

1993

U-5869/88

K  
GloM 21

# FYZIKA PEVNÝCH LÁTEK

II.

(pro učitelské studium)

Doc. RNDr. Miroslav Svoboda, CSc.  
RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.,  
Doc. RNDr. Jiří Štenberk, CSc.



60 - 93 - 86 17/2 Kčs 20, -

UNIVERZITA KARLOVA ● PRAHA

Housole	1	6	11
Ademond	2	7	12
Felnerova	3	8	13-2
Hackova	4	9	13.3-13.7
Antoš	5	10	14

## 10. OPTICKÉ VLASTNOSTI PEVNÝCH LÁTEK

### 10.1. Interakce světla a prostředí

K interakci (vzájemnému působení) světla (elektromagnetické vlny) a prostředí patří známé jevy, např. lom (refrakce), odraz (reflexe), dvojlom, polarizace, absorpce světla aj., na druhé straně světlo vyvolává elektronové přechody (v atomech, molekulách, pevných látkách), kmity a rotace molekul, kmity krystalové mřížky (v infračervené oblasti, viz článek 3.5.2) aj. Probereme některé z těchto jevů, zejména ve viditelné oblasti světla (vlnové délky cca 400 až 750 nm, frekvence řádu  $10^{14}$  až  $10^{15}$  Hz) s konečným cílem dospět k optickým vlastnostem pevných látek.

V problematice interakce světla a prostředí jsou možné různé přístupy:

a) Vychází se z obecných principů nauky o vlnění (Huygens, Fresnel). Toto hledisko nebudeme dále aplikovat.

b) Světlo se pojímá jako elektromagnetické vlnění (Maxwell) a prostředí se charakterizuje makrofyzikálními parametry (relativní permitivitou  $\epsilon_r$  a relativní permeabilitou  $\mu_r$ ). V dalším výkladu zopakujeme základní poznatky tohoto pojetí pro nevodivé prostředí (izolant, dielektrikum) a rozšíříme je na vodivé prostředí (obecněji absorbující prostředí), článek 10.2.

c) Prostor se pokládá za soubor klasických částic s mikrofyzikálními parametry (Lorentz a Drude, klasický model výpočtu  $\epsilon_r$  a  $\mu_r$ ). Tomuto pojetí se budeme věnovat nejvíce, články 10.3 a 10.4.

d) Kvantové pojetí, semiklasický přístup, pokládá prostředí za soubor částic kvantové povahy. Naproti tomu elektromagnetické pole (světelná vlna) se nekvantuje, tj. předpokládá se, že jednotlivé elementární procesy v prostředí světelnou vlnu prakticky nemění. Je tedy potřeba, aby vlna byla dostatečně intenzivní (velký počet fotonů) a měla dostatečně malou frekvenci (malou energii jednoho fotonu) čili dostatečně velkou vlnovou délku. V příslušných výpočtech pak světelná vlna představuje klasickou vnější poruchu v hamiltoniánu systému částic (elektronů). - V dalším výkladu se soustředíme především na to, v čem výsledky tohoto přístupu upřesňují výsledky Lorentzova-Drudeova modelu, článek 10.4.4.

e) Ryze kvantové pojetí opouští předchozí omezení semiklasického přístupu. Toto pojetí je mimo naše možnosti.

Při výkladu optických vlastností pevných látek budeme vždy předpokládat, že jde o izotropní prostředí. Z našich úvah budou tedy vyloučeny jevy podmíněné tenzorovým charakterem materiálových parametrů  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  (např. dvojlom), což nastává v krystalových soustavách s nižší symetrií. Stojí za zapamatování, že kubické krystaly lze z hlediska optických vlastností pokládat prakticky za izotropní. - Určitou výjimkou bude dvojlom vyvolaný v izotropním prostředí magnetickým polem (článek 10.6.2).

Nyní probereme fenomenologický popis absorpce světla. Označíme  $I$  intenzitu světelné vlny a v souhlase se zkušeností vyjádříme, že relativní úbytek intenzity -  $dI/I$  je úměrný dráze  $dx$ , na níž v absorbujícím prostředí úbytek pozorujeme. Máme tedy

Katedra didaktiky fyziky  
matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Vedoucí katedry: doc. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc.

