě jsou rovnoběžné **hladiny o stejném tlaku** $p = p_0 + h\rho g$, kde p_0 je vnější tlak působící na kapalinu, h je hloubka pod volnou hladinou.
Hydrostatická tlaková síla působící na stěny nádoby i na stěny ponořených těles $F = h\rho gS$, hydrostatická tlaková síla je vždy **kolmá na stěnu nádoby**

Celková tlaková síla působící na svislou nebo šikmou stěnu je stejně velká jako síla působící na vodorovnou plochu, která leží v takové hloubce pod hladinou, v jaké je těžiště té části stěny, která je pokryta kapalinou.

Spojené nádoby:

- kapalina může přetékat z jedné nádoby do druhé
- kapalina se ustálí tak, že volné hladiny leží ve všech ramenech v téže vodorovné rovině

Nádoba obsahující **dvě nemísící se kapaliny**:

$$h_1\rho_1 Sg = h_2\rho_2 Sg$$
$$h_1\rho_1 = h_2\rho_2$$

Působí-li na volné hladiny v obou ramenech **různé vnější tlaky**:

$$p_1 + h_1\rho g = p_2 + h_2\rho g$$
$$p_1 - p_2 = (h_2 - h_1)\rho g$$

II. PLYNY

Aerostatická tlaková síla a **aerostatický tlak** se vzhledem k nízké hustotě plynů neprojevují (při studiu plynných těles běžných rozměrů na Zemi)
Atmosférická tlaková síla a **atmosférický tlak**

- působí na všechna tělesa na povrchu Země
- mění se s nadmořskou výškou
- závisí na počasí a podnebí

Normální atmosférický tlak: $1{,}013.10^5$ Pa = 1013 hPa
Barometrická rovnice :závislost atmosférického tlaku na nadmořské výšce.

- s rostoucí nadmořskou výškou klesá tlak a zmenšuje se hustota vzduchu
- je-li $\boldsymbol{p_0}$ tlak a $\boldsymbol{\rho_0}$ je hustota vzduchu při hladině moře, pak platí : $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}h}$

ARCHIMÉDŮV ZÁKON:
Na těleso ponořené do kapaliny působí **hydrostatická vztlaková síla**, která má stejnou velikost jako tíhová síla kapaliny o stejném objemu jako má ponořená část tělesa. Hydrostatická vztlaková síla má vždy směr **svisle vzhůru**.

$$F_{vz} = (h_2 - h_1)\rho_k gS = h\rho_k gS = V\rho_k g = m_k g$$

Důsledky Archimédova zákona:

a) $\rho_k \prec \rho_t$ .....těleso klesá ke dnu

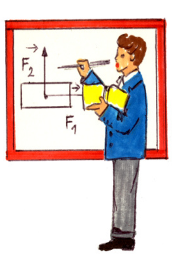
b) $\rho_k = \rho_t$ .....těleso se vznáší

c) $\rho_k \succ \rho_t$ .....těleso plove na hladině

Rovnováha:

$$F_G = F_{VZ}$$
$$\rho_t V = \rho_k V'$$

Kde je: F_G - tíha tělesa, F_{vz} - hydrostatická vztlaková síla, V- objem celého tělesa, V'-objem ponořené části tělesa, ρ_t - hustota tělesa, ρ_k - hustota kapaliny.



ZŘU 2.1.-1.

Jak velká je hustota 1 g.cm^{-3}, vyjádříme-li ji v jednotkách kg.m^{-3}?

Řešení:

$$\rho = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{\frac{1}{10^3}\ \text{kg}}{\frac{1}{10^6}\ \text{m}^3} = \frac{10^6}{10^3}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$$

ZLP 2.1.-2

Okno má rozměry 3,4 m x 2,1 m. Při závanu větru poklesl vnější tlak na 0,96 atm, zatímco tlak uvnitř místnosti zůstal na hodnotě 1 atm. Jaká byla síla, která způsobila, že okno se rozletělo směrem ven? (1 atm = 1,01325.10^5 Pa) Nejdříve vyjádřete tlak v Pascalech.

- Řešení:

$a = 3,4$ m, $b = 2,1$ m, $p_b = 0,96$ atm, $p_a = 1$ atm, $F = ?$

$p_a = 1$ atm $= 1,01325 \cdot 10^5$ Pa

$p_b = 0,96$ atm $= 97272$ Pa

Dále zapište vztah pro tlakovou sílu, která působí na plochu **S** jestliže znáte rozměry **a**, **b** okna a dosaďte rozdíl tlaků:

- $F = \Delta p S = (p_m - p_b)ab$

Dosaďte do tohoto vztahu číselně v základních jednotkách SI :

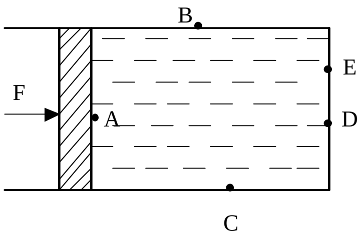
$F = 4053 \cdot 3,4 \cdot 2,1 = 2,9 \cdot 10^4$ N

ZU 2.1.-3 Vyjádřete jednotku tlaku Pascal v základních jednotkách soustavy SI. 1 Pa =

ZTO 2.1.-4

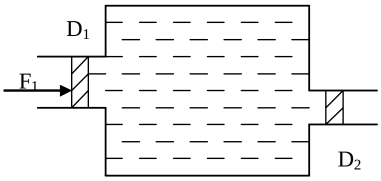
V uzavřené nádobě působí na píst síla F. Pro tlaky v bodech A,B,C,D,E (neuvažujeme-li hydrostatický tlak) bude platit:

a) tlaky ve všech bodech jsou stejné
b) tlaky v bodech A a D budou stejné, v ostatních bodech jsou jiné
c) tlaky v bodech A,C,D jsou stejné, v bodech B a E jsou jiné
d) tlak je v každém bodě jiný



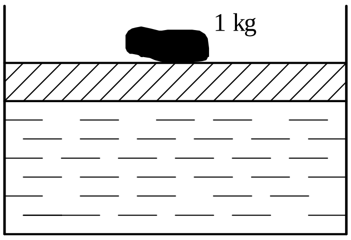
ZTO 2.1.-5

Působí-li na píst s průměrem D_1 = 0,2 m síla F_1, pak na píst průměru D_2 = 0,1 m působí síla F_2 =



ZU 2.1.-6

Na píst plochy 0,2 m^2 je položeno závaží hmotnosti 1 kg. Vypočítejte tlak, kterým působí kapalina na stěny nádoby. Hydrostatický tlak neuvažujte, g = 10 m/s^2. p =



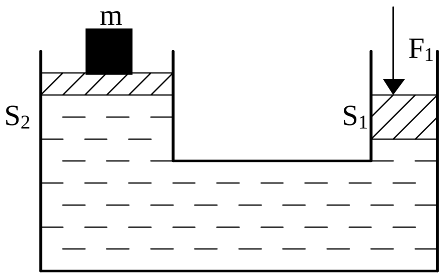
ZTO 2.1.-7

Na píst průřezu $S_1 = 10^{-3}$ m^2 působí síla F_1 = 100 N. Předmět hmotnosti m = 100 kg je položený na druhém pístu průřezu $S_2 = 10^{-2}$ m^2. Tíhu pístů neuvažujeme. Předmět

a) se bude pohybovat vzhůru

b) bude klesat

c) se nebude pohybovat



ZŘU 2.1.-8

Určete tlak v injekční stříkačce, když sestra zatlačí na kruhový píst o poloměru 1,1 cm silou 42 N.

Řešení:

$r = 1{,}1$ cm, $F = 42$ N, $p = ?$

$$p=\frac{F}{S}=\frac{F}{\pi r^2}=\frac{42}{\pi\cdot 0{,}011^2}=1{,}1\cdot 10^5\,\text{Pa}$$

ZU 2.1.-9

V hydraulickém lisu s kruhovým pístem o malé ploše s obsahem S_1 působícím na kapalinu silou F_1. Spojovací trubka vede kapalinu k pístu o podstatně větším obsahu S_2.
a) Jak velká síla F_2 působí na větší píst?
b) Jak velká síla F_1 působící na malý píst vyváží na velkém pístu tíhu předmětu o hmotnosti 2 tuny? Malý píst má průměr 4 cm a velký 56 cm.

BU 2.1.-10

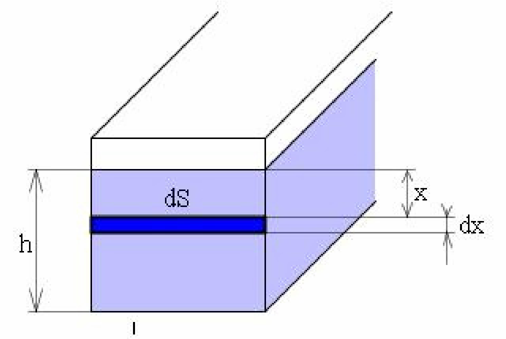
Vypočítejte hydrostatickou tlakovou sílu působící na svislou obdélníkovou stěnu nádoby, jestliže znáte výšku, plochu stěny a hustotu kapaliny.

ZU 2.1.-11

Jak vysoký sloupec vody způsobí hydrostatický tlak 1 Pa? Hustota vody je 10^3 kg.m^{-3}, g = 10 m.s^{-2}, k barometrickému tlaku nepřihlížejte. h =

BŘU 2.1.-12

Jak velká tlaková síla působí na svislou stěnu hráze, která má délku 10 m. Hloubka vody je 5 m, hustota vody je 10^3 kg.m^{-3}, g = 10 m.s^{-2}.
Řešení:
$l=10$ m, $h=5$ m, $\rho=10^3$ kg.m^{-3}, $g=10$ m.s^{-2}, $F_p=?$



Víme, že se hydrostatický tlak na stěnu nádoby bude spojitě měnit v závislosti na hloubce pod hladinou. Hydrostatický tlak kapaliny hustoty ρ v hloubce h pod hladinou bude $p=h\rho g$. Na element plochy stěny hráze dS působí v místě hydrostatického tlaku p síla $\mathrm{d}F=p\mathrm{d}S$. Nachází-li se plocha $\mathrm{d}S=l\mathrm{d}x$ ve vzdálenosti x od dna, pak síla působící na tento element dS je: $F=\rho gxl\mathrm{d}x$ Potom pro tlakovou sílu na celou stěnu pod hladinou bude platit:

$$F_p=\int_0^h lx\rho g\mathrm{d}x=l\rho g\int_0^h x\mathrm{d}x=l\rho g\frac{h^2}{2}=10\cdot\frac{5^2}{2}\cdot 10000=1{,}25\text{ MN}$$

ZLP 2.1.-13

Lidské plíce vyvinou přetlak nanejvýš dvacetinu atmosféry. Když potápěč užívá sací trubky, jak nejhlouběji pod hladinou může plavat?Nejdříve si napište zkrácené zadání:
Řešení:

- $\Delta p = \dfrac{1}{20}$ atm, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $g = 10$ m.s^{-2}, h=?

Dýchací svaly potápěče jsou schopny vyvinout přetlak dvacetinu atmosféry. To znamená, že potápěč může dýchat v takové hloubce v níž je hydrostatický tlak menší nežli v plicích potápěče.Napište vztah pro rovnováhu hydrostatického tlaku a přetlaku v plicích potápěče, vyjádřete si hloubku **h:**

- $\Delta p = h\rho g \Rightarrow h = \dfrac{\Delta p}{\rho g}$

Dosaďte číselně v základních jednotkách SI:

- $h = \dfrac{101325}{20} \cdot \dfrac{1}{1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}52$ m

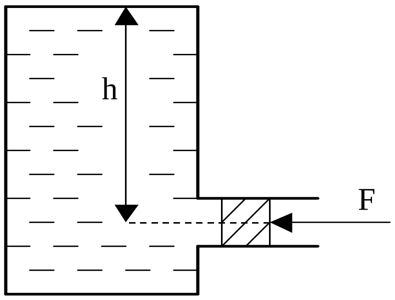
ZU 2.1.-14

Najděte celkovou sílu, kterou působí voda na vrchní část ponorky v hloubce 200 m, když předpokládáme, že celková plocha vrchní části trupu ponorky je 3000 m^2.
Jaký tlak vody by působil na potápěče v této hloubce? Mořská voda má ρ = 1,03 g.cm^{-3}.

ZTO 2.1.-15.

Do výtokového otvoru nádoby s vodou (hustoty 10^3 kg.m^{-3}) je v hloubce h = 0,5 m vložen píst průřezu 10^{-4} m^2. Na píst tlačí síla F = 10 N. Píst se

a) bude pohybovat do nádoby
b) bude pohybovat ven z nádoby
c) nebude pohybovat, bude v klidu



ZTO 2.1.-16

Hydrostatický tlak v hloubce h

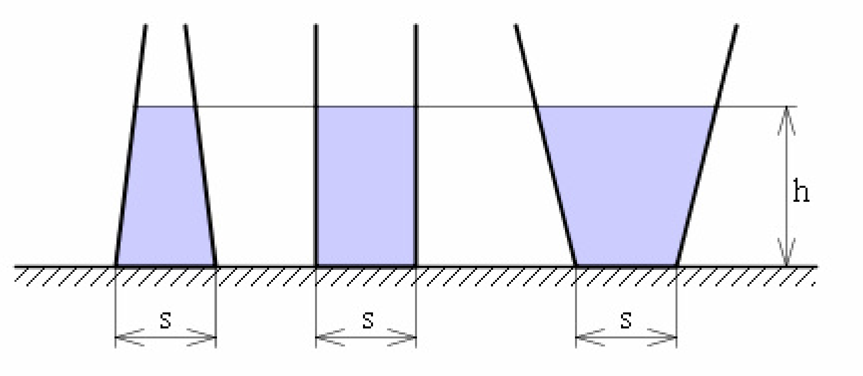
a) závisí na objemu kapaliny, která se nachází nad zkoumaným místem
b) nezávisí na objemu kapaliny, která se nachází nad zkoumaným místem, závisí pouze na výšce kapalinového sloupce h
c) závisí na hustotě kapaliny

ZTO 2.1.-17

Nádoby **1, 2, 3** jsou naplněny stejnou kapalinou do výšky h. Plocha dna je ve všech případech stejná. Ve které nádobě je tlaková síla působící na dno největší ?

a) v nádobě **1**
b) v nádobě **2**
c) v nádobě **3**

d) tlaková síla je ve všech případech stejná



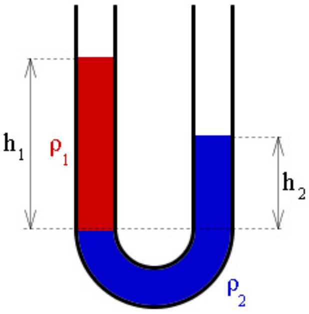
ZU 2.1.-18

Nádoba má vodorovné dno plochy S a je naplněna do výšky h kapalinou hustoty ρ . Jak velkou silou působí kapalina na dno nádoby? F =

ZTO 2.1.-19

Ve spojených nádobách máme dvě nemísící se kapaliny hustoty ρ_1 a ρ_2. Z obrázku plyne, že

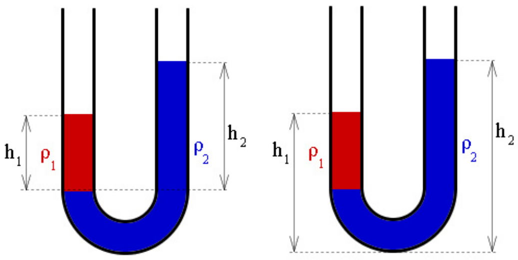
a) $\rho_1 > \rho_2$
b) $\rho_1 < \rho_2$
c) $\rho_1 = \rho_2$



ZTO 2.1.-20

Rovnice $\rho_1 h_1 g = \rho_2 h_2 g$ platí

a) jen pro obrázek 1
b) jen pro obrázek 2
c) platí pro oba obrázky



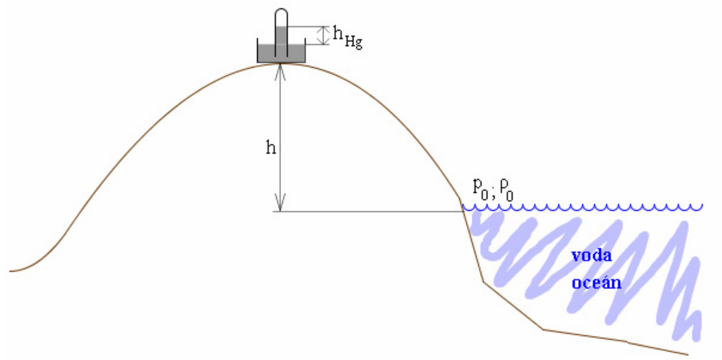
obr.1 obr.2

BLP 2.1.-21

Vypočítejte nadmořskou výšku, ve které se nacházíte, jestliže na barometru odečtete výšku rtuťového sloupce $h_{Hg} = 615,25$ mm. Teplota je (-5°C) a při této teplotě je hustota rtuti $\rho_{Hg} = 1,3608 \cdot 10^4$ kg.m^{-3}, tíhové zrychlení v místě měření bylo $g = 9,7835$ m.s^{-2}. Normální atmosférický tlak je $p_0 = 1,01325.10^5$ Pa a hustota vzduchu u hladiny moře je $\rho_0 = 1,21$ kg.m^{-3}. *Nejdříve vytvořte zkrácené zadání a barometrickou rovnici pro tlak.*

Řešení: $h_{Hg} = 615,25$ mm, $\rho_{Hg} = 1,3608 \cdot 10^4$ kg.m^{-3}, $g = 9,7835$ m.s^{-2}, $p_0 = 1,01325.10^5$ Pa, $\rho_0 = 1,21$ kg.m^{-3}

h=? m



- $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$

Tlak *p* vypočítejte jako hydrostatický tlak rtuťového sloupce:

- $p = h_{Hg}\rho_{Hg} g$

Dosaďte vyjádřený hydrostatický tlak rtuťového sloupce do barometrické rovnice pro tlak v určité výšce nad mořem:

- $\ln \frac{h_{Hg}\rho_{Hg} g}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} h$

Vyjádřete výšku *h* nad hladinou moře:

- $h = \left(\ln \frac{h_{Hg}\rho_{Hg} g}{p_0}\right)\left(-\frac{p_0}{\rho_0 g}\right)$

Dosaďte číselně hodnoty v základních jednotkách SI:

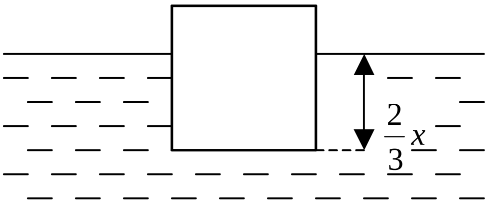
- $h = 1820,6$ m nad hladinou moře.

BU 2.1.-22

Těleso hustoty ρ_1 má hmotnost 2 kg. Ponoříme-li jej do kapaliny hustoty ρ_2, je jeho tíha 16 N (g = 10 m/s^2). Jak velkou silou je těleso v kapalině nadlehčováno ? F = 4 N

BŘU 2.1.-23

Krychle o hraně x a hustoty ρ plove v kapalině hustoty ρ_1 tak, že je ponořena do dvou třetin. Určete poměr $\frac{\rho_1}{\rho} =$



Řešení:

$x[\mathrm{m}]$, $\rho\left[\mathrm{kg.m^{-3}}\right]$, $\rho_1\left[\mathrm{kg.m^{-3}}\right]$, $V_1=\frac{2}{3}x^3\ \mathrm{m^3}$, $\frac{\rho_1}{\rho}=?$

Nastane rovnováha tíhové a vztlakové síly

$F_G=F_{vz}$

$mg=m_1g$

Použijeme Archimédův zákon

$V\rho g=V_1\rho_1 g$

Za objem dosadíme x^3

$x^3\rho g=\frac{2}{3}x^3\rho_1 g$

Po dosazení za objem získáme tento výsledek

$\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{3}{2}$

ZŘU 2.1.-24

Plechovka má celkový objem 1 200 cm^3 a hmotnost 130 g. Kolik olověných broků může plechovka nést, aniž se ve vodě potopí? Hmotnost jednoho broku je m= 0,0356 kg.

Řešení:

$V=1200\ \mathrm{cm^3}$, $m=130$ g, m_b=0,0356 kg, ρ_{H_2O}=1000 kg.m^{-3}, $n=?$

Řešením je úvaha o rovnováze síly hydrostatické vztlakové a tíhové síly, které působí na plechovku ponořenou po okraj ve vodě.

$G_B+G_p=G_{H_2O}$

$M_B+M_p=\rho_{H_2O}V$

$M_B=\rho_{H_2O}V-M_p=1000\cdot 0{,}0012-0{,}13=1{,}07kg\Rightarrow n=\frac{M_B}{m_B}=\frac{1{,}07}{0{,}0356}=30broků$

ZLP 2.1.-25

Těleso objemu 5.10^{-6} m^3 má hmotnost 20 g. Je-li ponořeno do kapaliny je jeho tíha 15.10^{-2} N (g = 10 m/s^2). Vypočítejte hustotu kapaliny. *Vytvořte zkrácené zadání a vyjádřete vztlakovou sílu z rozdílu tíhy na vzduchu a ve vodě:*

Řešení:

$V=5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$, $m=20$ g, $G_{kapalina}=15\cdot 10^{-2}$ N, $g=10$ m.s^{-2}, ρ=?