© Miroslav Svoboda za kolektiv, 1986

$$-\frac{dI}{I} = K dx, \quad (10.1)$$

kde  $K$  je konstanta úměrnosti zvaná absorpční konstanta. Předpokládáme-li, že  $I_0$  je intenzita vlny na okraji prostředí, kam klademe počátek měření dráhy ( $x=0$ ), má rovnice (10.1) řešení

$$I = I_0 \exp(-Kx). \quad (10.2)$$

Absorpční konstanta závisí obecně na kmitočtu  $\nu$  vlny,  $K = K(\nu)$  (nebo na vlnové délce  $\lambda$ ). Je to veličina přímo přístupná měření, její jednotkou je  $m^{-1}$ , spíše se však udává v  $cm^{-1}$  nebo  $mm^{-1}$ . Má ten význam, že pro  $x = 1/K$  klesne intenzita vlny podle (10.2) na  $1/e$  hodnoty  $I_0$ , tj. přibližně na 37%. Pripomeňme, že intenzitou vlny rozumíme energii procházející za jednotku času plochou o jednotkovém obsahu (jednotka  $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$  nebo  $W \cdot m^{-2}$ ) a že intenzita vlny  $I$  je úměrná čtverci amplitudy vlny  $A^2$ .

Výklad absorpce podle Maxwellových rovnic podáme dále. Zde zopakujeme základní výsledky plynoucí z Maxwellovy teorie pro dielektrikum (vodivost  $\gamma = 0$ ). Označme  $\epsilon_0$  a  $\mu_0$  permitivitu a permeabilitu vakua,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  a  $\mu = \mu_0 \mu_r$  permitivitu a permeabilitu prostředí,  $c$  rychlost světla ve vakuu,  $v$  (fázovou) rychlost světla v prostředí,  $n$  (absolutní) index lomu. Máme

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &\doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \doteq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, \\ c &= (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}, \\ v &= (\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r)^{-1/2} = (\epsilon \mu)^{-1/2}, \\ n &= c/v = (\epsilon_r \mu_r)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Protože téměř všechna prostředí jsou v oboru frekvencí, které nás zajímají, magneticky neaktivní, můžeme v těchto rovnicích klást  $\mu_r = 1$ .

Odrazivost  $R$  rozumíme v dalším výkladu poměr intenzity  $I_R$  světelné vlny odražené od prostředí k intenzitě  $I_0$  vlny dopadající na prostředí za předpokladu kolmého dopadu. Označíme-li  $A_R$  a  $A_0$  amplitudu odražené a dopadající vlny, je

$$R = I_R/I_0 = (A_R/A_0)^2. \quad (10.4)$$

Při odvozování Fresnelových vzorců v elementární optice dochází se pro dielektrikum ke vztahu (při kolmém dopadu světla,  $n$  může být relativní index lomu mezi prostředími)

$$A_R = \pm A_0(n-1)/(n+1), \quad (10.5)$$

takže podle (10.4) platí

$$R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (10.6)$$

Relativní permitivita  $\epsilon_r$  (apod. relativní permeabilita  $\mu_r$ , není-li prakticky rovna 1), která se v Maxwellově teorii považuje za materiálový parametr (za konstantu), závisí ve skutečnosti na frekvenci. Z rovnic (10.3) pak plyne např. frekvenční závislost indexu lomu, z rovnice (10.6) frekvenční závislost odrazivosti. Taková závislost se nazývá disperze příslušné veliči-

ny. O normální disperzi indexu lomu mluvíme, roste-li index lomu se zvyšující se frekvencí (např. vznik spektra lomem světla). Existuje však též opačná závislost, tj. pokles indexu lomu s rostoucí frekvencí; tento jev se nazývá anomální disperze indexu lomu. Historicky byla anomální disperze pozorována prvně u roztoku fuchsinu (červeného anilinového barviva) v lihu; dále ji jeví páry kovů a v daleké infračervené oblasti alkalické halogenidy (viz článek 3.5.2). V okolí oblasti anomální disperze indexu lomu látky silně absorbují a reflektují (jako kov). Vysvětlení těchto jevů Maxwellova teorie nepodává, a je potřeba aplikovat alespoň klasický Lorentzův-Drudeův model (články 10.3 a 10.4).