1. $F_{vz}=G_{vzduch}-G_{kapalina}$

Dosaďte za vztlakovou sílu vztah obsahující hustotu vytlačené kapaliny:

2. $G_{vzduch} - G_{kapalina} = V\rho g$

Vyjádřete si hustotu kapaliny:

3. $\rho = \dfrac{G_{vzduch} - G_{kapalina}}{Vg}$

Dosaďte ve správných základních jednotkách soustavy SI a porovnejte výsledek s tabulkovými hodnotami:

4. $\rho = \dfrac{0,05}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81} = 1000$ kg.m^{-3} jedná se o vodu.

BU 2.1.-26

Předmět visí na pérových vahách. Na vzduchu ukazují váhy 30 N. Když předmět plně ponoříme do vody, údaj klesne na 20 N. Když jej plně ponoříme do kapaliny neznámé hustoty, váhy ukazují 24 N. Vypočítejte hustotu této kapaliny.

BŘU 2.1.-27

Loď tvaru kvádru o základně *S* má hmotnost m a je zatížena nákladem tíhy *G*. Hustota vody je ρ. Vypočítejte ponor lodi.

Řešení:

Nastane rovnováha sil mezi součtem tíhy nákladu a tíhy lodi, který se bude rovnat tíze vytlačené vody:

$$G_{H_2O} = G_{nákladu} + G_{lodi}$$

$$V\rho g = G_{nákladu} + G_{lodi}$$

$$V = \frac{G_{nákladu} + mg}{\rho g}$$

$$Sh = \frac{G_{nákladu} + mg}{\rho g} \Rightarrow h = \frac{G_{nákladu} + mg}{\rho g S}$$

ZU 2.1.-28

Těleso hmotnosti m a objemu V je ponořeno do kapaliny hustoty ρ. Těleso vyzvedneme v kapalině o výšku h. Neuvažujeme-li odpor prostředí, vykonáme práci $W =$

Odpověď: $W = h(mg - \rho Vg)$

Řešení:

$$W = (mg - F_{vz})h$$

$$W = mgh - \rho Vgh$$

$$W = h(mg - \rho Vg)$$

2.2. HYDRODYNAMIKA A AERODYNAMIKA

SHRNUTÍ

Proudění: Pohyb tekutiny.

Proudnice: Myšlená čára (trajektorie), k níž má vektor rychlosti v každém bodě směr tečny.

Proudová trubice: Myšlená válcová plocha tvořená z proudnic.

Proudové vlákno: Kapalina vymezená proudovou trubicí.

Stacionární proudění:

Tlak a **rychlost** v proudící tekutině je v každém bodě konstantní v čase.
V kapalině existuje časově **stálé vektorové pole** rychlostí, proudnice se **nemohou protínat.**

<u>I. Ustálené proudění ideální kapaliny</u>

ROVNICE SPOJITOSTI TOKU (KONTINUITY)

$S_1 v_1 = S_2 v_2 \;\Rightarrow\; Sv = \text{konst}$. **(zákon zachování hmotnosti v proudící ideální kapalině)**

Objemový tok : $Q_V = Sv$, jednotka: $m^3.s^{-1}$
Při ustáleném proudění nestlačitelné kapaliny je objemový tok v celé proudové trubici stálý.

BERNOULLIOVA ROVNICE

Vyjadřuje zákon zachování mechanické energie proudící ideální kapaliny

$$p + h\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$$

p - hustota tlakové potenciální energie proudící kapaliny

$h\rho g$ - hustota potenciální tíhové energie

$\frac{1}{2}\rho v^2$ - hustota kinetické energie proudící kapaliny

Hustota energie: vyjadřuje energii objemové jednotky kapaliny

$$\varepsilon = \frac{E}{V}$$

Pro dva různé průřezy proudové trubice platí:

$$p_1 + h_1\rho g + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + h_2\rho g + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Objemová hustota energie proudící ideální kapaliny je stálá a ve všech bodech trubice stejná.
Jestliže při proudění tekutiny ve vodorovné proudové trubici vzrůstá rychlost částic tekutiny, pak klesá její tlak a obráceně.

$$\frac{p}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} = h_{celková} = konst.$$

$\{\varepsilon\} = \{p\}$ - hustota energie a tlak se číselně rovnají

p - **statický** tlak proudící kapaliny (měření v manometrických tr.)

$h\rho g$ - **hydrostatický** tlak

$\frac{1}{2}\rho v^2$ - **hydrodynamický** tlak

$\frac{p}{\rho g}$ - **tlaková výška** (výška sloupce kapaliny, který by vyvolal tlak p)

h **místní výška** uvažovaného bodu proudnice od základní hladiny

$\frac{v^2}{2g}$ - **rychlostní výška** (výška, z níž by musela kapalina padat volným pádem, aby nabyla rychlosti v)

Bernoulliho rovnice platí přibližně i pro **skutečné kapaliny**, lze ji použít i pro **plyny** s malými tlakovými změnami, pro **proudící vzduch** platí až do rychlosti 40 ms^{-1}.

Je-li tekutina **viskózní**, při proudění se zahřívá, tyto ztráty však nebyly ve výše uvedených vztazích uvažovány.

Aplikace Bernoulliovy rovnice:

Výtok kapaliny otvorem v nádobě :

- nepřihlížíme k barometrickému (atmosférickému) tlaku
- uvažujeme kapalinu tekoucí do vakua
- práce vykonaná tlakovou silou je rovna kinetické energii, kterou kapalina získá

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

Reálně se jen část tlakové energie mění na kinetickou energii vytékající kapaliny, v obecném případě je uvnitř kapaliny v místě otvoru jiný tlak (p_1) než vně otvoru (p_2):

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

V tíhovém poli země pro výtokovou rychlost kapaliny platí **Torricelliho vztah :**

$$v = \sqrt{2hg}$$

- výtoková rychlost **nezávisí na hustotě** kapaliny a je stejná, jako kdyby kapalina padala volným pádem z výšky h
- **směr vektoru rychlosti** je vždy kolmý ke stěně nádoby v místě otvoru a vodní paprsek opisuje **parabolu**

ZTO 2.2.-1.

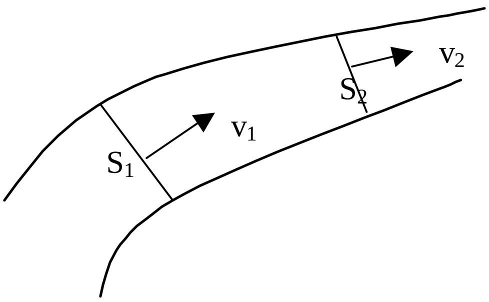
Uvažujte potrubí průřezu S, kterým protéká kapalina rychlostí v. Součin S.v představuje

a) hmotnost kapaliny, která proteče průřezem za 1 sekundu
b) tíhu kapaliny, která proteče průřezem za 1 sekundu
c) objem kapaliny, který proteče průřezem
d) objem kapaliny, který proteče průřezem za 1 sekundu
e) dynamický tlak

ZTO 2.2.-2.

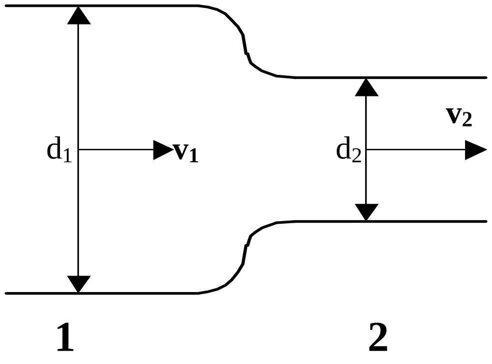
Uvažujte ustálené proudění kapaliny. V průřezu S_1 je rychlost kapaliny v_1 a v průřezu S_2 je rychlost kapaliny v_2. Porovnejte obě rychlosti v_1 a v_2.

a) $v_1 > v_2$
b) $v_1 < v_2$
c) $v_1 = v_2$



ZTO 2.2.-3.

V průřezu průměru d_1 = 2.10^{-2} m má kapalina rychlost $v_1 = 1$ m.s^{-1}. Jakou rychlostí proudí kapalina v průřezu průměru $d_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ m ? v_2 =



ZTO 2.2.-4.

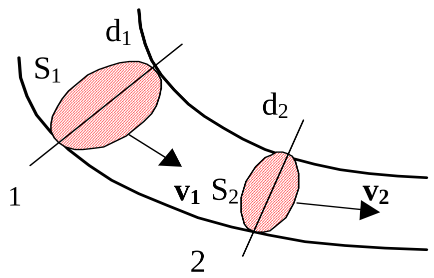
Prohlédněte si obrázek. Rovnice kontinuity (spojitosti toku) pro ustálené proudění nestlačitelné kapaliny je vyjádřena takto :

a) $d^2 \cdot v =$ konst. .

b) $d_1^{\,2} \cdot v_1 = d_2^{\,2} \cdot v_2$

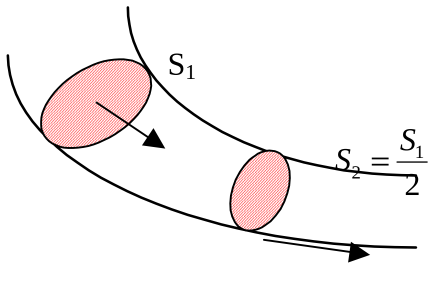
c) $\pi.\frac{d_1^{\,2}}{4}.v_1 = \pi\frac{d_2^{\,2}}{4}.v_2$

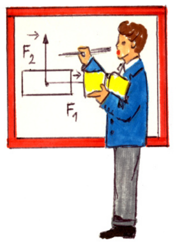
d) $S \cdot v \ =$ konst.



ZTO 2.2.-5.

Průřezem S_1 proteče za 1 sekundu 6 kg vody. Vypočítejte kolik vody proteče za jednu sekundu průřezem $S_2 = \frac{S_1}{2}$. m =



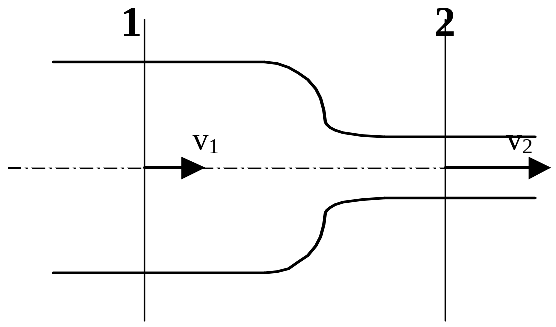


BŘU 2.2.-6.

Voda teče vodorovnou trubicí a do okolního prostoru (atmosféry) vytéká rychlostí $v_2 = 15$ m.s^{-1}. Průměr trubice v místě 1 je d_1 = 5 cm a průměr v místě 2 je d_2 = 3 cm.

a) Kolik vody vyteče do okolního prostoru za 10 minut?

b) Jaká je rychlost proudění v místě 1?



Řešení:

$v_2 = 15$ m.s^{-1}, $d_1 = 5$ cm, $d_2 = 3$ cm, a) $Q_V = ?$, t=10 min, b) $v_1 = ?$

a) Použitím rovnice kontinuity vypočítáme objemový průtok za 1 sekundu

$$Q_v = S_2 v_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2$$

$$Q_v = \frac{\pi \cdot 0,03^2}{4} \cdot 15 = 0,0106 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$$

Za 10 minut to potom bude

$$V = Q_v t = 0,0106 \cdot 600 = 6,3 \text{ m}^3$$

b) Ze zákona zachování objemového průtoku víme, že bude platit:

$$Q_v = konst.$$

$$Q_v = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1$$

$$v_1 = \frac{4Q_v}{\pi d_1^2} = \frac{0,0106 \cdot 4}{\pi \cdot 0,05^2} = 5,4 \text{ m.s}^{-1}$$

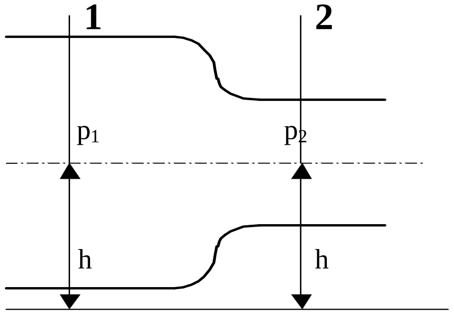
ZTO 2.2.-7.

Ve vodorovném potrubí proudí kapalina. Pro tlaky p_1 a p_2 platí

a) $p_1 > p_2$

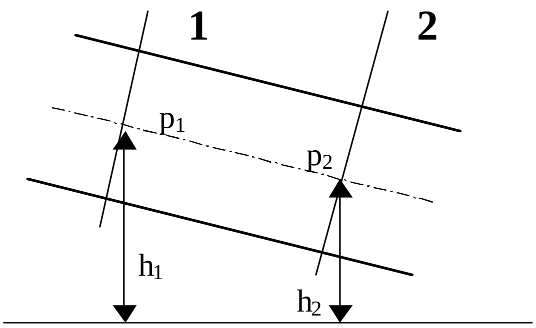
b) $p_1 = p_2$

c) $p_1 < p_2$



ZTO 2.2.-8. Kapalina proudí v potrubí konstantního průřezu. Pro tlaky p_1 a p_2 platí

a) $p_1 > p_2$
b) $p_1 = p_2$
c) $p_1 < p_2$



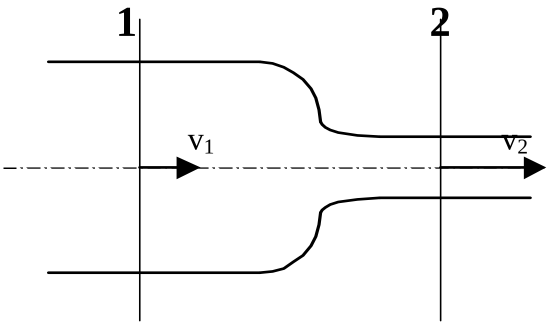
BTO 2.2.-9. Jak lze zjednodušit Bernoulliovu rovnici pro kapalinu proudící ve vodorovném potrubí ?

a) $p_1 + \frac{mv_1^2}{2} = p_2 + \frac{mv_2^2}{2}$

b) $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$

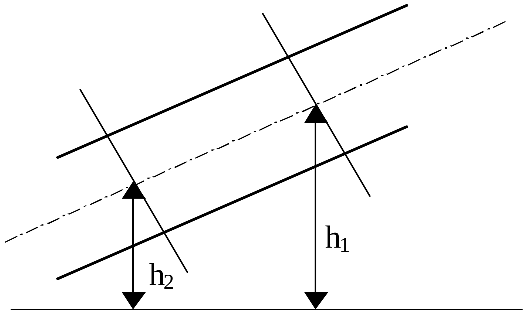
c) $\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \text{konst.}$

d) $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$

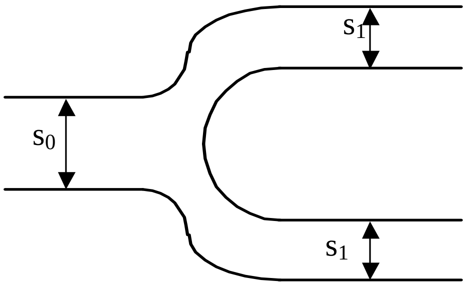


BTO 2.2.-10.

Bernoulliova rovnice je: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{konst.}$ Zapište ji pro dva průřezy tak, aby vyhovovala situaci na následujícím obrázku.



ZU 2.2.-11.
Průřezem $S_1 = 10^{-2}$ m^2 proudí kapalina rychlostí $v_1 = 0{,}1$ m/s. Vypočítejte, jakou rychlostí proudí kapalina v průřezu $S_0 = 1{,}5.10^{-2}$ m^2. $v_0 =$



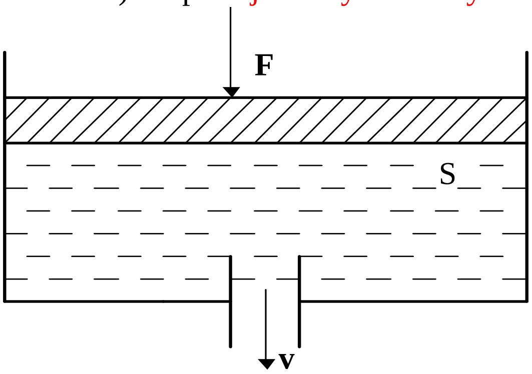
BTO 2.2.-12.

Kapalina hustoty ρ teče potrubím rychlostí v. Výraz $\frac{\rho \cdot v^2}{2}$ představuje:

a) kinetickou energii kapaliny
b) kinetickou energii objemové jednotky kapaliny
c) dynamický tlak v kapalině
d) rychlostní výšku
e) tlakovou energii objemové jednotky kapaliny

BU 2.2.-13.

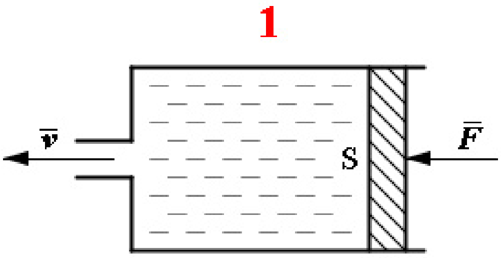
Uvažujte výtok ideální kapaliny otvorem působením tlaku vyvolaného vnější silou F (bez zřetele k tíži). Napište jakou rychlostí vytéká kapalina hustoty ρ. v =

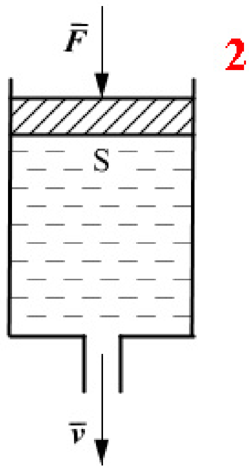


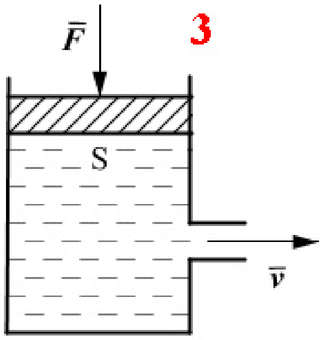
ZTO 2.2.-14.

Uvažujte výtok ideální kapaliny otvorem působením tlaku vyvolaného vnější silou F (bez zřetele k tíži). Za předpokladu konstantní síly F a plochy pístu S platí, že

a) kapalina vytéká nejrychleji v případě **1**
b) kapalina vytéká nejrychleji v případě **2**
c) kapalina vytéká nejrychleji v případě **3**
d) kapalina vytéká ve všech případech stejnou rychlostí



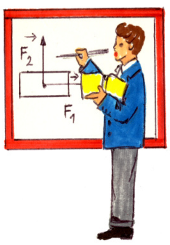




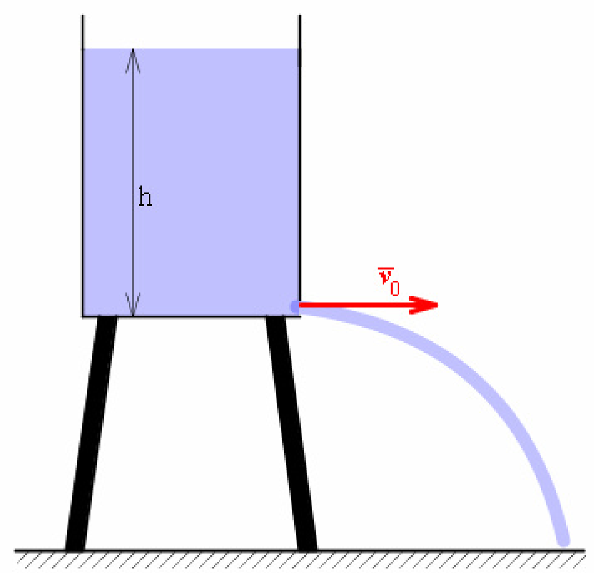
BU 2.2.-15.
Kapalina protéká malým otvorem z nádoby, kde je tlak p_1 do nádoby, v níž je tlak p_2. Kapalina bude protékat rychlostí v =

BU 2.2.-16.
Ideální kapalina vytéká z nádoby malým otvorem účinkem své tíhy. V okamžiku, kdy je výška hladiny nad výtokovým otvorem h, je výtoková rychlost v. V okamžiku, kdy hladina klesne na h/2, je výtoková rychlost v´ =

BU 2.2.-17.
Ideální kapalina hustoty 10^3 kg.m^{-3} vytéká pouze působením své tíhy otvorem ve dně průřezu S = 10^{-4} m^2. Kolik m^3 kapaliny za sekundu musíme do nádoby dodat, aby hladina byla v konstantní výšce h = 2 m ? *Q*=



BŘU 2.2.-18.
Po proražení nádrže na dešťovou vodu nábojem vystřeleným z pistole v hloubce *h*, začala vytékat voda z nádrže ven. Jakou rychlostí *v* začne voda z nádrže vytékat?
Řešení:



K výpočtu použijeme Bernoulliho rovnici. Za nulovou hladinu výšky si zvolíme místo proražení nádrže a potom můžeme napsat:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_0$$

kde:

p_0 je tlak, který působí současně na hladinu dešťové vody i na vodu, která vytéká z otvoru ven.

V je pak rychlost klesání hladiny dešťové vody a platí pro ni $v \gg V$ (zvažte v souvislosti s rovnicí kontinuity). Jestliže položíme $h_0 = 0$, odečteme p_0 a zanedbáme člen $\frac{1}{2}\rho V^2$, pak dostáváme: $\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$ a z toho potom:

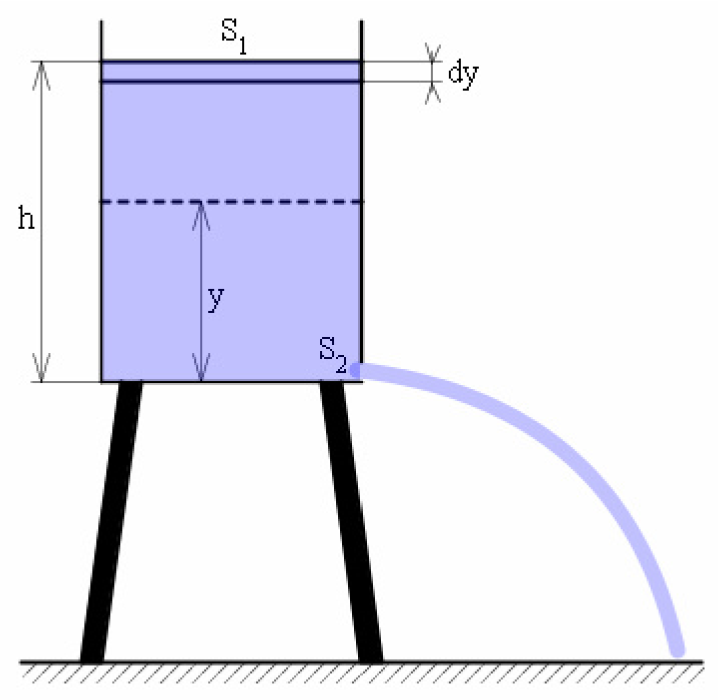
$v = \sqrt{2gh}$ Stejnou rychlost by nabylo jakékoli těleso volně puštěné z výšky h. Zvažte výpočet v případě uzavřené nádrže.

BŘU 2.2.-19.

Z válcové nádrže jejíž podstava má plochu $S_1 = 0{,}5 m^2$ vytéká otvorem u dna o ploše $S_2 = 5.10^{-4} m^2$ voda. Voda v nádrži sahá do výšky $h = 10 m$. Za jaký čas vyteče voda z nádrže?

Řešení:

$s_1 = 0{,}5$ m^2, $s_2 = 5.10^{-4}$ m^2, h=10 m, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $t = ?$



Pro vyteklý element objemu platí: $dV = S_1 dy$ a nebo také $dV = S_2 v dt$ kde v je výtoková rychlost vody $v = \sqrt{2gy}$. Potom můžeme psát: $S_1 dy = S_2 \sqrt{2gy} dt$

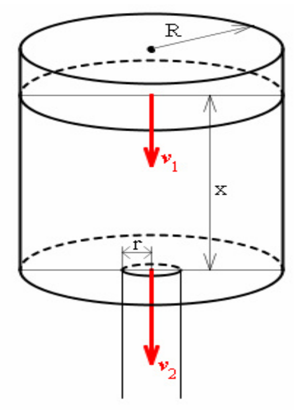
A odtud:

$$t = \int_0^t dt = \frac{S_1}{S_2 . \sqrt{2.g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h} = \frac{0,5}{5 \cdot 10^{-4} \sqrt{2 \cdot 9,81}} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 1426,8 s = 23,78 \min$$

BŘU 2.2.-20.

Ve dně válcové nádoby poloměru R je kruhový otvor poloměru r, kterým vytéká kapalina. Určete rychlost klesání hladiny v nádobě v závislosti na výšce x hladiny.

Řešení:



Za jednotku času proteče kterýmkoli průřezem stejný objem kapaliny a proto platí rovnice kontinuity:

$$Q_{V1} = Q_{V2}$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Abychom vyjádřili výtokovou rychlost v_2, formulujme zákon zachování energie pro proudění ideální kapaliny (Bernoulliho rovnice):

$$x\rho g + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2 = 2xg + v_1^2$$

Dosaďme do rovnice kontinuity a použijme vzorec pro obsah kruhu:

$$S_1^2 v_1^2 = S_2^2\left(2xg + v_1^2\right)$$

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\sqrt{2xg}$$

BŘU 2.2.-21.

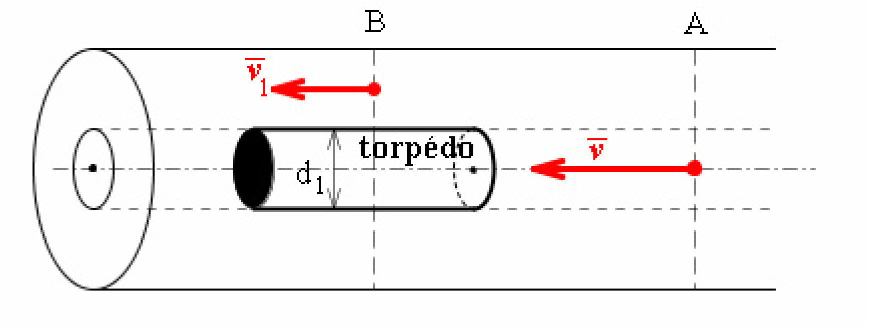
Modely torpéd bývají zkoušeny ve vodorovné trubici s proudící vodou podobně jako modely letadel v aerodynamickém tunelu. Uvažujme, že do takové trubice o vnitřním průměru 25 cm umístíme souose model torpéda, který má průměr 5 cm. Při zkoušce proudí voda kolem torpéda rychlostí 2,5 m/s.

a) Jakou rychlostí musí voda proudit v místech, kde její proud není zúžen modelem?

b) Jaký je rozdíl tlaku vody v trubici mezi místem, kde se nachází model a ostatními částmi trubice?

Řešení:

$d = 25$ cm, $d_1 = 5$ cm, $v_1 = 2{,}5$ m.s^{-1}, a) $v = ?$, b) $\Delta p = ?$



a) Vyjdeme z rovnice spojitosti toku a za plochu ve zúžené části dosadíme mezikruží:

$$Sv = S_1 v_1$$

$$\frac{\pi d^2}{4}v = \left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}\right)v_1$$

$$v = \frac{\left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}\right).v_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4} - \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4}\right)\cdot 2{,}5}{\frac{\pi \cdot 0{,}25^2}{4}} = 2{,}4 \text{ m.s}^{-1}$$

b) Pomocí Bernoulliovy rovnice vyjádříme rozdíl tlaků mezi místem A a B :

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2 = p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho v_1^2-\frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho (v_1^2-v^2)=500(2,5^2-2,4^2)=245Pa$$

BŘU 2.2.-22.
Vítr při vichřici obtéká střechu domu rychlostí 110 km/h. Hustota vzduchu je 1,2 kg.m^{-3}.
a) Jaký je rozdíl tlaků v prostoru nad střechou a pod střechou, který se snaží střechu nadzvednout a odnést?
b) Jaká bude síla nadnášející střechu o obsahu 90 m^2?
Řešení:
$v_1=110$ km.h^{-1}, $\rho=1,2$ kg.m^{-3}, a) $\Delta p=?$, b) $F=?$, $S=90$ m^2

Nejdříve si pomocí Bernoulliovy rovnice vyjádříme rozdíl tlaků nad a pod střechou a dosadíme tento rozdíl do vztahu pro výpočet tlakové (vztlakové) síly.

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2 = p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho v_1^2-\frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho v_1^2-0=\frac{1}{2}\cdot 1,2\cdot 30,5^2=560Pa$$

$$F=\Delta pS=560\cdot 90=5\cdot 10^4 N$$

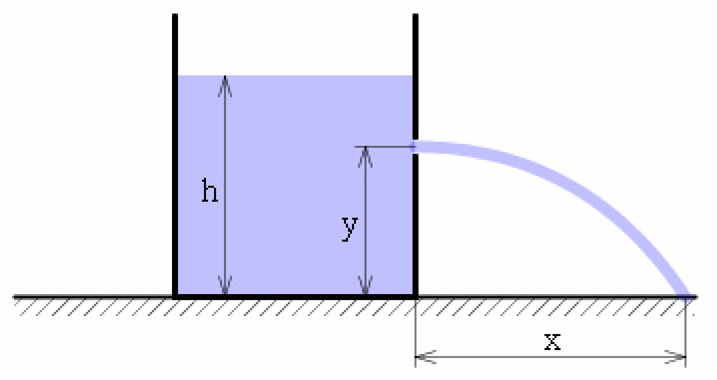
BŘU 2.2.-23.
Do nádrže tlačí čerpadlo tlakem 10 Pa takové množství vody, že hladina v nádrži zůstává ve výšce 1 m nade dnem. Jakou rychlostí vytéká voda otvorem ve dně?
Řešení:
$p=10$ Pa, $h=1$ m, $g=9,81$ m.s^{-2}, $\rho=1000$ kg.m^{-3}, $v=?$

Jestliže hladina vody zůstává v nádrži ve stejné výšce, víme že nastala rovnováha statického tlaku přitékající kapaliny a hydrostatického tlaku kapaliny v nádrži s tlakem hydrodynamickým vytékající kapaliny:

$$p+h\rho g=\frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2(p+h\rho g)}{\rho}}=\sqrt{\frac{2(10+1\cdot 1000\cdot 9,81)}{1000}}=4,5m.s^{-1}$$

BŘU 2.2.-24.
V nádobě je voda s hladinou ve výšce 50 cm. Jak vysoko nad dnem musíme udělat ve stěně nádoby otvor, aby voda stříkala co nejdále na vodorovnou rovinu, na které je nádoba postavená?
Řešení:
$h=50$ cm, $y=?$ aby $x=\max$



Víme, že pro výtokovou rychlost vody vytékající naším otvorem bude platit:

$v = \sqrt{2 \cdot g(h-y)}$

Můžeme aplikovat poznatky získané v kapitole vodorovný vrh:

$y = \frac{1}{2}gt^2$ a pro x $x = vt \;\Rightarrow x = \sqrt{2 \cdot g(h-y)}\sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(h-y)y}$

x bude maximální jestliže bude maximální výraz:

$z = (h-y)y$

jestliže položíme derivaci z podle y rovnu nule, nalezneme maximum x

$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}y} = h - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{2} = 25\ \mathrm{cm}$

2. Ustálené proudění skutečné kapaliny

Reálná kapalina není dokonale tekutá, projevuje se v ní vnitřní tření a tím vzniká pokles mechanické energie kapaliny v důsledku přeměny části energie na **teplo Q:**

$$p + h\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2 + Q = \text{konst.}$$

VNITŘNÍ TŘENÍ

Vzniká při vzájemném posouvání částic téže látky.
V celém průřezu není vlivem viskozity stejná rychlost proudící kapaliny. Nejvyšší rychlost je v ose trubice a u stěn je rychlost nulová.

Síly vnitřního tření mají směr tečen k povrchu jednotlivých vrstev proudící kapaliny
Tyto síly jsou tím větší:

- čím větší je rozdíl rychlostí obou vrstev
- čím větší je plocha, na níž působí
- čím menší je vzdálenost vrstev.

Síly vnitřního tření závisejí na jakosti kapaliny. Platí:

$$dF = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}S\,,$$

kde η **je součinitel dynamické viskozity**
Jednotka součinitele dynamické viskozity: $\mathrm{N.m^{-2}.s = Pa.s = kg.m^{-1}.s^{-1}}$

Tečné napětí: $\tau = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ [kg.m^{-1}.s^{-2}]

Kinematická viskozita: $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$ [m^{2}.s^{-1}],

viskozita tekutin je funkcí teploty a tlaku

PROUDĚNÍ LAMINÁRNÍ A TURBULENTNÍ:

a) Nevírové (potenciálové) proudění:

- vzniká při pohybu ideální kapaliny trubicí **bez jakéhokoliv tření vnějšího i vnitřního**
- **rychlost** kapaliny ve všech bodech průřezu **stejná**
- elementární objemy kapaliny konají pouze pohyby **posuvné** (nikoli otáčivé)

b) Proudění skutečné kapaliny:

- částice kapaliny **u stěn** jsou v klidu
- rychlost pohybu částic roste směrem ke středu trubice
- při malé průměrné rychlosti kapaliny se všechny částice pohybují po proudnicích rovnoběžných s osou trubice
- proudnice se nikde neprotínají
- v trubici kruhového průřezu jsou rychlosti v osovém řezu rozloženy parabolicky

Laminární proudění

- elementární objemy kapaliny konají pohyb posuvný i otáčivý
- vzniká vírové proudění

Turbulentní proudění

- vzniká při velké průměrné rychlosti proudění
- nastává neuspořádaný pohyb jednotlivých vrstev
- proudnice se navzájem kříží

Reynoldsovo číslo:
Číslo, jehož kritická hodnota určuje přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním. Nemá žádný rozměr a platí pro něj tento vztah: $R = \frac{vd}{\upsilon}$, kde:

d - je průměr kruhové trubice, v - kritická rychlost, υ - kinematická viskozita a R_K - je tzv. kritické Reynoldsovo číslo, které leží zpravidla v intervalu 1000-2000. Je-li *R* > 2000, pak vzniká proudění turbulentní.

2.3. TEPLOTA, TEPLOTNÍ ROZTAŽNOST, TEPLO, SKUPENSKÁ TEPLA, STAVOVÁ ROVNICE PLYNŮ

SHRNUTÍ

Teplotní stupnice
Jsou určeny základními body (přesně definované rovnovážné stavy látek) a jednotkou.

1. Termodynamická teplotní stupnice*:*
Základní teplotní bod je trojný bod vody T_0 = 273,16 K, tj. rovnovážný stav tří fází vody (led, kapalná voda, pára).
$[T] = \mathrm{K}$

2. Celsiova teplotní stupnice:
Má dva základní teplotní body:
1. Rovnovážnému stavu ledu a vody za normálního tlaku přísluší teplota 0 °C.
2. Rovnovážnému stavu vody a její syté páry za normálního tlaku přísluší teplota 100 °C.

$[t]$ = °C

3. Fahrenheitova teplotní stupnice:
Používá se zejména v USA a ve Velké Británii. Jednotkou je Fahrenheitův stupeň, tedy $[t_F]$= °F. Teplotě 0 °C odpovídá 32 °F, teplotě 100 °C pak 212 °F. Proto je převodní vztah mezi stupnicemi Celsiovou a Fahrenheitovou:

$$\{t_\mathrm{F}\} = \frac{9}{5}\{t\} + 32$$

Teplotní roztažnost
Teplotní roztažnost se projevuje u všech tří skupenství látky.
I) **Délková roztažnost pevných látek** se projevuje změnou délky těles v závislosti na teplotě. Při elementární změně teploty je příslušná změna délky $\mathrm{d}l = \alpha l \mathrm{d}T$, kde α je **součinitel teplotní délkové roztažnosti**. Je funkcí druhu látky, uspořádání částic a teploty.
$[\alpha] = \mathrm{K}^{-1}$
U izotropních látek a malých teplotních rozdílů lze považovat součinitel α za konstantní ve všech směrech, tzn. délkový rozměr se mění lineárně:

$$l_2(T_2) = l_1(T_1)\left[1 + \alpha(T_2 - T_1)\right] = l_1(T_1)[1 + \alpha\Delta T]$$

$l_2(T_2)$ délka při teplotě T_2

$l_1(T_1)$ délka při teplotě T_1

Často se pracuje s **relativním (poměrným) prodloužením** e:

$$e = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{\Delta l}{l_1}$$

Objemová roztažnost pevných látek, např. pro kvádr s rozměry a, b, c a pro malé teplotní intervaly:

$$a_2(T_2) = a_1(T_1)(1 + \alpha\Delta T),\ b_2(T_2) = b_1(T_1)(1 + \alpha\Delta T),\ c_2(T_2) = c_1(T_1)(1 + \alpha\Delta T)$$

Objem kvádru, který přísluší teplotě T_2, má tvar:

$$V_2(T_2) = a_2 b_2 c_2 = a_1 b_1 c_1 (1 + \alpha\Delta T)^3$$

Přibližně platí: $V_2 = V_1(1+3\alpha\Delta T) = V_1(1+\beta\Delta T)$, kde $\beta \cong 3\alpha$ a nazývá se **součinitel teplotní objemové roztažnosti**.
Podobně pro **plošnou roztažnost pevných látek**:
$S_2(T_2) = S_1(T_1)(1+\delta\Delta T) = S_1(T_1)(1+2\alpha\Delta T)$,
kde δ je **součinitel teplotní plošné roztažnosti**.
II) **Objemovou roztažnost kapalin** je možné při malých teplotních rozdílech popsat vztahem:
$V_2(T_2) = V_1(T_1)(1+\beta\Delta T)$
III) **Objemovou roztažnost plynů**, pro které platí Boylův zákon ($pV = \text{konst.}$), lze za předpokladu konstantního tlaku matematicky popsat takto:
$V_2 = V_1(1+\gamma_p\Delta T)$, kde objem V_1 odpovídá teplotě T_1, objem V_2 teplotě T_2 a $\gamma_p = \frac{1}{273{,}15}$ K^{-1}
je **součinitel teplotní objemové roztažnosti**.
Závislost hustoty pevných látek a kapalin na teplotě je důsledkem objemové roztažnosti. Při změně teploty se mění objem látky, nikoli však hmotnost. Předpokládejme homogenní těleso a lineární objemovou roztažnost. Hustota odpovídající počáteční teplotě T_1 je $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$,
pro teplotu T_2 pak $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$. Platí
$\rho_2 = \rho_1(1-\beta\Delta T)$
V následujících úlohách budeme předpokládat, že závislost objemu na teplotě je lineární.

ZU 2.3.-1
Vyjádřete teplotu 20 °C v jednotkách Fahrenheitův a Kelvinův stupeň.

ZU 2.3.-2
Turista po příletu na letiště v Chicagu odečte z venkovního teploměru hodnotu 28 °F. Jaký údaj by odečetl z teploměru se stupnicí Celsiovou?

ZTO 2.3.-3
Uvažujte tyč délky l_1, jejíž součinitel teplotní délkové roztažnosti je α. Zahřejeme-li tyč o ΔT stupňů, o jakou délku se prodlouží tyč?

ZTO 2.3.-4
Uvažujte tyč délky l_1, jejíž součinitel teplotní délkové roztažnosti je α. Tyč zahřejeme o ΔT stupňů. Jaká je její délka po zahřátí?

BTO 2.3.-5
Tyč délky 1 m se po zahřátí o ΔT stupňů prodlouží o 1%. Kolik činí absolutní prodloužení?

ZTO 2.3.-6
Uvažujte tyč délky l_1, jejíž součinitel teplotní délkové roztažnosti je α. Tyč zahřejeme o ΔT stupňů. Jak vypočítáme její relativní prodloužení?

ZTO 2.3.-7
Nechť má těleso objem V_1 a součinitel teplotní objemové roztažnosti β. Zvýší-li se teplota tohoto tělesa o ΔT, o jakou hodnotu vzroste jeho objem?
ZTO 2.3.-8

Těleso má počáteční objem V_1, součinitel teplotní objemové roztažnosti β. Zvýší-li se teplota tohoto tělesa o ΔT, jakou hodnotu dosáhne objem tělesa?

ZTO 2.3.-9

Jaká byla bezprostředně po skončení zahřívání tělesa o ΔT stupňů, které mělo počáteční objemu V_1 a součinitel teplotní objemové roztažnosti β, relativní změna objemu $\Delta V/V_1$?