## 10.2. Elektromagnetická vlna ve vodivém prostředí

Vyjdeme z Maxwellových rovnic

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \vec{E}, \quad (10.7a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (10.7b)$$

Zde  $\vec{H}$  a  $\vec{E}$  značí intenzitu magnetického a elektrického pole,  $\gamma$  (měrnou) elektrickou vodivost prostředí,  $t$  čas a význam znaků  $\epsilon$  a  $\mu$  byl připomenut v souvislosti s rovnicemi (10.3). Dále předpokládáme, že v prostředí neexistují volné náboje, tedy platí

$$\text{div } \vec{E} = 0, \text{ div } \vec{H} = 0. \quad (10.8)$$

Následuje standardní postup: na rovnici (10.7a) provedeme operaci  $\partial/\partial t$  a užijeme relace

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} = \text{rot} \frac{\partial}{\partial t};$$

na rovnici (10.7b) provedeme operaci  $\text{rot}$  a užijeme identity

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta,$$

v níž první člen na pravé straně se anuluje vzhledem k podmínce (10.8). Následuje vyloučení  $\vec{H}$  z rovnic (10.7a,b) a dostáváme

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.9)$$

Tato rovnice zahrnuje v sobě tři rovnice pro složky  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . Jako řešení rovnice (10.9) hledáme rovinnou vlnu šířící se ve směru osy  $x$ , tj. předpokládáme

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t). \quad (10.10)$$

Dále předpokládejme, že jde o lineárně polarizovanou vlnu s kmity ve směru osy  $y$ , tj. existuje pouze složka  $E_y$ ; tuto složku budeme značit zkráceně  $\tilde{E}$ , tedy  $E_y = \tilde{E}$ . - Uveďme, že výsledky, které dostaneme pro lineárně polarizovanou vlnu, mají obecnou platnost (obecná vlna by se složila ze dvou lineárně polarizovaných vln se vzájemně kolmými kmity a určitým fázovým posuvem).

Za našich předpokladů rovnice (10.9) nabude tvaru

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \gamma \mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (10.11)$$

Dále rozložíme obecnou závislost (10.10) na součin prostorově a časově proměnné části,

$$\mathcal{E} = f(x) \cdot \exp(i\omega t), \quad (10.12)$$

tj. počítáme s vlnou harmonicky proměnnou v čase s kruhovou frekvencí  $\omega$ . Po dosazení podle (10.12) do (10.11) (po provedení příslušných derivací a krácení nenulovým faktorem  $\exp(i\omega t)$ ) dostaneme rovnici pro  $f(x)$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (\epsilon \mu \omega^2 - i \gamma \mu \omega) f = 0,$$

jejímž řešením je

$$f(x) = A_0 \exp(\pm i \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - i \gamma \mu \omega} x) \quad (10.13)$$

( $A_0$  = konstanta).

V případě dielektrika ( $\gamma = 0$ ) z rovnic (10.12) a (10.13) plyne

$$\mathcal{E} = A_0 \exp(\pm i \sqrt{\epsilon \mu \omega^2} x) \cdot \exp(i\omega t), \quad (10.14)$$

kde  $A_0$  má význam amplitudy vlny konstantní v prostoru i čase, jde tedy o netlumenou vlnu neboli vlnu šířící se v neabsorbujícím prostředí. V soulase s (10.3) znamená  $\sqrt{\epsilon \mu}$  převrácenou hodnotu fázové rychlosti vlny a je  $1/v = n/c$ , takže

$$\sqrt{\epsilon \mu \omega^2} = \frac{\omega}{c} n. \quad (10.15)$$

Tím rovnice (10.14) přechází na známý tvar

$$\mathcal{E} = A_0 \exp\left[i\omega\left(t \pm \frac{n}{c}x\right)\right] = A_0 \exp\left[i\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right)\right] \quad (10.16)$$

V dalším výkladu zvolíme pro určitost znaménko minus, tj. budeme předpokládat šíření vlny v kladném směru osy  $x$ .