ZTO 2.3.-10

Mosazná tyč má při teplotě 20 °C délku 135 cm. O kolik procent bude delší při teplotě 90 °C? Součinitel teplotní délkové roztažnosti mosazi je $19 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

BLP 2.3.-11

Válec ze zlata zahřejeme o 80 °C z teploty 10 °C. Určete v procentech: a) změnu objemu, b) změnu obsahu povrchu, c) změnu výšky, d) změnu hustoty. Uvažujte lineární závislost mezi délkou a teplotou. Teplotní součinitel délkové roztažnosti zlata je $14{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

$\Delta t = 80°\mathrm{C}$, $t_1 = 10°\mathrm{C}$, $\alpha = 14{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, a) $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\% = ?$, b) $\frac{\Delta S}{S_1} \cdot 100\% = ?$, c) $\frac{\Delta h}{h_1} \cdot 100\% = ?$, d) $\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \cdot 100\% = ?$

Ze závislosti objemu na teplotě vyjádřete relativní přírůstek objemu a vynásobte jej 100%.

a) $V = V_1(1+\beta\Delta t)$, kde $\beta \cong 3\alpha$. Po úpravě dostaneme: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\% = 3\alpha\Delta t \cdot 100\% = 0{,}34\%$

Ze závislosti plošného obsahu na teplotě vyjádřete relativní přírůstek obsahu a vynásobte jej 100%.

b) $\frac{\Delta S}{S_1} \cdot 100\% = 2\alpha\Delta t \cdot 100\% = 0{,}23\%$

Ze závislosti délky na teplotě vyjádřete relativní přírůstek délky a vynásobte jej 100%.

c) $\frac{\Delta h}{h_1} \cdot 100\% = \alpha\Delta t \cdot 100\% = 0{,}11\%$

Použijte zjednodušenou závislost hustoty na teplotě $\rho = \rho_1(1-\beta\Delta t)$.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \cdot 100\% = -3\alpha\Delta t \cdot 100\% = -0{,}34\%$$

a) 0,34 %, b) 0,23 %, c) 0,11 %, d) –0,34 %

SHRNUTÍ

Tepelné kapacity

Teplo Q je určeno energií vyměněnou mezi soustavou a okolím v důsledku teplotního rozdílu mezi nimi, obvykle prostřednictvím interakce mezi částicemi. Soustava označuje těleso nebo skupinu těles, jejichž stav zkoumáme.

Dodáme-li tělesu teplo $\mathrm{d}Q$, zvýší se jeho teplota o $\mathrm{d}T$ a platí:

$$\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T\ ,$$

kde C je **tepelná kapacita tělesa**. Její hodnota závisí na druhu a množství látky, teplotě a tlaku.

$[C] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

Měrná tepelná kapacita látky tělesa je $c = \dfrac{C}{m} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$.

$[c] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$

Celkové teplo, které látka o hmotnosti m přijme (za předpokladu c = konst.):

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c\,\mathrm{d}T = mc(T_2 - T_1) = mc(t_2 - t_1)$$

Obecně měrná tepelná kapacita závisí na vnějších podmínkách. Má smysl zavést **měrnou tepelnou kapacita při stálém tlaku** c_p a **měrnou tepelnou kapacitu při stálém objemu** c_V. Protože se část tepla spotřebuje na práci vykonanou pro změnu objemu, platí nerovnost $c_\mathrm{p} > c_\mathrm{V}$. U látek pevných a kapalných je c_p jen nepatrně větší než c_V, takže $c_\mathrm{p} \doteq c_\mathrm{V}$. **Molární tepelná kapacita** je $C_\mathrm{m} = Mc = \dfrac{m}{n}c$.

M molární hmotnost
n látkové množství

$[M] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$, $[\mathrm{n}] = \mathrm{mol}$, $[C_m] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

Proto $\mathrm{d}Q = nC_\mathrm{m}\mathrm{d}T$.

Kalorimetrická rovnice charakterizuje tepelnou výměnu mezi tělesy izolovanými od okolí. Je důsledkem zákona zachování energie. Mějme dvě tělesa, která jsou izolována od okolí, chemicky na sebe nepůsobí a nedochází ke změnám skupenství. Nechť má první těleso hmotnost m_1, jeho materiál měrnou tepelnou kapacitu c_1 a teplotu t_1, druhé těleso m_2, c_2 a t_2, kde $t_2 > t_1$. Teplo odevzdané teplejším tělesem je rovno teplu přijatému tělesem chladnějším. Teplota obou těles se vyrovná a dosáhne hodnotu t.

$$m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t)$$

Pro větší počet těles:

$$m_1c_1(t_1 - t) + m_2c_2(t_2 - t) + m_3c_3(t_3 - t) + \ldots = 0$$

Skupenská tepla

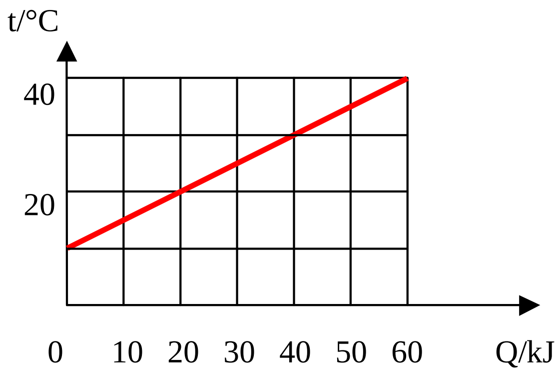
Jestliže přijme resp. odevzdá pevná látka nebo kapalina teplo, obvykle roste teplota látky. Výjimkou je změna skupenství. Látky chemicky nejednotné (amorfní) nemají určitou teplotu tání (např. sklo měkne v rozmezí teplot 500 °C až 1000 °C). Teplota tání a tuhnutí téže látky je stejná, probíhá-li změna skupenství za stejného tlaku. Teplo L_t, které přijme chemicky čistá pevná látka na roztavení, se nazývá **skupenské teplo tání**. Podíl **skupenského tepla tání** a hmotnosti látky je **měrné skupenské teplo tání** l_t:

$$l_\mathrm{t} = \frac{L_\mathrm{t}}{\mathrm{m}}$$

Obdobně se definují **skupenská tepla** resp. **měrná skupenská tepla tuhnutí**, **vypařování** (L_v resp. l_v) **a kondenzační**.

BTO 2.3.-12

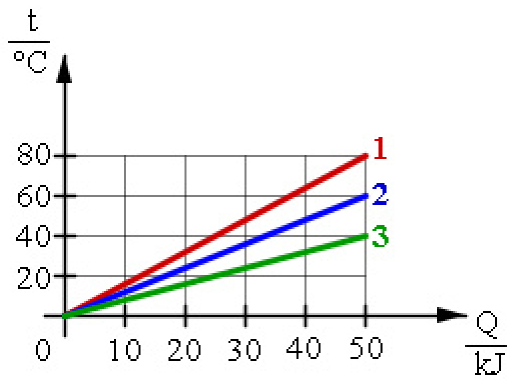
Na obrázku O 2.3.-1 je nakreslen graf vyjadřující vývoj teploty tělesa o hmotnosti 4 kg jako funkci tepla přijatého tělesem. a) Jaké teplo přijme těleso při ohřátí z 20 °C na 40 °C ? b) Jakou tepelnou kapacitu má těleso? c) Jakou měrnou tepelnou kapacitu má těleso?



O 2.3.-1

ZTO 2.3.-13

Na obrázku O 2.3.-2 jsou nakresleny grafy 1,2,3 vyjadřující změnu teploty tří těles jako funkci tepla přijatého těmito tělesy. a) Které z daných tří těles přijalo největší teplo? b) Které z daných tří těles má největší tepelnou kapacitu?



O 2.3.-2

ZTO 2.3.-14

Měrná tepelná kapacita c je číselně rovna teplu potřebnému k ohřátí

a) látky hmotnosti 1 kg o jeden stupeň
b) jednotkového množství látky
c) látky hmotnosti m o dT stupňů
d) látky hmotnosti 1 kg o dT stupňů
e) látky hmotnosti m o jeden stupeň

BTO 2.3.-15

Kolik tepla potřebujete k ohřátí 2 kg vody z 0 °C na 100 °C? Ztráty neuvažujte, měrná tepelná kapacita vody je $4{,}2 \cdot 10^3$ J·kg^{-1}·K^{-1}

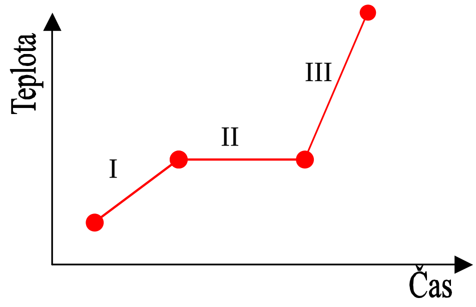
BTO 2.3.-16

Smícháme-li vodu o hmotnosti m_1, teploty t_1 s vodou hmotnosti m_2, teploty t_2, kde $t_2 > t_1$, jaká bude výsledná teplota vody?

BTO 2.3.-17

Uvažujte chemicky čistou, krystalickou a pevnou látku, kterou zahříváme tak, že látka přijímá za časovou jednotku stejné teplo. Která část grafu (O 2.3.-3) představuje skupenskou změnu pevné látky na kapalinu?

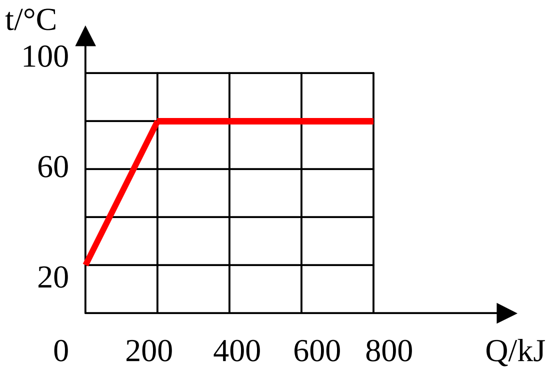
II



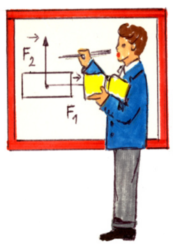
O 2.3.-3

BTO 2.3.-18

Kapalina o hmotnosti 2 kg je zahřívána na teplotu varu a při této teplotě se zcela vypaří. Na obrázku O 2.3.-4 je nakreslen graf vyjadřující změnu teploty jako funkci přijatého tepla. Jaké je skupenské teplo varu daného množství látky?



O 2.3.-4



ZŘU 2.3.-19

Voda má teplotu 30 °C. Ponoří se do ní teploměr, který po čase vytvoří s vodou soustavu o teplotě 29 °C. Teplota teploměru přitom stoupla o 10 °C. Stanovte tepelnou kapacitu teploměru.

$C = ?,\ t_\mathrm{v} = 30\ °\mathrm{C},\ t_\mathrm{t} = 29\ °\mathrm{C},\ V = 0{,}1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,\ \rho_\mathrm{v} = 998\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3},\ \Delta t_\mathrm{t} = 10\ °\mathrm{C},\ c = 4190\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$

Teplo $C\Delta t_\mathrm{t}$ přijaté teploměrem se rovná teplu $c\rho_\mathrm{v}V\left(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{t}\right)$, které odevzdala teploměru voda.

Proto $C = \dfrac{c\rho_\mathrm{v}V\left(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{t}\right)}{\Delta t_\mathrm{t}} = 41{,}8\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

$C = 41{,}8\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

BŘU 2.3.-20

Kus ledu o hmotnosti 250 g a teplotě -10 °C vložíme do směšovacího kalorimetru o tepelné kapacitě 3 100 J·K^{-1}, který obsahuje 900 g vody o teplotě 50 °C. a) Roztaje všechen led? b)

Určete výslednou teplotu v kalorimetru po vyrovnání teplot. c) Jakou teplotu by musela mít voda před vložením ledu, aby se roztopila právě polovina hmotnosti ledu? Tepelnou výměnu s okolím kalorimetru zanedbejte. Předpokládejte konstantní hodnoty měrného skupenského tepla tání ledu 333,7 $J\cdot g^{-1}$, měrné tepelné kapacity ledu 2090 $J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$ a měrné tepelné kapacity vody 4180 $J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$.
(a) Ano., (b) 32,18 °C, (c) 6,84 °C

$m_{\mathrm{L}} = 0,25$ kg, $t_{\mathrm{L}} = -10$ °C, C=3100 $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$, $m_{\mathrm{v}} = 0,9$ kg, $t_{\mathrm{v1}} = 50$ °C, $t = ?$, $t_{\mathrm{v2}} = ?$,
$l_{\mathrm{t}} = 3,337 \cdot 10^5\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, $c = 4\,180\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$, $c_{\mathrm{L}} = 2\,090\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

a) Maximální teplo, které může voda hmotnosti m_{v} odevzdat ledu, aniž by zmrzla, je $Q_{\mathrm{v,max}} = cm_{\mathrm{v}}t_{\mathrm{v1}} = 188\,100\ \mathrm{J}$. Teplo, jenž je schopen poskytnout kalorimetr na roztátí ledu, má hodnotu $Q_{\mathrm{K}} = Kt_{\mathrm{v1}} = 155\,000\ \mathrm{J}$, teplo potřebné ke zvýšení teploty ledu na bod tání $Q_{\mathrm{L}} = -c_{\mathrm{L}}m_{L}t_{L} = 5\,225\ \mathrm{J}$ a k roztátí ledu $Q_{\mathrm{L_t}} = m_{\mathrm{L}}l_{\mathrm{t}} = 83\,425\ \mathrm{J}$. Srovnejme $Q_{\mathrm{v,max}} + Q_{\mathrm{K}}$ s $Q_{\mathrm{L}} + Q_{\mathrm{L_t}}$. Protože $Q_{\mathrm{v,max}} + Q_{\mathrm{K}} > Q_{\mathrm{L}} + Q_{\mathrm{L_t}}$, všechen led roztaje.

b) Z kalorimetrické rovnice tvaru

$$-c_{\mathrm{L}}m_{\mathrm{L}}t_{\mathrm{L}} + l_{\mathrm{t}}m_{\mathrm{L}} + cm_{\mathrm{L}}t = C\left(t_{\mathrm{v1}} - t\right) + cm_{\mathrm{v}}\left(t_{\mathrm{v1}} - t\right)$$

vyjádříme hledanou teplotu t:

$$t = \frac{t_{\mathrm{v1}}\left(C + cm_{\mathrm{v}}\right) + c_{\mathrm{L}}m_{\mathrm{L}}t_{L} - l_{\mathrm{t}}m_{\mathrm{L}}}{C + c\left(m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{v}}\right)}$$
$$t = 32,18\ °\mathrm{C}$$

c) Opět vycházíme z kalorimetrické rovnice, tentokrát ve tvaru

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{L}}l_{\mathrm{t}} - c_{\mathrm{L}}m_{\mathrm{L}}t_{\mathrm{L}} = cm_{\mathrm{v}}t_{\mathrm{v2}} + Ct_{\mathrm{v2}}$$

Po úpravě dostaneme

$$t_{\mathrm{v2}} = \frac{m_{\mathrm{L}}\left(\frac{l_{\mathrm{t}}}{2} - c_{\mathrm{L}}t_{\mathrm{L}}\right)}{cm_{\mathrm{v}} + C}$$
$$t_{\mathrm{v2}} = 6,84\ °\mathrm{C}$$

ZLP 2.3.-21
Jak dlouho by svítila 100 W žárovka, pokud by beze zbytku spotřebovala nutriční energii 100 g medu, která činí 308 kcal? (1 cal = 4,186 J)
Nejdříve vypište zkrácené zadání.

P = 100 W, E = 308 kcal = 1 289 288 J, τ = ?

Hledanou dobu vyjádřete z definičního vztahu pro výkon.

$$P = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{E}{P}$$

$$\tau = 12\ 892{,}88\ \mathrm{s}$$

Výsledek vyjádřete v násobcích hodin, minut a sekund, nikoliv desetinným rozvojem.

$$\tau = 3\ \mathrm{h}\ 34\ \mathrm{min}\ 53\ \mathrm{s}$$

3 h 34 min 53 s

SHRNUTÍ

Molární tepelné kapacity plynů

Pro ideální plyn platí **Mayerův vztah**: $C_{\mathrm{mp}} - C_{\mathrm{mV}} = R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

R je molární plynová konstanta.

Poměr měrných nebo molárních tepelných kapacit při stálém tlaku a objemu je u ideálního plynu konstantní a roven **Poissonově konstantě** κ a je vždy větší než 1:

$$\kappa = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}} = \frac{C_{\mathrm{mp}}}{C_{\mathrm{mV}}} > 1$$

Na základě kinetické teorie ideálních plynů lze pro hodnoty molárních tepelných kapacit a Poissonových konstant dospět k závěrům:

$$C_{\mathrm{mV}} = \frac{i}{2}R,\ C_{\mathrm{mp}} = \frac{i+2}{2}R \Rightarrow \kappa = \frac{i+2}{i},$$

kde i je **počet stupňů volnosti** molekuly daného ideálního plynu. Tento počet stupňů volnosti je u jednoatomových plynů roven třem (κ = 1,66), u dvouatomových pěti (κ = 1,4) a u více než dvouatomových šesti (κ = 1,33).

Stavová rovnice ideálního plynu

Stav ideálního plynu je jednoznačně určen tlakem p, objemem V a teplotou T. Objem je vnějším parametrem jednoduché homogenní soustavy, kterou ideální plyn představuje, zbývající dvě stavové veličiny, tlak a teplota, jsou vnitřními parametry soustavy. Je-li látkové množství plynu n, platí:

$$pV = nRT$$

Často se látkové množství n nahrazuje podílem hmotnosti plynu m a jeho molární hmotnosti M

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

případně se v zápisu rovnice vyskytuje molární objem $V_{\mathrm{m}} = \frac{V}{n}$. Pak

$$pV_{\mathrm{m}} = RT.$$

Stavová rovnice ideálního plynu platí i pro plyny reálné za nízkého tlaku.

Stavová rovnice reálného plynu

Skutečné plyny jeví odchylky od zákonitostí ideálního plynu zejména při vysokých tlacích. Stavová rovnice reálného plynu zohledňuje vlastní objem molekul a existenci kohezního tlaku p_{m} reálného plynu. Existuje velké množství stavových rovnic reálného plynu, každá z nich se obvykle používá pro malý rozsah teplot a hustot. Příkladem rovnice se dvěma konstantami je van der Waalsova:

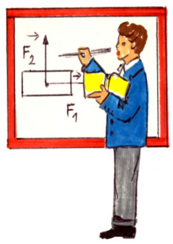
$$\left(p+\frac{n^2 a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT\ ,$$

kde a, b jsou konstanty, které se pro daný plyn určují experimentálně.
V následujících úlohách předpokládáme, že jsou plyny ideální.

ZU 2.3.-22
Určete vnitřní energii 2 molů a) jednoatomového a b) dvouatomového ideálního plynu při teplotě 250 K. Určete v obou případech molární tepelnou kapacitu při stálém objemu a tlaku.

ZTO 2.3.-23
Stavová rovnice ve tvaru $pV = RT$ platí pro
a) jeden kilogram plynu
b) jeden mol plynu
c) libovolné množství plynu

ZTO 2.3.-24
Uvažujte dva kilomoly CO_2 při teplotě 27 °C a tlaku $3\cdot 10^5$ Pa. Vypočítejte objem plynu.



BŘU 2.3.-25
Balon objemu 110 l je naplněn směsí 0,8 kg vodíku a 1,6 kg kyslíku. Určete tlak, kterým působí směs na stěny balonu. Teplota okolí je 27 °C.

V = 0,11 m^3, m_1 = 1,6 kg, m_2 = 0,8 kg, T = 300,15 K, $M(O_2)$ = 0,032 kg·mol^{-1}, $M(H_2)$ = 0,002 kg·mol^{-1}, p = ?

V balonu je $n_1=\dfrac{m_1}{M(O_2)}$ molů kyslíku a $n_2=\dfrac{m_2}{M(H_2)}$ molů vodíku. Stavové rovnice dvou plynů jsou postupně

$$\frac{p_1V}{T}=n_1\frac{p_0V_0}{T_0}$$
$$\frac{p_2V}{T}=n_2\frac{p_0V_0}{T_0}$$

Indexy 0 označují normální stav. Tlak směsi na stěny balonu je roven součtu parciálních tlaků:

$$p=p_1+p_2=\frac{p_0V_0T}{T_0V}(n_1+n_2)$$

$$p\cong 1\cdot 10^7\ \text{Pa}$$

ZLP 2.3.-26

Jakou hmotnost má $8\cdot10^{26}$ atomů vápníku? Kolikrát by obtočila Zemi kolem rovníku řada k sobě přiléhajících pingpongových míčků, z nichž každý má průměr 40 mm, kdyby jich bylo přesně $8\cdot10^{26}$? Relativní atomová hmotnost vápníku je 40,08, rovníkový poloměr Země 6 378 km.

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

A_r = 40,08, $N = 8\cdot10^{26}$, $N_A = 6{,}022\cdot10^{23}$ mol^{-1}, M = 0,04008 kg·mol^{-1}, d = 0,04 m, R_Z = 6 378 km, m = ?, x = ?

Známe počet částic a Avogadrovu konstantu. Pomocí nich vyjádřete látkové množství.

$$n=\frac{N}{N_A}$$

Napište definiční vztah molární hmotnosti.

$$M=\frac{m}{n}$$

Řešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Získáte hmotnost.

$$m=M\,\frac{N}{N_\mathrm{A}}$$

$$m=53{,}24\ \mathrm{kg}$$

Abyste získali x, vydělte délku řetězce molekul obvodem rovníku.

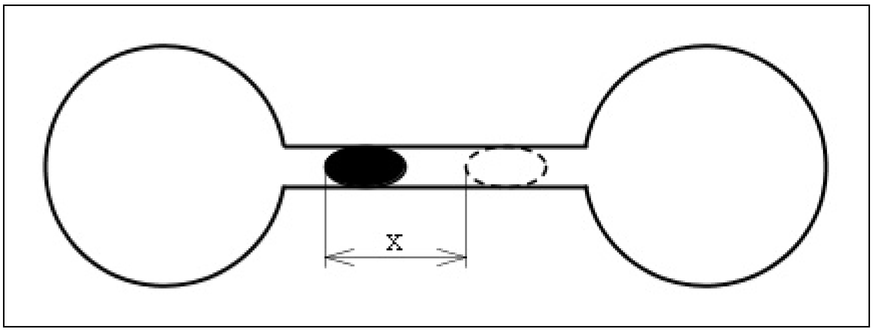
$$x=\frac{Nd}{2\pi R_Z}$$

$$x=7{,}985\cdot10^{17}$$

53,24 kg; $7{,}985\cdot10^{17}$

BLP 2.3.-27

Dvě stejné láhve jsou naplněny ideálním plynem o teplotě 0 °C a spojeny úzkou vodorovnou trubicí kruhového průřezu o průměru 5 mm, v jejímž středu je kapka rtuti (O 2.3.-5). Kapka dělí nádobu na dvě poloviny se stejným objemem 200 cm^3. O jakou vzdálenost x se posune kapka rtuti, vzroste-li teplota plynu v jedné láhvi o 2 °C a klesne-li ve druhé také o 2 °C? Zanedbejte změnu objemu nádob.



O 2.3.-5

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

$V_0 = 2\cdot10^{-4}$ m^3, T_0 = 273,15 K, d = 0,005 m, ΔT = 2 K, x = ?

Stav plynu v 1. nádobě je po zahřátí určen hodnotami stavových veličin p_1, V_1 a T_1 , ve 2. nádobě po ochlazení hodnotami p_2, V_2 a T_2 , původní stav v obou nádobách veličinami p_0, V_0 a T_0. Porovnejte společné výrazy ve stavových rovnicích pro tyto tři stavy.

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}=\frac{p_0V_0}{T_0}$$

Kapka se bude posouvat tak dlouho, dokud se nevyrovnají tlaky p_1 a p_2 , což znamená, že pak bude:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$$

Rozepište objemy V_1 a V_2 pomocí posunutí kapky rtuti a teploty T_1 a T_2 pomocí teplotní změny.

$$\frac{V_0+xS}{V_0-xS}=\frac{T_0+\Delta T}{T_0-\Delta T}$$

Vyjádřete x.

$$x=\frac{V_0\Delta T}{ST_0}$$

Dosaďte vzorec pro obsah průřezu trubice (kruhu).

$$x=\frac{4V_0\Delta T}{\pi d^2T_0}$$

$$x=0{,}0746\ \mathrm{m}=7{,}46\ \mathrm{cm}$$

7,46 cm

ZU 2.3.-28

Jaký tlak bude mít 50 g dusíku při teplotě 27 °C a objemu 850 ml podle stavové rovnice ideálního plynu? Molární plynová konstanta R = 8,315 J·mol^{-1}·K^{-1} a molární hmotnost dusíku M = 0,028 kg·mol^{-1}.

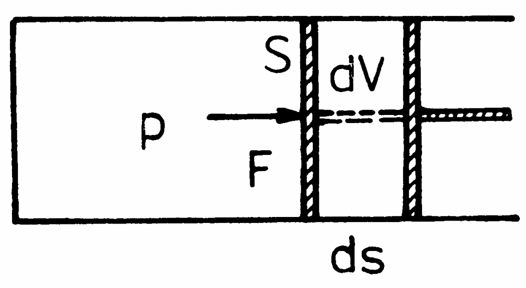
BU 2.3.-29

Odhadněte rozdíl hmotnosti vzduchu v nevytápěném sále o objemu 50 m^3 v letním a zimním období, jestliže budeme předpokládat letní teplotu 30 °C a zimní 0 °C. Tlak vzduchu bude normální, tj. 1,01325·10^5 Pa.

2.4. Termodynamika

SHRNUTÍ

Práce plynu:



O 2.4.-1

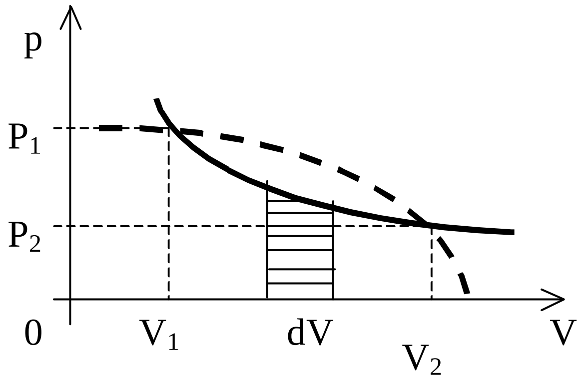
Plyn působí kolmo na píst silou o velikosti *F*. V důsledku silového působení dojde k přemístění pístu o $\mathrm{d}s$ (O 2.4.-1). Síla přitom vykonala elementární práci

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}s = pS\mathrm{d}s = p\mathrm{d}V$$

Celková práce vykonaná při změně objemu z V_1 na V_2:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

Práci plynu lze názorně vyjádřit tzv. **pracovním diagramem** (p-V diagram – O 2.4.-2):



O 2.4.-2

Práce je číselně rovna obsahu plochy pod příslušným úsekem křivky závislosti $p = \mathrm{f}(V)$ v p-V diagramu.

Z pracovního diagramu je zřejmé, že práce je kromě závislosti na počátečním a konečném stavu soustavy závislá také na průběhu stavové změny.

Vnitřní energie soustavy U je souhrn kinetických a potenciálních energií atomů či molekul soustavy.

První termodynamický zákon

První termodynamický zákon (1.TZ) vyjadřuje princip zachování energie pro makroskopické soustavy. V úlohách bude soustavou ideální plyn uzavřený pístem v nádobě.

1.TZ: Teplo *Q* dodané soustavě se spotřebuje na přírůstek vnitřní energie soustavy ΔU a na práci *A*, kterou plyn vykoná na okolí.

$$Q = \Delta U + A$$

Znaménková konvence:

$Q > 0$	Soustava přijímá teplo.
$Q < 0$	Soustava odevzdává teplo okolí.
$A > 0$	Soustava koná práci na okolí (roste objem soustavy).
$A < 0$	Soustava práci spotřebovává (klesá objem soustavy).
$\Delta U > 0$	Roste vnitřní energie soustavy (roste teplota v soustavě).
$\Delta U < 0$	Klesá vnitřní energie soustavy (klesá teplota v soustavě).

Diferenciální tvar 1.TZ:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A$$

Podle kinetické teorie vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na teplotě:

$$U = n\frac{i}{2}RT = nC_{\mathrm{mV}}T \Rightarrow \mathrm{d}U = nC_{\mathrm{mV}}\mathrm{d}T$$

Získáme tak 1.TZ ve tvaru, který se často pro ideální plyny používá:

$$\mathrm{d}Q = nC_{\mathrm{mV}}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$$

ZTO 2.4.-1

První termodynamický zákon ve tvaru dQ = C_{mV} dT + pdV platí

a) obecně, tj. pro libovolné množství plynu.
b) pouze pro 1 kg plynu.
c) pouze pro 1 mol plynu.

BTO 2.4.-2

První termodynamický zákon lze pro jeden kilogram plynu psát ve tvaru:

a) $dQ = (C_{mp} + C_{mV})\, dT + p dV$
b) $dQ = C_{mp} dT + p dV$
c) $dQ = (C_{mp} - R)\, dT + p dV$
d) $dQ = C_v dT + p dV$
e) $dQ = c_{mV}\, dT + p dV$

ZTO 2.4.-3

Označte jednotku tepla.

a) $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
b) $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
c) $J \cdot kg \cdot K$
d) $J \cdot mol \cdot K$
e) J

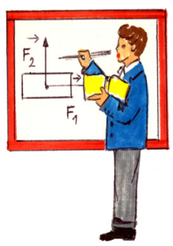
BTO 2.4.-4

Infinitezimální (nekonečně malá) změna vnitřní energie jednoho molu ideálního plynu, tj. dU, se rovná:

a) $c_V dT$
b) $C_{mV}\, dT$
c) $p dV + R dT$
d) $C_{mp} \dfrac{dT}{\kappa}$
e) $C_{mp}\, dT$

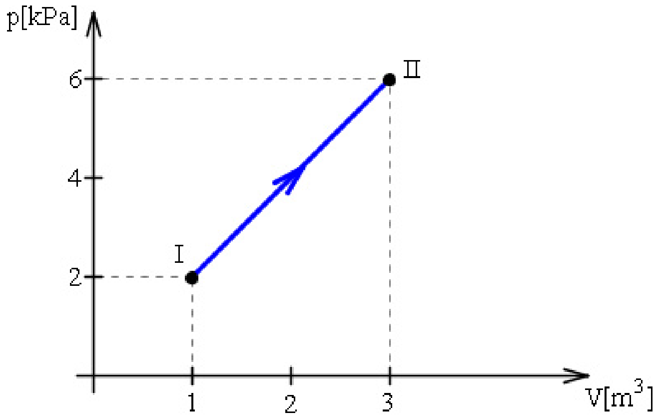
ZTO 2.4.-5

Plyn, jehož molární tepelná kapacita při stálém objemu je C_{mV}, zahřejeme z 0 ºC na 100 ºC. Vypočítejte změnu vnitřní energie jednoho kilomolu plynu. $U_2 - U_1 =$



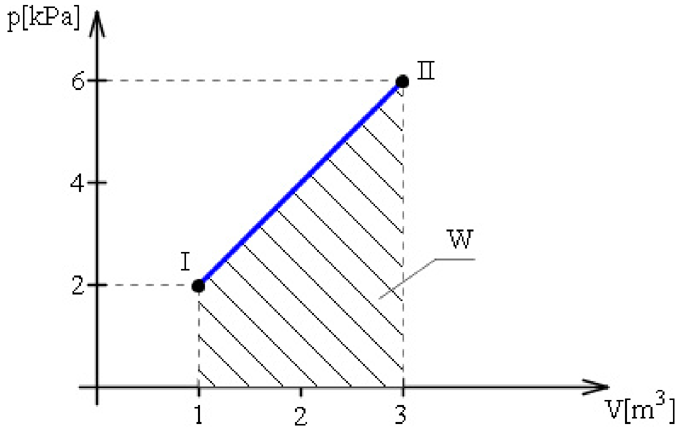
ZŘU 2.4.-6

Ideální plyn expandoval mezi stavy I a II (O 2.4.-3). Stavu I příslušela teplota 45°C. a) Jakého počtu molů plynu se p-V diagram týká? b) Jakou práci během expanze plyn vykonal? c) Určete teplotu plynu ve stavu II.



O 2.4.-3

t_1 = 45 °C, T_1 = 318,15 K, R = 8,315 J·K^{-1}·mol^{-1}, n = ?, A = ?, T_2 = ?



O 2.4.-4

Z O 2.4.-4 vyčteme, že $p_1 = 2{\cdot}10^3$ Pa, $p_2 = 6{\cdot}10^3$ Pa, $V_1 = 1$ m^3, $V_2 = 3$ m^3.

a) Stavová rovnice ideálního plynu platí například i pro stav I, takže:

$$p_1V_1 = nRT_1$$

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1}$$

$$n = 0{,}76 \text{ mol}$$

b) Z geometrické interpretace určitého integrálu $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$ plyne, že práci mohu vyjádřit v našem případě jako součet obsahu obdélníku a pravoúhlého trojúhelníku:

$$A = p_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_2 + p_1)$$

$$A = 8 \text{ kJ}$$

c) Stačí napsat stavovou rovnici ideálního plynu pro stav II a vyjádřit neznámou:

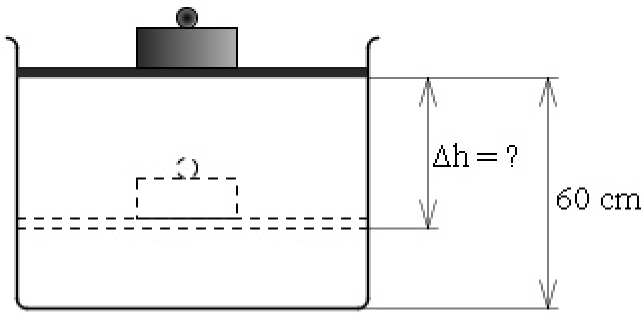
$$p_2V_2 = nRT_2$$

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR}$$

$$T_2 = 2\ 848\ \text{K}$$

BU 2.4.-7

V nádobě tvaru válce s podstavou o obsahu 100 cm^2 se nachází vzduch o teplotě 12 °C. Nádoba stojí na vodorovné podložce. Atmosférický tlak je 101 kPa. 60 cm nad podstavou je píst. Vypočtěte posunutí pístu, jestliže na něj položíme závaží o hmotnosti 100 kg a teplota plynu přitom vzroste na 27 °C (O 2.4.-5)? Zanedbejte tření pístu o nádobu a hmotnost pístu.



O 2.4.-5

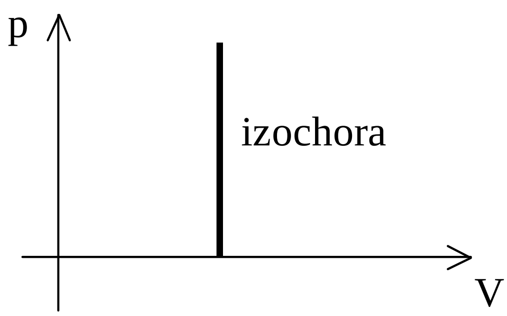
SHRNUTÍ

Izochorický děj

$n = \text{konst.},\ V = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}V = 0$

Ze stavové rovnice $pV = nRT$ plyne: $\dfrac{p}{T} = \text{konst.}$ (Charlesův zákon)

Pracovní diagram (O 2.4.-6):



O 2.4.-6

Plyn nekoná práci, neboť nemění objem. Znamená to, že $\mathrm{d}A = 0$. S přihlédnutím k 1.TZ se teplo dodané plynu spotřebuje výhradně na zvýšení vnitřní energie plynu:

$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U$

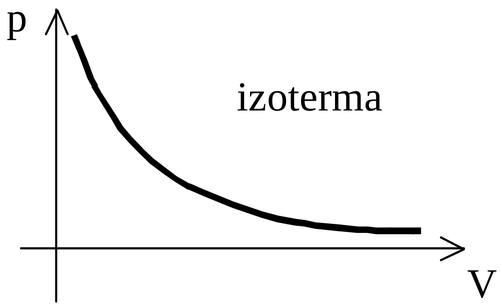
$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_{\mathrm{mV}} \left(T_2 - T_1\right)$$

Izotermický děj

$n = \text{konst.}, T = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}T = 0$

Ze stavové rovnice dostaneme: $pV = \text{konst.}$ (Boylův – Mariotteův zákon)

Pracovní diagram (O 2.4.-7):



O 2.4.-7

Vnitřní energie plynu se nemění, neboť $\mathrm{d}U = C_{\mathrm{mV}} \mathrm{d}T = 0$.

Teplo dodané plynu se spotřebuje jen na práci, kterou plyn vykoná. Podle 1.TZ:

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p \,\mathrm{d}V, \quad \text{kde} \quad p = \frac{nRT}{V}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT \left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

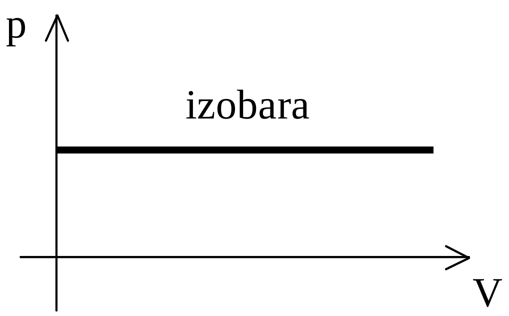
resp. dle stavové rovnice $A = nRT \ln \dfrac{p_1}{p_2}$

Izobarický děj

$n = \text{konst.}, p = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = 0$

Ze stavové rovnice plyne: $\dfrac{V}{T} = \text{konst.}$ (Gay – Lussacův zákon)

Pracovní diagram (O 2.4.-8):



O 2.4.-8

Práce plynu je: $A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p\int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = p\left(V_2 - V_1\right)$

1.TZ: $Q = \Delta U + A = nC_{\mathrm{mV}}\left(T_2 - T_1\right) + p\left(V_2 - V_1\right)$

Odečteme stavové rovnice pro stavy 1 a 2:

$p\left(V_2 - V_1\right) = nR\left(T_2 - T_1\right)$

Pro teplo dostaneme:

$$Q = n\left(C_{\mathrm{mV}} + R\right)\left(T_2 - T_1\right) = nC_{\mathrm{mp}}\left(T_2 - T_1\right)$$

BTO 2.4.-8

Plyn izochoricky zahříváme tak, že se tlak zdvojnásobí. Určete práci, kterou plyn vykoná.

ZTO 2.4.-9

V plynu probíhá izochorická změna. Mění se přitom:

a) teplota
b) tlak
c) objem
d) současně teplota, tlak i objem

BLP 2.4.-10

Jak velké teplo je nutno dodat CO_2, který je v nádrži objemu 0,8 m^3, aby jeho tlak vzrostl z $p_1 = 1\cdot10^5$ Pa na $p_2 = 5\cdot10^5$ Pa? Jak velká je změna vnitřní energie plynu?

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

$p_1 = 10^5$ Pa, $p_2 = 5\cdot10^5$ Pa, $V = 0{,}8$ m^3, $C_{\mathrm{mV}} = 3R$, $Q = ?$, $\Delta U = ?$

Vyjádřete změnu vnitřní energie n-molů ideálního plynu pomocí teplotního rozdílu.

$\Delta U = nC_{\mathrm{mV}}\Delta T = nC_{\mathrm{mV}}\left(T_2 - T_1\right)$

Formulujte stavovou rovnici pro stav 1 a vyjádřete látkové množství.

$$p_1V = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{p_1V}{RT_1}$$

Porovnejte společné výrazy ve stavových rovnicích pro stavy 1 a 2, abyste získali T_2.

$$\frac{p_1V}{T_1} = \frac{p_2V}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1$$

Látkové množství a teplotu příslušející druhému stavu dosaďte do vzorce pro změnu vnitřní energie.

$$\Delta U = \frac{p_1V}{T_1R}C_{\mathrm{mV}}\left(\frac{p_2}{p_1}T_1 - T_1\right) = \frac{p_1V}{R}C_{\mathrm{mV}}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$$

Dosaďte číselné hodnoty a přihlédněte ke skutečnosti, že se při izochorickém ději nekoná práce.

$\Delta U = Q = 10{,}5\cdot10^5\,\mathrm{J}$

$\Delta U = Q = 10{,}5\cdot10^5$ J

BU 2.4.-11

Nádrž objemu 0,015 m^3 obsahuje dvouatomový plyn ve stavu s tlakem $2 \cdot 10^5$ Pa a teplotou 30°C. Plynu se dodá $16{,}8 \cdot 10^3$ J tepla. Vypočtěte výsledný tlak a teplotu.

ZU 2.4.-12

V uzavřené nádobě o objemu 2 l je dusík o hustotě 1,4 $kg \cdot m^{-3}$. Jaké teplo přijme dusík, jestliže se jeho teplota zvýší o 100°C při stálém objemu? Měrná tepelná kapacita dusíku při stálém objemu je 739 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

ZU 2.4.-13

Jak se změní vnitřní energie kyslíku o hmotnosti 500 g, zvýší-li se jeho teplota z 10°C na 60°C? Měrná tepelná kapacita kyslíku při stálém objemu je 651 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$. Objem kyslíku se nemění.

ZTO 2.4.-14

V termodynamické soustavě probíhá izotermická změna. V tomto systému se mění:

a) teplota
b) tlak
c) objem
d) současně teplota, tlak i objem

ZTO 2.4.-15

Graf závislosti tlaku na objemu pro izotermický děj s ideálním plynem neměnného látkového množství je

a) polopřímka.
b) jedna větev rovnoosé hyperboly.
c) dvě větve rovnoosé hyperboly.
d) parabola.

BTO 2.4.-16

Expanzí plynu z objemu V_1 na objem V_2 při konstantní teplotě 127 °C byla vykonána práce A_1. Provedeme-li tutéž expanzi při teplotě 527 °C, bude práce $A_2 = xA_1$. Stanovte x.

BTO 2.4.-17

Izotermické stlačení probíhá jen tehdy,

a) je-li děj dostatečně pomalý, aby mohlo dojít k vyrovnání teplot s okolím.
b) je-li děj dostatečně rychlý, aby nemohlo dojít k vyrovnání teplot s okolím.

BŘU 2.4.-18

Ideální plyn izotermicky expanduje ze stavu 1 do stavu 2.

$p_1 = 4 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 3$ m^3

$p_2 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $V_2 = 6$ m^3

Vypočítejte práci, kterou plyn vykoná.

$A = 8{,}32 \cdot 10^5$ J

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$A = 8,32 \cdot 10^5 \,\mathrm{J}$

BŘU 2.4.-19

Tlak 0,1 kg vzduchu, jehož stavové změny se řídí stavovou rovnicí ideálního plynu, klesne na 1/8 původní hodnoty. Vypočtěte práci vykonanou vzduchem, jestliže v něm byla udržována konstantní teplota 50°C. Předpokládejte molární hmotnost vzduchu M = 0,029 kg·mol^{-1}.

Pro práci jistě platí $A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V$, kde V_1 a V_2 označují v tomto pořadí počáteční a koncový objem. Protože ve stavech 1 a 2 nejsme podle zadání objemy vzduchu schopni vypočítat, využijeme diferencování stavové rovnice ideálního plynu $pV = nRT$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{pV}) = \mathrm{d}(\mathrm{nRT}) = nR\mathrm{d}T = 0$$

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0$$

Práci přepišme jako integrál, který lze řešit takto:

$$A = -\int_{p_1}^{p_2} V \mathrm{d}p = -nRT \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln 8 \quad .$$

$A = 1,93 \cdot 10^4 \,\mathrm{J}$

BŘU 2.4.-20

Odhadněte v kilogramech množství chladicí vody pro udržení konstantní teploty 2 kg kyslíku při stálé teplotě 150°C, dojde-li k nárůstu tlaku z 10^5 Pa na $15 \cdot 10^5$ Pa. Vstupní teplota vody do chladiče je 15°C, výstupní teplota 40°C. Měrná tepelná kapacita vody je 4180 J·kg^{-1}·K^{-1}, molární plynová konstanta 8,315 J·K^{-1}·mol^{-1}, molární hmotnost kyslíku 0,032 kg·mol^{-1}. Tepelné ztráty zanedbejte.

První termodynamický zákon se v případě izotermického děje zjednoduší na vztah:

$$Q = A$$

Pro práci plynu platí:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V$$

Diferencujme stavovou rovnici ideálního plynu:

$$\mathrm{d}(\mathrm{pV}) = \mathrm{d}(\mathrm{nRT}) = nR\mathrm{d}T = 0$$

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0 \Rightarrow p\mathrm{d}V = -V\mathrm{d}p$$

Využili jsme skutečnost, že je T konstantní, tudíž dT = 0.

Vyjádřeme teplo tak, aby horní a dolní mez v integrálu byly známé veličiny – zde tlaky:

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = -\int_{p_1}^{p_2} V \mathrm{d}p$$

Aby v zápisu integrálu byla pouze jediná proměnná veličina, užijme stavovou rovnici k nahrazení objemu podílem

$$V = \frac{nRT}{p}$$

a řešme integrál:

$$Q = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{nRT}{p} \mathrm{d}p = -nRT \ln \frac{p_2}{p_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Neboť tepelné ztráty zanedbáváme, odevzdává plyn teplo pouze vodě. Pro teplo přijaté vodou o měrné tepelné kapacitě c platí:

$$Q_{\text{voda}} = cm_{\text{v}} \Delta t$$

Z rovnosti $Q = Q_{\text{voda}}$ konečně dostaneme řešení:

$$m_{\text{voda}} = \frac{mRT}{Mc\Delta T_{\text{vody}}} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$m_{\text{voda}} = 1{,}9 \text{ kg}$$

BLP 2.4.-21

Plynu objemu 0,1 m^3 a tlaku 10^6 Pa se při stálé teplotě t = 200 °C dodá 125,6 kJ tepla. Vypočítejte konečný tlak, objem plynu a práci, kterou plyn vykoná.

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

$\kappa = 1{,}3$; $c_p = 837{,}36 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; t = 200 °C; T = 473,15 K; Q = 125,6 kJ; $p_1 = 10^6$ Pa; V_1 = 0,1 m^3; p_2 = ?; V_2 = ?; A = ?

Protože se nemění teplota plynu a díky tomu zůstává konstantní vnitřní energie plynu, přejde 1. termodynamický zákon do tvaru:

$$Q = A$$

Vyjádřete práci při izotermickém ději, použijte přitom formulaci stavové rovnice pro stav 1.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q$$

Vypočtěte V_2.

$$V_2 = V_1 e^{\frac{Q}{p_1 V_1}}$$

$$V_2 = 0{,}35 \text{ m}^3$$

Z porovnání stavových rovnic pro stavy 1 a 2 vypočtěte p_2:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$$

$$p_2 = 2{,}85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

V_2 = 0,35 m^3, $p_2 = 2{,}85\cdot10^5$ Pa, $A = Q$

BU 2.4.-22

Jakou práci vykoná ideální plyn při izotermické expanzi na 70 l, jestliže jeho počáteční objem je 50 l a tlak $2\cdot10^5$ Pa ? Přijal nebo odevzdal plyn teplo okolí?

BU 2.4.-23

2 m^3 ideálního plynu počátečního tlaku $3\cdot10^5$ Pa izotermicky expanduje na dvojnásobný objem. Vypočtěte výsledný tlak, práci, kterou plyn vykoná a množství přivedeného tepla.

ZU 2.4.-24

Vypočtěte práci, kterou musíme vykonat, abychom izotermicky stlačili kyslík z objemu 30 l na objem 19,9 l. Na počátku byl jeho tlak 1010 hPa a teplota 10°C.

$A = -A_{\text{plynu}} = 1243\ \text{J}$

BTO 2.4.-25

V termodynamické soustavě probíhá izobarická změna. V tomto systému se mění:

a) teplota
b) tlak
c) objem
d) současně teplota, tlak i objem

ZTO 2.4.-26

Při 0 °C zaujímá plyn objem V_0. Při jaké teplotě T zaujme plyn 2/3 původního objemu za předpokladu izobarické změny?

ZTO 2.4.-27

Grafem závislosti objemu na teplotě při izotermickém ději neměnného látkového množství s ideálním plynem je

a) polopřímka.
b) jedna větev rovnoosé hyperboly.
c) přímka.
d) parabola.

BTO 2.4.-28

Při izobarické změně provedené při tlaku p_1, vzrostl objem plynu z V_1 na V_2 a teplota vzrostla z T_1 na T_2. Jaký bude tlak plynu p_x, změní-li se dodatečně objem na původní hodnotu změnou izotermickou?

BLP 2.4.-29

Za normálního tlaku $p = 1{,}013\cdot10^5\,\text{Pa}$ měl plynný dusík N_2 o látkovém množství $n = 8$ mol teplotu t_1 = 30 °C. Teplota plynu byla při nezměněném tlaku zvýšena na t_2 = 190 °C. Určete změnu vnitřní energie, práci kterou plyn vykonal a teplo plynu dodané.

Nejdříve vypište zkrácené zadání:

$p = 1{,}013\cdot10^5\,\text{Pa}$, t_1 = 30 °C, $n = 8$ mol, t_2 = 190 °C, ΔU=?, A =?, Q =?

Dusík je plyn složený z dvouatomových molekul tzn.:

$$C_{\text{mV}} = \frac{5}{2}R\ .$$

Vypočítejte změnu vnitřní energie:

$$\Delta U = nC_{\text{mV}}\Delta T = n\frac{5}{2}R(t_2 - t_1)$$

$$\Delta U = 2{,}7\cdot10^4\ \text{J}$$

K výpočtu práce plynu použijte vzorec pro obsah plochy pod izobarou nebo vyřešte integrál $\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$:

$$A = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$$

$$A = 1 \cdot 10^4 \text{ J}$$

K výpočtu tepla, které bylo plynu dodáno, využijte 1.TZ:

$$Q = \Delta U + A = nC_{\mathrm{mp}}\Delta T = n\frac{7}{2}R(T_2 - T_1)$$

$$Q = 3{,}7 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$\Delta U = 2{,}7 \cdot 10^4$ J, $A = 1 \cdot 10^4$ J, $Q = 3{,}7 \cdot 10^4$ J

ZU 2.4.-30

Na jakou teplotu je třeba ohřát vzduch, aby se jeho objem zdvojnásobil, jestliže na počátku měl teplotu 20 °C ? Jedná se o děj izobarický.

ZU 2.4.-31

Do soustavy dodáme teplo při konstantním tlaku $p = 10^5$ Pa. Objem plynu se změní z $V_1 = 1$ m^3 na $V_2 = 10$ m^3. Určete velikost práce, kterou plyn vykoná..

ZU 2.4.-32

Ideální plyn o počáteční teplotě 290 K odevzdal při izobarickém ději s tlakem 15 kPa teplo 50 kJ a zmenšil objem z 5 m^3 na 2 m^3. a) Jaké teploty dosáhl plyn na konci děje? b) Vzrostla nebo poklesla vnitřní energie plynu? O jakou hodnotu?

ZU 2.4.-33

Při zahřívaní vodíku se zvýšila jeho teplota o 20 °C a objem se zdvojnásobil. Tlak se nezměnil. Určete původní teplotu plynu.

BU 2.4.-34

Dvouatomový plyn teploty $t_1 = 25$ °C, tlaku $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Pa a objemu $V_1 = 0{,}7$ m^3 se při stálém tlaku zahřeje na teplotu $t_2 = 175$ °C. Určete práci, kterou plyn vykoná, změnu jeho vnitřní energie a dodané teplo. ($C_{\mathrm{mV}} = 5/2$ R)

SHRNUTÍ

Adiabatický děj

Děj probíhající v soustavě dokonale tepelně izolované od okolí, tzn. $\mathrm{d}Q = 0$. Opět předpokládáme konstantní látkové množství.

Podle 1.TZ

$$\mathrm{d}A + \mathrm{d}U = 0 \Rightarrow A = -nC_{\mathrm{mV}}\Delta T$$

Mezi stavovými veličinami kromě stavové rovnice ideálního plynu platí vztahy:

$$pV^{\kappa} = \text{konst.}$$

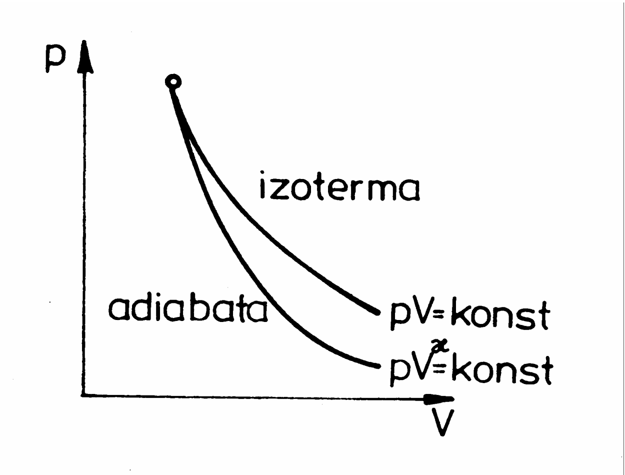
$$TV^{\kappa-1} = \text{konst.}$$

$$T^{\kappa}p^{1-\kappa} = \text{konst.}$$

Práce při adiabatickém ději:

$$A = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

Srovnání p-V diagramů izotermického a adiabatického děje (O 2.4.-9):



O 2.4.-9

BTO 2.4.-35

Probíhá-li v termodynamické soustavě adiabatický děj, mění se jeho:

a) tlak
b) objem
c) teplota

ZTO 2.4.-36

O adiabatickém ději lze pravdivě tvrdit, že:

a) teplota soustavy není konstantní.
b) práce soustavy vykonaná je rovna úbytku vnitřní energie soustavy.
c) teplota soustavy je konstantní a dodané teplo se spotřebuje výhradně na konání práce.
d) vnitřní energie soustavy zůstává konstantní.

BTO 2.4.-37

O adiabatické kompresi, případně expanzi plynu, hovoříme tehdy,

a) probíhá-li dostatečně pomalu, aby mohlo dojít k vyrovnání teploty plynu s okolím.
b) probíhá-li dostatečně rychle, aby nemohlo dojít k vyrovnání teploty plynu s okolím.

BTO 2.4.-38

Ideální plyn, jehož molární tepelná kapacita při stálém objemu je C_{mV}, adiabaticky expanduje tak, že jeho teplota klesne z T_1 na T_2. Plyn přitom vykoná práci A. Necháme-li tentýž plyn adiabaticky expandovat za poklesu teploty z T_1 na $2T_2$, plyn vykoná práci:

a) stejnou
b) poloviční
c) 2 krát menší
d) menší o $n\,C_{mV}\,T_2$
e) větší o $C_{mV}\,T_2$

BLP 2.4.-39

Vzduch hmotnosti m = 0,1 kg, tlaku $p_1 = 10^5$ Pa a teploty t_1 = 30 °C adiabaticky komprimujeme na tlak $p_2 = 10^6$ Pa. Vypočítejte teplotu T_2, práci, kterou vykonal, a změnu jeho vnitřní energie. Molární hmotnost vzduchu $M = 0{,}0289\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$.

Nejdříve vyjděte ze vztahu, kterým se řídí adiabatická změna:

$$p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa}$$

Matematickou úpravou osamostatněte podíl objemů:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

S využitím stavové rovnice vypočítejte teplotu T_2:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2T_1}{p_1}\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2T_1}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$T_2 = 585\ \mathrm{K}$

Práce je při adiabatickém ději konána na úkor zmenšení vnitřní energie plynu. Vyjádřete práci plynu pomocí látkového množství, rozdílu termodynamických teplot a univerzální plynové konstanty:

$$A = -nC_{\mathrm{mV}}\Delta T = -n\frac{5}{2}R(T_2 - T_1) = -\frac{m}{M}\frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$$

$A = -2{,}02 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$

Při adiabatickém ději $Q = 0\ \mathrm{J}$, proto z 1.TZ vyplývá, že:

$\Delta U = -A$

$\Delta U = 2{,}02 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$

ZU 2.4.-40

Plyn tlaku p_1 a objemu V_1 adiabaticky expanduje tak, že jeho tlak je p_2 a objem V_2. Napište, co platí pro poměr $p_2/p_1 =$

ZU 2.4.-41

Píst velmi rychle, proto lze předpokládat adiabaticky, stlačil kyslík na 1/50 původního objemu. Jaké teploty bylo dosaženo po stlačení, jestliže na jeho počátku měl vodík teplotu 20°C?

BU 2.4.-42

Ideální plyn expanduje ze stavu o tlaku $32 \cdot 10^5$ Pa, teplotě 350 K a objemu 1 l na objem 4 l. Jaké jsou výsledný tlak a teplota plynu a jakou práci vykoná plyn, je-li expanze a) adiabatická a plyn jednoatomový, b) adiabatická a plyn dvouatomový?

BU 2.4.-43

Odhadněte minimální výkon motoru kompresoru, který má za hodinu nasát 200 m^3 vzduchu a zvýšit jeho tlak z 10^5 Pa na $8 \cdot 10^5$ Pa. Komprese nechť je adiabatická. Použijte hodnotu Poissonovy konstanty 1,4.

BU 2.4.-44

Kompresní poměr $\frac{V_1}{V_2}$ naftového motoru je 20. Píst při kompresi stlačuje vzduch z původního tlaku 10^5 Pa a teploty 20°C. Určete výslednou teplotu a tlak vzduchu na konci komprese, jestliže stlačování je adiabatické. Použijte hodnotu Poissonovy konstanty 1,4.

SHRNUTÍ

Polytropický děj

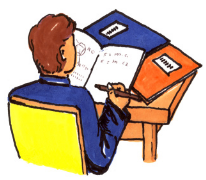
Pokud jde o přenos tepla mezi soustavou a okolím, existují dva v přírodě se nevyskytující extrémy: **dokonalá tepelná výměna**, která vyžaduje izotermický děj, a **dokonalá tepelná izolace**, charakterizující adiabatický děj. Ve skutečnosti expanze nebo komprese plynů probíhají podle křivek, jež leží mezi adiabatou a izotermou a nazývají se polytropy. Platí rovnice polytrop (stavová rovnice polytropického děje):

$pV^{\gamma} = \text{konst.},\ 1 < \gamma < \kappa,$

kde γ je polytropický exponent. Děj, který polytropě přísluší, se nazývá polytropický. Práci při ději polytropickém je možné vyjádřit vztahem:

$$A = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1V_1 - p_2V_2\right)$$

Další úlohy na děje v ideálních plynech



BTO 2.4.-45

Tvrzení dU = -pdV platí, když:

a) soustava je dokonale tepelně izolována.
b) v soustavě probíhá izotermická změna.
c) v soustavě probíhá izobarická změna.
d) v soustavě probíhá izochorická změna.
e) v soustavě probíhá adiabatická změna.

ZTO 2.4.-46

Plyn přechází ze stavu A do stavu B tak, že nekoná práci. V plynu probíhá děj ....

ZTO 2.4.-47

Plyn přechází ze stavu A do stavu B tak, že koná objemovou práci jen na úkor své vnitřní energie. V plynu probíhá děj ....

ZTO 2.4.-48

Plyn přechází ze stavu A do stavu B tak, že vnitřní energie plynu se nemění. V plynu probíhá děj ....

ZTO 2.4.-49

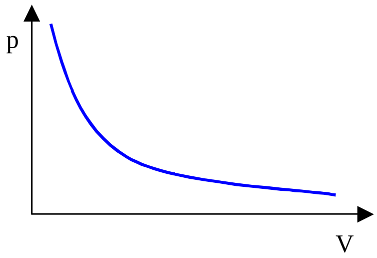
Veškeré teplo dodané plynu se projeví jako práce, kterou plyn vykoná. Toto tvrzení je správné, probíhá-li v plynu změna ......

BTO 2.4.-50

Plyn izotermicky expanduje z objemu V_1 na V_2 při teplotě T a vykoná práci A_1. Necháme-li plyn izotermicky expandovat při dvojnásobné teplotě za jinak stejných podmínek, jaká bude získaná práce?

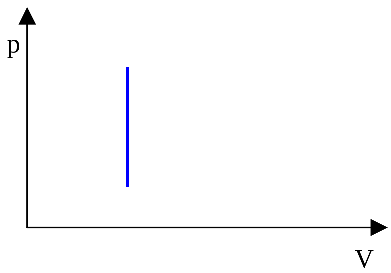
BTO 2.4.-51

Uvedený graf (O 2.4.-10) představuje závislost tlaku na objemu u děje ....



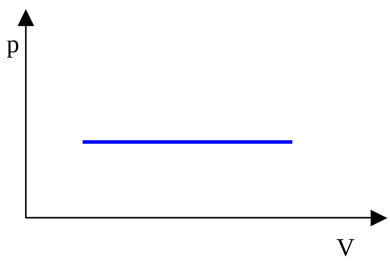
O 2.4.-10

ZTO 2.4.-53
Uvedený graf (O 2.4.-11) představuje závislost tlaku na objemu u děje ....



O 2.4.-11

ZTO 2.4.-54
Uvedený graf (O 2.4.-12)představuje závislost tlaku na objemu u děje ....

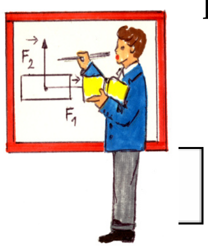


Obr. 2.4.-12

BTO 2.4.-55
Rovnice polytropy pV^{γ} = konst. přejde na rovnici adiabaty v případě, že polytropický exponent $\gamma=$

BTO 2.4.-56
Rovnice polytropy pV^{γ} = konst. přejde na rovnici izotermy v případě, že polytropický exponent $\gamma=$

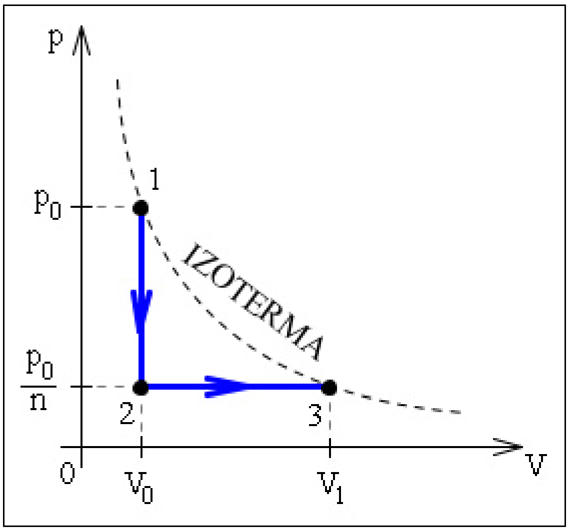
BTO 2.4.-57
Rovnice polytropy pV^{γ} = konst. přejde na rovnici izobary v případě, že exponent $\gamma=$



BŘU 2.4.-58

Ideální plyn o hmotnosti m a teplotě T_0 se izochoricky ochlazuje tak, že tlak klesne k-krát. Pak plyn expanduje izobaricky. Na konci děje má opět teplotu T_0. Jakou práci v průběhu děje plyn vykonal, známe-li také jeho molární hmotnost M ?

$$A = \frac{k-1}{k}\frac{m}{M}RT_0$$



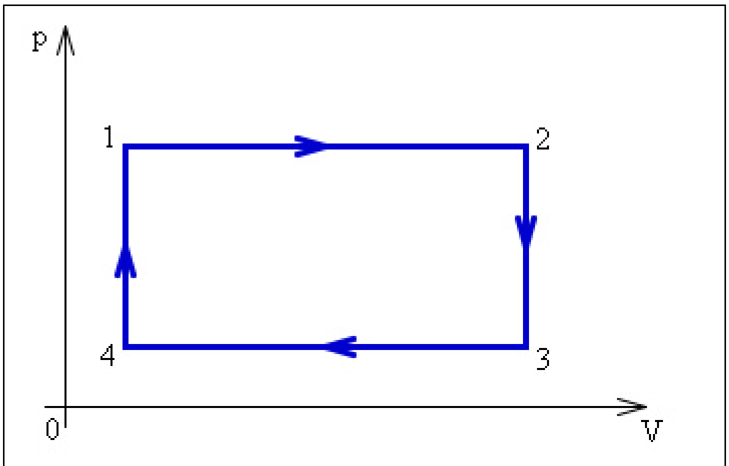
O 2.4.-13

Protože stavy 1 a 3 leží na jedné izotermě, $p_0V_0 = \frac{1}{k}p_0V$. Odtud $V_1 = kV_0$ a $\Delta V = V_1 - V_0 = (k-1)V_0$. Z obr. O 2.4.-13 je zřejmé, že plyn vykonal práci:

$$A = \frac{1}{k}p_0\Delta V = \frac{k-1}{k}p_0V_0 = \frac{k-1}{k}\frac{m}{M}RT_0$$

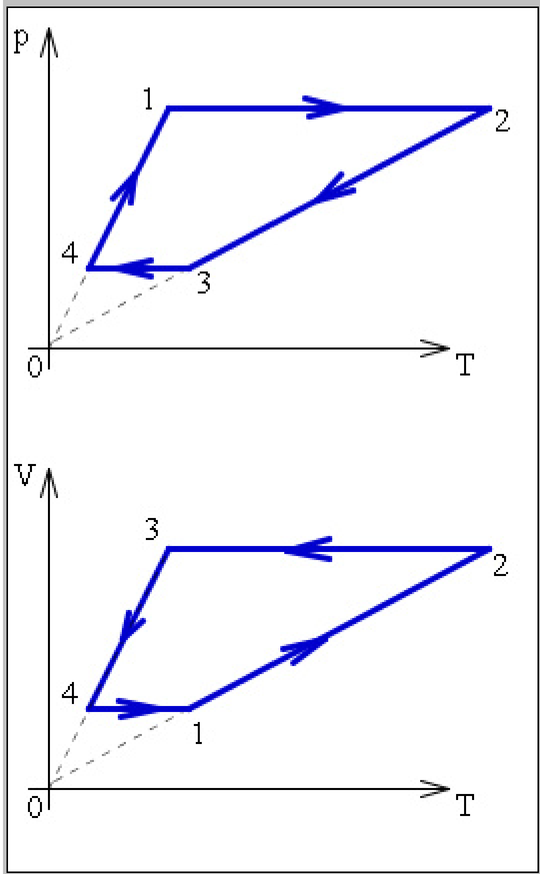
BLP 2.4.-59

O 2.4.-14 představuje kruhový děj v ideálním plynu. Tentýž děj znázorněte ve stavových diagramech p-T a V-T. Správně určete polohy stavů 1, 2, 3 a 4.



O 2.4.-14

Řešení plyne přímo ze stavové rovnice ideálního plynu.
Děje 2→3 a 4→1 jsou izochorické, vyjádřeme pro ně tlak v závislosti na teplotě: $pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} = \text{konst} \cdot T$ V p-T diagramu jsou proto izochory přímkami, které procházejí počátkem. Podobně lze dokázat, že izobary ve V-T diagramu jsou rovněž přímkami procházejícími počátkem.



O 2.4.-15

BLP 2.4.-60
Při polytropickém stlačení (γ=1,5) z objemu V_1 = 16 l na V_2 = 4 l došlo k ohřátí plynu z teploty T_1 = 300 K na teplotu T_2. Vypočítejte ji.

Nejdříve vypište zkrácené zadání.
V_1 = 16 l; V_2 = 4 l; γ =1,5; T_1 = 300 K; T_2 = ?
Srovnejte stavy 1 a 2 užitím rovnice, jejichž speciálním případem je rovnice Poissonova.

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$$

Vyjádřete podíl tlaků.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^{\gamma}}{V_1^{\gamma}}$$

Tentýž podíl získejte ze stavových rovnic pro stavy 1 a 2.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}$$

Podíly tlaků srovnejte a upravte tak, abyste vyjádřili hledanou teplotu.

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 . \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$T_2 = 600$ K

$T_2 = 600$ K

BLP 2.4.-61

Dodáním tepla plynu se docílilo toho, že jeho objem vzrostl 10krát a tlak klesl 8krát. Určete exponent polytropické změny γ.

Nejdříve vypište zkrácené zadání.

Z porovnání stavových rovnic polytropického děje vyjádřete podíl tlaků.

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^{\gamma}}{V_1^{\gamma}}$$

Podíl tlaků logaritmujte a vyjádřete hledaný exponent.

$$\ln\frac{p_1}{p_2} = \gamma \ln\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln\frac{p_1}{p_2}}{\ln\frac{V_2}{V_1}}$$

$$\gamma = \frac{\ln 8}{\ln 10} = 0,9$$

ZU 2.4.-62

Nakreslete p-V, p-T a V-T diagramy izotermického, izobarického a izochorického děje v ideálním plynu. Předpokládejte, že počáteční stav plynu ve všech případech je dán hodnotami: $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $T_0 = 220$ K, $V_0 = 2$ m^3.

SHRNUTÍ

Kruhové děje

Kruhový děj (KD) je taková posloupnost stavů soustavy (např. u tepelných strojů pracovní látky), po jejichž proběhnutí je konečný stav soustavy shodný s počátečním. Průběh KD se obvykle znázorňuje v p-V diagramu.

Tepelný stroj a motor, Carnotův kruhový děj

V **tepelném stroji** probíhá s **pracovní látkou** (např. voda, pára, palivová směs) kruhový děj za účelem trvalého konání práce tepelným strojem nebo trvalého odebírání tepla z chladícího prostoru. K tepelným strojům patří například: spalovací a parní turbíny, parní stroje, pístové spalovací motory, chladicí stroje, tepelná čerpadla.

Tepelný motor je cyklicky pracující stroj, který během jednoho kruhového děje odebírá teplo Q_1 z teplejší lázně, odevzdává teplo Q_2 chladnější lázni a koná práci A. Účinnost tepelného motoru je:

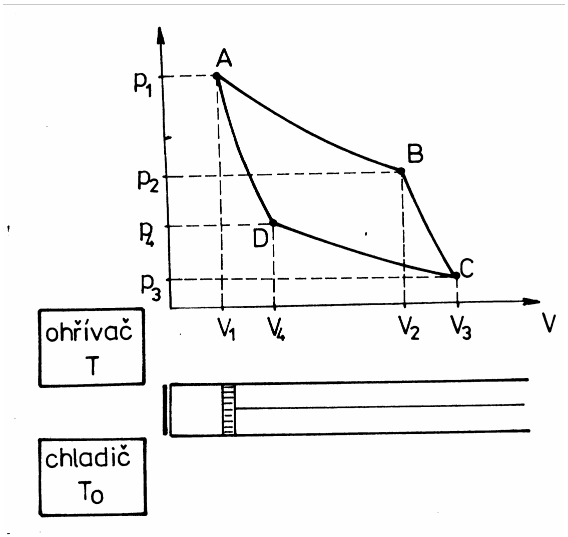
$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

V **Carnotově motoru** pracovní látka izotermicky a vratně expanduje (křivka A→B) při teplotě T_1, přijímá proto teplo Q_1 z ohřívače. Expanze se stává adiabatickou (křivka B→C), během ní teplota pracovní látky klesne na T_2. Následují izotermická komprese (křivka C→D) a adiabatická komprese (křivka D→A). Pracovní látka přitom koná práci během expanze, spotřebovává práci během komprese. Říkáme, že v Carnotově motoru probíhá Carnotův kruhový děj (O 2.4.-17).

Carnotův motor pracuje s účinností

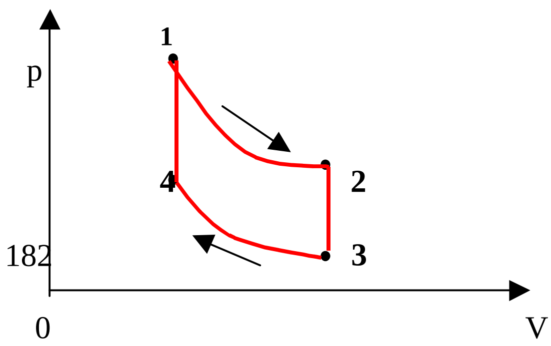
$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

která nezávisí na pracovní látce a je horní hranicí účinnosti tepelných strojů pracujících s ohřívačem o teplotě T_1 a chladičem o teplotě T_2.



O 2.4.-17

BTO 2.4.-63



Na obr. O 2.4.-18je kruhový děj probíhající v ideálním plynu, který se skládá ze dvou dějů izotermických a dvou izochorických. Doplňte slova přijímá, odevzdává, nevyměňuje tak, aby tvrzení o dějích byla pravdivá.

Děj 1→2 : plyn teplo............

Děj 2→3 : plyn teplo............

Děj 3→4 : plyn teplo............

Děj 4→1 : plyn teplo............

O 2.4.-18

BTO 2.4.-64

Na obrázku O 2.4.-18 je kruhový děj probíhající v ideálním plynu, který se skládá ze dvou procesů izotermických a dvou izochorických. Doplňte slova koná, spotřebovává, nekoná tak, aby tvrzení o dějích byla pravdivá.

Děj 1→2 : plyn práci............

Děj 2→3 : plyn práci............

Děj 3→4 : plyn práci............

Děj 4→1 : plyn práci............

BTO 2.4.-65

Na obrázku O 2.4.-18 je kruhový děj probíhající v ideálním plynu, který se skládá ze dvou dějů izotermických a dvou izochorických. Na následující otázky odpovídejte slovy: se němění, klesá, roste.

Jak se chová vnitřní energie plynu u jednotlivých dějů?

Děj 1→2 : vnitřní energie plynu..........

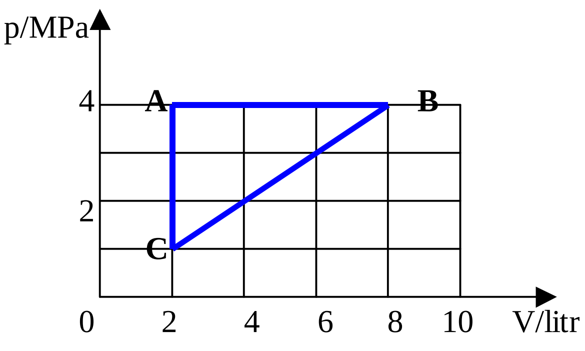
Děj 2→3 : vnitřní energie plynu..........

Děj 3→4 : vnitřní energie plynu..........

Děj 4→1 : vnitřní energie plynu..........

ZTO 2.4.-66

Na obrázku O 2.4.-19je nakreslen graf vratného kruhového děje s ideálním plynem v p-V diagramu. Sled dějů je ABCA. Jakou práci vykoná plyn při ději označeném úsečkou CA ?

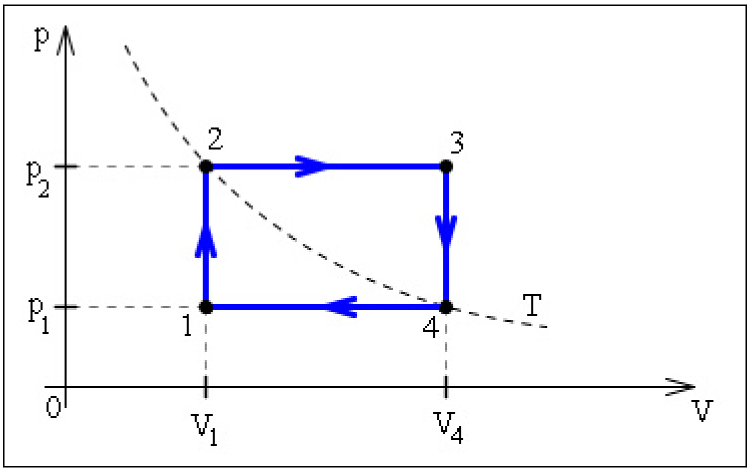


O 2.4.-19

BTO 2.4.-67 Na obrázku O 2.4.-19je nakreslen graf vratného kruhového děje s ideálním plynem v p-V diagramu. Sled dějů je ABCA. Jakou práci vykoná plyn při tomto kruhovém ději?

BŘU 2.4.-68

V ideálním plynu hmotnosti m a molární hmotnosti M probíhá kruhový cyklus 1→2→3→4→1 (O 2.4.-20). Plyn má ve stavech 1 a 3 teploty T_1 a T_3. Stavy 2 a 4 leží na jedné izotermě. Určete práci během cyklu plynem vykonanou.



O 2.4.-20

$$A=\frac{m}{M}R\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2$$

Stavové veličiny budeme indexovat čísly stavů. Neboť práce plynu je číselně rovna obsahu plochy omezené osou V, křivkou $p(V)$ a kolmicemi k ose V vedoucími počátečním a koncovými body křivky $p(V)$, a podle znaménkové konvence expanzi plynu přísluší kladná práce, kompresi záporná, platí podle obrázku O 2.4.-20 pro práci:

$$A=(p_2-p_1)(V_4-V_1)=p_2V_4-p_2V_1-p_1V_4+p_1V_1$$

Upravme užitím stavové rovnice ideálního plynu do tvaru:

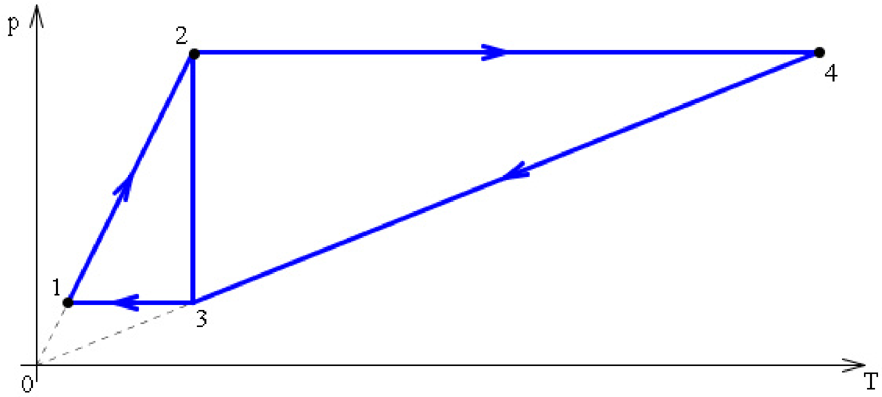
$$A=\frac{m}{M}R(T_3-2T+T_1),$$

kde $T_2=T_4=T$. Jelikož podíl stavových rovnic pro stavy 4 a 3 je $\frac{p_4V_4}{p_3V_3}=\frac{p_4}{p_3}=\frac{T}{T_3}$, pro stavy 4 a 1 $\frac{p_4V_4}{p_1V_1}=\frac{V_4}{V_1}=\frac{T}{T_1}$ a navíc $p_4V_4=p_3V_1$, lze psát $\frac{T}{T_3}=\frac{T_1}{T}$. Pro práci to znamená:

$$A=\frac{m}{M}R\left(T_3-2\sqrt{T_1T_3}+T_1\right)=\frac{m}{M}R\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_3}\right)^2$$

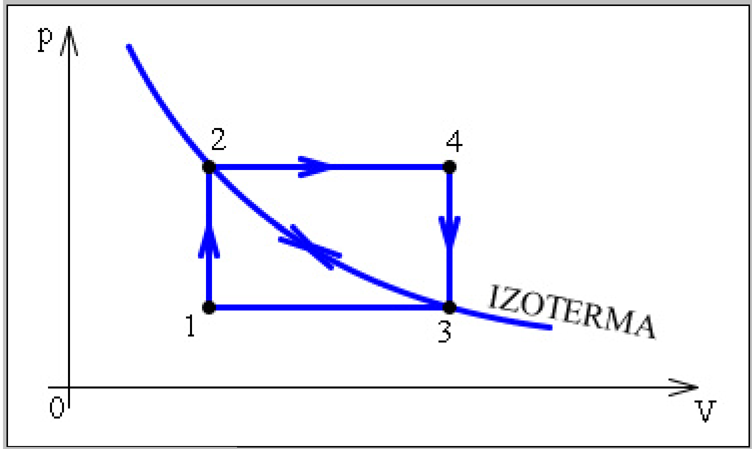
BLP 2.4.-69

Nechť s ideálním plynem proběhnou dva kruhové děje 1→2→3→1 a 3→2→4→3 (O 2.4.-21). Ve kterém kruhovém ději vykoná plyn větší práci? Odpověď zdůvodněte!



O 2.4.-21

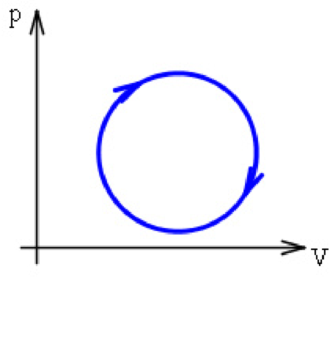
Nakreslete p-V diagram obou kruhových dějů a srovnejte obsahy ploch, které jsou jimi v p-V rovině vymezeny.



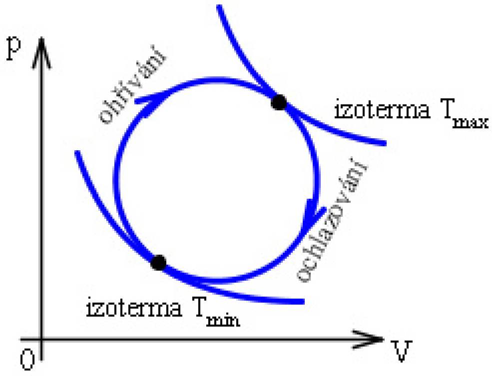
3→2→4→3, viz. obr. O 2.4.-22

ZU 2.4.-70

Zjistěte, ve kterých částech kruhového děje z O 2.4.-23 teplota rostla, resp. klesala.



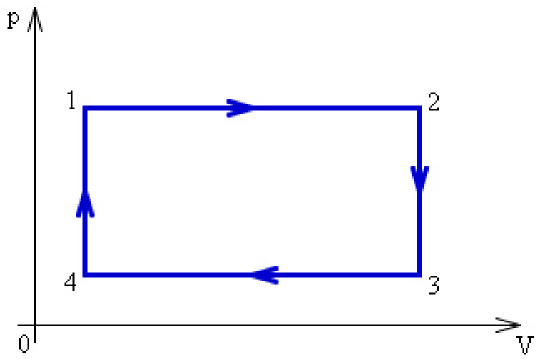
O 2.4.-23



O 2.4.-24

BU 2.4.-71

Uvažujme kruhový děj v ideálním plynu z obr. O 2.4.-25. V jakých částech cyklu plyn odevzdává resp. přijímá teplo?

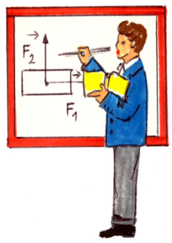


O 2.4.-25

ZTO 2.4.-72

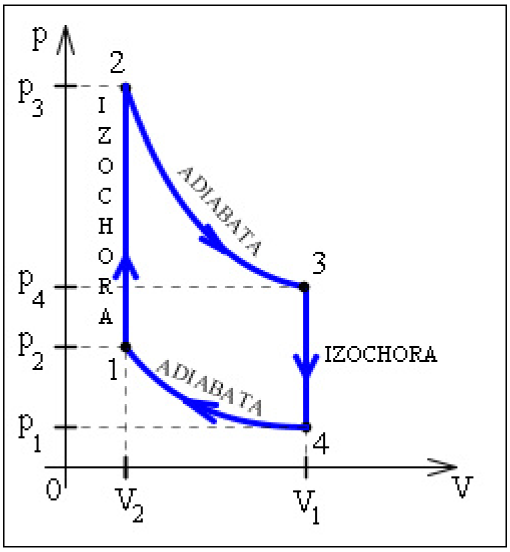
Ze kterých dějů je složen Carnotův kruhový děj?

a) izochorický ohřev
b) adiabatická komprese
c) adiabatická expanze
d) izobarická komprese
e) izobarická expanze
f) izotermická komprese
g) izotermická expanze



BŘU 2.4.-73

Vypočítejte účinnost Ottova cyklu (O 2.4.-26), je-li dán kompresní poměr V_1/V_2 = 5 a podíl molárních tepelných kapacit pro hořlavou směs a produkty hoření C_{mp} /C_{mV} = 1,33. Předpokládáme, že v Ottově kruhovém ději probíhá: 1) otevření ventilu I a nasátí výbušné směsi benzínu a vzduchu do válce (děj 0→4) pohybem pístu z polohy A do polohy B, 2) adiabatické stlačení (děj 1→2) výbušné směsi, při kterém se píst vrací do původní polohy A, 3) zapálení výbušné směsi svíčkou S, což vede k ději 2→3 a adiabatické expanzi 3→4 (pohyb pístu z A do B), 4) izochorický pokles tlaku díky otevření výfukového ventilu II (děj 4→1). Nakonec se píst znovu přesune do polohy A, aby vytlačil zbývající zplodiny hoření z válce. Ottův cyklus popisuje činnost zážehového spalovacího motoru čtyřdobého.



O 2.4.-27

V_1/V_2 = 5, C_{mp}/C_{mV} = 1,33, η = ?

Adiabatickým dějům v Ottově cyklu přísluší práce $A_{1\to 2} = nC_{mV}(T_2 - T_1)$ a $A_{3\to 4} = nC_{mV}(T_4 - T_3)$. Práce se nekoná při izochorickém ději, soustava však během děje 2⟶3 přijímá teplo $Q_1 = nC_{mV}(T_3 - T_2)$ a při ději 4⟶1 odevzdává teplo $Q_2 = nC_{mV}(T_1 - T_4)$. Účinnost je proto

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Zbavme se čtyř neznámých teplot. Z Poissonových rovnic vyjádřeme podíly teplot pomocí podílů objemů:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$$
$$p_3 V_3^\kappa = p_4 V_4^\kappa$$
$$p_1 V_1 V_1^{\kappa-1} = p_2 V_2 V_2^{\kappa-1}$$
$$p_3 V_3 V_3^\kappa = p_4 V_4 V_4^\kappa$$
$$nRT_1 V_1^{\kappa-1} = nRT_2 V_2^{\kappa-1}$$
$$nRT_3 V_3^{\kappa-1} = nRT_4 V_4^{\kappa-1}$$

Poněvadž $V_4 = V_1$ a $V_2 = V_3$, tak:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \\ \dfrac{T_3}{T_4} = \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} \end{array}\right\} \Rightarrow T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2}$$

Nyní můžeme upravit vzorec pro účinnost do konečné podoby:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_1 T_3}{T_2} - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1\left(T_3 - T_2\right)}{T_2\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa - 1}$$

$$\eta = 0,41 = 41\%$$

ZU 2.4.-74
Tepelný stroj přijal během jednoho cyklu z ohřívače teplo 250 kJ a odevzdal chladiči teplo 60 kJ. Stanovte účinnost tepelného stroje. Vyjádřete ji v procentech.

ZU 2.4.-75
Carnotův motor má při teplotě chladiče 10 °C účinnost 38%. Účinnost máme zvýšit na 45%. O kolik stupňů se musí zvýšit teplota ohřívače? Předpokládáme, že teplota chladiče zůstává stejná.

BU 2.4.-76
Kyslík má počáteční teplotu 200 °C a koná ideální Carnotův kruhový děj. Nejprve expanduje izotermicky na dvojnásobek objemu, poté expanduje adiabaticky na trojnásobek počátečního objemu aby byl stlačen izotermicky na takový objem, který umožní následnou adiabatickou kompresí uzavřít celý cyklus. Kyslíku je 2000 mol. Vypočtěte práci kyslíku v každé ze čtyř částí kruhového děje. Stanovte účinnost daného kruhového děje. Použijte hodnotu Poissonovy konstanty 1,4.

2.5. Přenos tepla

SHRNUTÍ
Teplo se přenáší výhradně z míst teplejších do míst studenějších vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a zářením (radiací).

Přenos tepla vedením
Vedení (kondukce) tepla je zprostředkováno srážkami sousedních molekul látkového prostředí. V homogenním prostředí, které je dokonale tepelně izolováno od okolí a za předpokladu jednorozměrného šíření tepla (ve směru osy x), je množství tepla Q prošlého rovinnou plochou kolmou na osu x o obsahu S za dobu τ a v případě konstantního teplotního spádu $\frac{t_1 - t_2}{l}$ dáno vztahem

$$Q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{l} S\tau,$$

kde λ je **součinitel tepelné vodivosti**.

$$[\lambda] = \mathrm{J \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}}$$

Jestliže teplotní spád není konstantní a teplo se šíří v kladném směru osy x, lze psát:

$$Q = -\lambda S\tau \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

Mírou přenosu tepla je **tepelný tok** Φ, který je podílem tepla dQ a doby dt, za kterou danou plochou teplo dQ prošlo:

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \ [\Phi] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Hustota tepelného toku je vektor $\vec{q}$, pro jehož velikost platí:

$$q = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S_\mathrm{n}}, \ [q] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

$\mathrm{d}S_\mathrm{n}$ je obsah elementární rovinné plochy, která je kolmá na směr přenosu tepla.

Přestup tepla je přenos tepla rozhraním, které odděluje dvě různá prostředí. Byl zaveden **součinitel přestupu tepla** α:

$$\alpha = \frac{q}{t_1 - t_2}$$

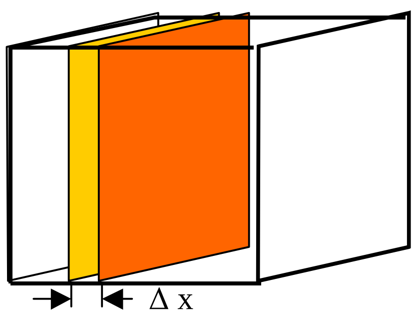
t_1 a t_2 jsou teploty na jednotlivých stranách rozhraní.

Prostup tepla je přenos tepla mezi dvěma tekutinami oddělenými pevnou stěnou. Teploty v tekutinách T_1 a T_2 se liší od teplot T_1' a T_2' na příslušných rozhraních. Platí:

$$\Phi = KS(T_1 - T_2)$$

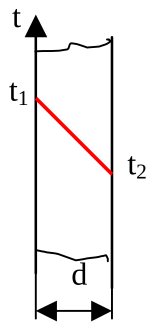
K součinitel prostupu tepla
S obsah plochy kolmé na směr přenosu tepla

BTO 2.5.-1
Uvažujte desku tepelné vodivosti λ. Desku rozdělíme na vrstvy o tloušťce Δx, kolmé na směr přenosu tepla (Obrázek 2.5.-1). Za dobu $\Delta\tau$ vstoupí do vybrané vrstvy teplo Q_1 a za tutéž dobu z ní vystoupí teplo Q_2. Pokud platí $Q_1 = Q_2$, hovoříme o:
a) stacionárním vedení tepla
b) nestacionárním vedení tepla



O 2.5.-1

BTO 2.5.-2
Uvažujte stěnu, jejíž součinitel tepelné vodivosti je λ. Průběh teploty ve stěně je znázorněn na obrázku O 2.5.-2 Jedná se o:
a) stacionární vedení tepla
b) nestacionární vedení tepla



O 2.5.-2

BTO 2.5.-3
Uvažujte stěnu, jejíž součinitel tepelné vodivosti je λ. Průběh teploty ve stěně je znázorněn na obr. O 2.5.-2. Jaké teplo projde jednotkovou plochou této stěny za 1 s?

BTO 2.5.-4
Uvažujte tyč průřezu S a délky l, která je z materiálu, jehož součinitel tepelné vodivosti je λ. Konce tyče udržujeme na konstantních teplotách T_1 a T_2. Libovolným průřezem tyče S projde za dobu τ teplo Q. Vezmeme-li tyč průřezu $S_1 = S/2$, jaké teplo projde libovolným průřezem tyče S_1?

BTO 2.5.-5
Uvažujte tyč průřezu S a délky l, která je z materiálu, jehož součinitel tepelné vodivosti je λ. Konce tyče udržujeme na konstantních teplotách t_1 = 50 °C a t_2 = 0 °C. Libovolným průřezem tyče S projde za dobu τ teplo Q. Stanovte teplo, které projde libovolným průřezem tyče S, jestliže teplotu t_1 zvýšíme z 50 °C na 100 °C.

BTO 2.5.-6
Uvažujte tyč průřezu S a délky l, která je z materiálu, jehož součinitel tepelné vodivosti je λ. Konce tyče udržujeme na konstantních teplotách t_1 a t_2. Libovolným průřezem tyče S projde za dobu τ teplo Q. Jaké teplo projde za dobu 3τ libovolným průřezem tyče S ?

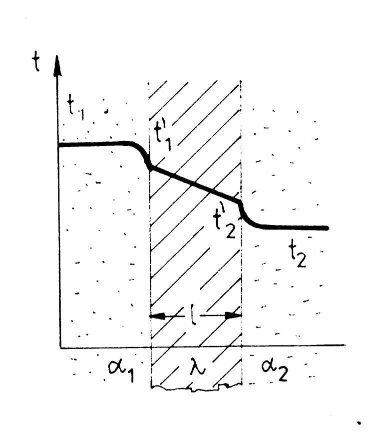
BTO 2.5.-7
Vyjádřete jednotku součinitele tepelné vodivosti λ v základních jednotkách soustavy SI.

BTO 2.5.-8
Vyjádřete jednotku součinitele přestupu tepla v základních jednotkách soustavy SI.

BTO 2.5.-9
Vyjádřete jednotku hustoty tepelného toku q v základních jednotkách soustavy SI.

BŘU 2.5.-10
Jaký musí mít výkon elektrická kamna, jestliže má být v místnosti trvale teplota 20 °C. Za okny je přitom mráz –22 °C. Stěny mají obsah 33 m^2, tloušťka stěn je 80 cm, součinitel tepelné vodivosti stěny $8{,}36\cdot10^{-3}$ J·K^{-1}·s^{-1}·cm^{-1}, součinitel přestupu tepla na rozhraní stěna-vzduch je na obou stranách stejný a má hodnotu $1{,}05\cdot10^{-3}$ J·K^{-1}·s^{-1}·cm^{-2}.

t_1 = 20 °C, t_2 = -22 °C, S = 33 m^2, l = 0,8 m, λ = 0,836 J·K^{-1}·s^{-1}·m^{-1},
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ = 10,5 J·K^{-1}·s^{-1}·m^{-2}, P = ?



O 2.5.-3

Teplo Q, které projde za čas τ plochou S ze vzduchu o teplotě t_1 do stěny je $Q = \alpha S\tau\left(t_1 - t_1'\right)$.
Za ustáleného stavu vždy za dobu τ a plochou S stejné teplo Q prochází stěnou a vystupuje ze stěny do studeného vzduchu. Znamená to, že platí:

$$Q = \alpha S\tau\left(t_1 - t_1'\right) = \lambda S\frac{t_1' - t_2'}{l}\tau = \alpha S\tau\left(t_2' - t_2\right)$$

Vyjádřeme postupně rozdíly teplot

$$t_1 - t_1' = \frac{Q}{\alpha S\tau},\ t_1' - t_2' = \frac{Ql}{\lambda S\tau},\ t_2' - t_2 = \frac{Q}{\alpha S\tau}$$

a sečteme je:

$$t_1 - t_2 = Q\left(\frac{2}{\alpha S\tau} + \frac{l}{\lambda S\tau}\right)$$

Protože výkon je $P = \dfrac{Q}{\tau}$, tak

$$P = \frac{S\left(t_1 - t_2\right)}{\dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{l}{\lambda}}$$

$$P == 1207{,}93\ \mathrm{W} \cong 1{,}2\ \mathrm{kW}$$

SHRNUTÍ

Přenos tepla zářením

Nositelem energie u šíření tepla **zářením** (sáláním) je elektromagnetické vlnění. Každé těleso, zde kapalné nebo pevné, je zdrojem elektromagnetického vlnění, neboť je složeno s kmitajících nabitých částic. Tomuto vlnění říkáme tepelné záření. Tělesa s teplotou menší než 500 až 560 °C vyzařují infračervené záření. S rostoucí teplotou stoupá celkové množství tělesem vyzářené energie a záření se přesouvá do oboru kratších vlnových délek.
Veličiny, které se využívají k popisu zákonů vyzařování těles:

Zářivá energie E je energie vyzářená, přenesená nebo přijatá prostřednictvím elektromagnetického záření.
$[W] = \mathrm{J}$

Zářivý tok Φ_e udává výkon přenášený zářením.

$$\Phi_e = \frac{dE}{dt}, \ [\Phi_e] = W$$

Spektrální intenzita zářivého toku je podíl zářivého toku připadajícího na infinitezimální interval vlnových délek $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ a velikosti tohoto intervalu dλ.

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \ [\Phi_\lambda] = W \cdot m^{-2}$$

Intenzita vyzařování M_e je podíl zářivého toku z povrchového elementu zářícího tělesa a obsahu tohoto elementu.

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}, \ [M_e] = W \cdot m^{-2}$$

Spektrální hustota intenzity vyzařování je rovna podílu intenzity vyzařování připadající na infinitezimální interval vlnových délek $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ a velikosti tohoto intervalu dλ.

$$M_\lambda = \frac{dM_e}{d\lambda}, \ [M_\lambda] = W \cdot m^{-3}$$

Zákony záření absolutně (dokonale) černého tělesa

Dokonale černé těleso pohlcuje veškerou energii dopadající na jeho povrch.

Pozn.: Index 0 u značky veličin zde bude zdůrazňovat skutečnost, že vyjadřují vlastnosti černého tělesa.

Stefanův-Boltzmannův zákon:

$$M_{0e} = \sigma T^4$$

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ a nazývá se Stefanova-Boltzmannova konstanta.

Planckův zákon vyzařování dokonale černého tělesa:

$$M_{0\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)}$$

Boltzmannova konstanta k = 1,38·10^{-23} J·K^{-1}, rychlost světla ve vakuu c = 3·10^{8} m·s^{-1}, Planckova konstanta h = 6,626·10^{-34} J·s

Wienův zákon posuvu: Maximum spektrální hustoty intenzity vyzařování se s rostoucí teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám:

$$\lambda_{0\max} = \frac{b}{T}$$

$b = 2,9 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$ Wienova konstanta

BTO 2.5.-11

Intenzita vyzařování je číselně rovna:

a) energii vyzářené z jednotky plochy zdroje za jednu sekundu.
b) výkonu, který je zdrojem vyzářený.
c) energii vyzářené ze zdroje.
d) energii vyzářené z jednotky plochy zdroje.

BTO 2.5.-12

Jednotka intenzity vyzařování je:

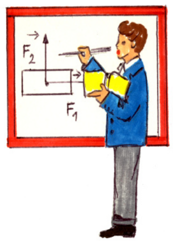
a) J
b) W
c) $W \cdot m^{-2}$
d) $J \cdot m^{-2}$

BTO 2.5.-13
Zákon Stefanův-Boltzmannův udává vztah pro určení:
a) spektrální hustoty intenzity vyzařování dokonale černého tělesa
b) intenzity vyzařování dokonale černého tělesa
c) vlnové délky, které za dané teploty přísluší maximální spektrální hustota intenzity vyzařování.

BTO 2.5.-14
Zákon Stefanův-Boltzmannův pro záření dokonale černého tělesa je dán vztahem:
a) $M_{0e} = \sigma T^4$
b) $M_{0e} = \sigma T$
c) $M_{0e} = \sigma T^5$

BTO 2.5.-15
Kolikrát je nutno zvětšit, resp. zmenšit teplotu dokonale černého tělesa, aby intenzita vyzařování se zvětšila šestnáctkrát?
a) teplotu je nutno zvětšit čtyřikrát
b) teplotu je nutno zvětšit osmkrát
c) teplotu je nutno zvětšit dvakrát
d) teplotu je nutno zmenšit na polovinu

BTO 2.5.-16
Při teplotě T_1 připadá maximální spektrální hustota intenzity vyzařování dokonale černého tělesa na vlnovou délku λ_1. Při teplotě $T_2 > T_1$ připadá toto maximum na vlnovou délku λ_2, pro kterou platí:
a) $\lambda_2 > \lambda_1$
b) $\lambda_2 = \lambda_1$
c) $\lambda_2 < \lambda_1$



BŘU 2.5.-17
V žárovce, která svítí, má rozžhavené vlákno teplotu 2900 °C. Náhle přestane žárovkou procházet elektrický proud. Za jakou dobu žárovka zhasne, předpokládáme-li, že zhasnutí odpovídá pokles teploty vlákna pod 400 °C, vlákno září jako absolutně černé těleso a další ztráty tepla zanedbáme? Měrná tepelná kapacita materiálu vlákna je 1375 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, obsah průřezu vlákna $3{,}14 \cdot 10^{-8}$ m^2 a hustota vlákna 19300 $kg \cdot m^{-3}$.

$T_1 = (2900 + 273{,}15)$ K, $T_2 = (400 + 273{,}15)$ K, $c = 1375\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, $S = 3{,}14 \cdot 10^{-8}\ m^2$,
$\rho = 19300\ kg \cdot m^{-3}$, Stefanova-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$, $\tau = ?$

Protože nás zajímá úhrnné elektromagnetické záření, použijme experimentálně stanovený Stefanův-Boltzmannův zákon, který vyjadřuje závislost intenzity vyzařování absolutně černého tělesa na teplotě:

$M_{0\mathrm{e}} = \sigma T^4$

Veličina M_{0e} je v našem příkladě podílem výkonu $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}$ vyzářeného povrchem vlákna obsahu S_{pl} (plášť válce) a tohoto obsahu. Stefanův-Boltzmannův zákon tudíž nabude tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}E}{S_{\mathrm{pl}}\mathrm{d}\tau} = \sigma T^4$$

Vlákno chápeme jako uzavřenou soustavu, která na okolí nekoná práci, takže s přihlédnutím ke znaménkové konvenci pro teplo, prvnímu zákonu termodynamiky a definici měrné tepelné kapacity, je $\mathrm{d}E = -\mathrm{d}U = -\mathrm{d}Q = -cm\mathrm{d}T$. V našem značení je d$E$ přírůstek vyzářené energie. Nyní můžeme dále upravovat Stefanův-Boltzmannův zákon:

$$\mathrm{d}E = S\sigma T^4 \mathrm{d}\tau$$

$$-cm\mathrm{d}T = S_{\mathrm{pl}}\sigma T^4 \mathrm{d}\tau$$

$$-cm\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = S_{\mathrm{pl}}\sigma \mathrm{d}\tau$$

Integrujme

$$-cm\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^4} = S_{\mathrm{pl}}\sigma \int_0^{\tau} \mathrm{d}\tau$$

a vyjádřeme hledaný čas:

$$\tau = \frac{cm}{3S_{\mathrm{pl}}\sigma}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right)$$

Hmotnost drátu $m = \rho V = \rho S l$. Obsahy pláště a podstavy válce jsou v tomto pořadí $S_{\mathrm{pl}} = 2\pi r l$ a $S = \pi r^2$, což znamená, že $S_{\mathrm{pl}} = 2l\sqrt{\pi S}$. Snadno dostaneme řešení:

$$\tau = \frac{c\rho}{6\sigma}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right)$$

$\tau = 13{,}74$ s

BŘU 2.5.-18

Najděte hodnotu
a) podílu intenzit vyzařování
b) podíl spektrálních hustot intenzity vyzařování pro záření o vlnové délce 320 nm
dvou absolutně černých těles, z nichž první má teplotu 2100 K a druhé 4000 K.

T_1 = 2100 K, T_2 = 4000 K, Boltzmannova konstanta k = $1{,}38\cdot10^{-23}$ J·K^{-1}, rychlost světla ve vakuu $c = 3\cdot10^8$ m·s^{-1}, Planckova konstanta $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ J·s, a) $\dfrac{M_{0\mathrm{e}_1}}{M_{0\mathrm{e}_2}} = ?$, b) $\dfrac{M_{0\lambda_1}}{M_{0\lambda_2}} = ?$,

λ = 320 nm

a) Podíl intenzit vyzařování vyjádříme užitím Stafanova-Boltzmannova zákona:

$$\frac{M_{0e_1}}{M_{0e_2}} = \frac{\sigma T_1^4}{\sigma T_2^4} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$$

$$\frac{M_{0e_1}}{M_{0e_2}} = 0,076$$

b) Závislost spektrální hustoty intenzity vyzařování absolutně černého tělesa na vlnové délce popisuje Planckův zákon:

$$M_{0\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}$$

Podíl spektrálních hustot intenzity vyzařování absolutně černých těles s teplotami T_1 a T_2 bude:

$$\frac{M_{0\lambda_1}}{M_{0\lambda_2}} = \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT_2}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT_1}} - 1} \cong e^{\frac{hc}{\lambda kT_2} - \frac{hc}{\lambda kT_1}} = e^{\frac{hc}{\lambda k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}$$

$$\frac{M_{0\lambda_1}}{M_{0\lambda_2}} = 3,786 \cdot 10^{-5}$$

BU 2.5.-19

Ve slunečním spektru připadá maximální spektrální hustota intenzity vyzařování na vlnovou délku 475 nm. Vypočtěte teplotu na povrchu Slunce za předpokladu, že je dokonale černým tělesem.

BU 2.5.-20

Kolikrát je intenzita vyzařování dokonale černého tělesa při teplotě 500 °C větší než při teplotě 10 °C?