Pro vodivé prostředí ( $\gamma \neq 0$ ) klademe v (10.13) analogicky podle (10.15)

$$\sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - i \gamma \mu \omega} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}, \quad (10.17)$$

kde  $\tilde{n}$  je tzv. komplexní index lomu, který se píše ve tvaru

$$\tilde{n} = n - i \mathcal{K}. \quad (10.18)$$

V (10.18) veličina  $n$  se nazývá index lomu (jako v případě nevodivého prostředí), veličina  $\mathcal{K}$  index absorpce. Z (10.17) plyne po dosazení podle (10.18), užitím  $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$  a srovnáním reálné a imaginární části

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \mathcal{K}^2 &= \epsilon_r \mu_r, \\ 2n\mathcal{K} &= \frac{\gamma \mu_r}{\epsilon_0 \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Podle (10.19) lze veličiny  $n$  a  $\mathcal{K}$  vyjádřit pomocí materiálových parametrů  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  a  $\gamma$ ; mimoto zpravidla je  $\mu_r = 1$ . Je-li  $\gamma = 0$ , pak též  $\mathcal{K} = 0$  a  $n$

má běžný význam indexu lomu nevodivého prostředí.

Užitím (10.12), (10.13), (10.17) a (10.18) můžeme napsat výraz pro vlnu šířící se ve vodivém prostředí v kladném směru osy  $x$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= A_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{n - i\mathcal{K}}{c}x\right)\right] = \\ &= A_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\mathcal{K}x\right) \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{n}{c}x\right)\right] = \\ &= A(x) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{n}{c}x\right)\right], \end{aligned} \quad (10.20)$$

kde

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c}\mathcal{K}x\right). \quad (10.21)$$

Srovnáním (10.16) a (10.21) získáváme tyto poznatky: a) V obou případech jde o vlnu periodicky proměnnou v prostoru a čase, avšak u vlny ve vodivém prostředí její amplituda exponenciálně klesá s  $x$ , tj. s průnikem vlny do prostředí, podle zákona (10.21). Mírou rychlosti poklesu amplitudy (a tedy i intenzity vlny) je index absorpce  $\mathcal{K}$  (odtud plyne jeho název). - b) Vztah platný pro vlnu ve vodivém prostředí dostaneme ze vztahu platného pro vlnu v nevodivém prostředí formální záměnou indexu lomu  $n$  komplexním indexem lomu  $\tilde{n} = n - i\mathcal{K}$ .

Z rovnice (10.7b) by bylo možno vypočíst magnetickou složku elektromagnetické vlny; v našem případě existuje pouze složka  $H_z = H$ , a vychází pro ni

$$H = A_m(x) \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{n}{c}x\right) - i\delta\right].$$

Podstatné je, že amplituda  $A_m(x)$  klesá podle stejného zákona (10.21) jako amplituda  $A(x)$  a že elektrická a magnetická složka vlny jsou fázově posunuty o úhel  $\delta$ ; platí  $\tan \delta = \mathcal{K}/n$ , pokles amplitudy a fázový posuv neexistují, je-li  $\mathcal{K} = 0$ . Připomeňme však, že pro interakci s prostředím je určující elektrická složka vlny (pokus Wienerův aj.).

Podle (10.21) na dráze  $x = c/2\omega\mathcal{K}$  klesne amplituda vlny na  $1/\sqrt{e}$  hodnoty  $A_0$ , tedy intenzita vlny na  $1/e$  hodnoty  $I_0$ . Ve fenomenologickém popisu podle vzorce (10.2) platí totéž o intenzitě vlny na dráze  $x = 1/K$ . Rovnost  $1/K = c/2\omega\mathcal{K}$  dává vztah mezi absorpční konstantou a indexem absorpce

$$K = \frac{2\omega\mathcal{K}}{c}. \quad (10.22)$$

Jako příklad aplikace poznatku b) uvedeného výše odvodíme zobecnění vztahu (10.6) na vodivé prostředí. V (10.5) provedeme záměnu  $n \rightarrow n - i\mathcal{K}$ , a dostáváme

$$\frac{A_R}{A_0} = \pm \frac{n - i\mathcal{K} - 1}{n - i\mathcal{K} + 1} = \pm \frac{\sqrt{(n-1)^2 + \mathcal{K}^2} \exp(i\alpha)}{\sqrt{(n+1)^2 + \mathcal{K}^2} \exp(i\beta)}.$$

V posledním vztahu využíváme toho, že komplexní číslo  $z = x + iy$  lze psát jako  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho \exp(i\varphi)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dále máme

$$\frac{A_R}{A_0} = \pm \sqrt{\frac{(n-1)^2 + \mathcal{K}^2}{(n+1)^2 + \mathcal{K}^2}} \exp [i(\alpha - \beta)].$$

Zde faktor  $\exp [i(\alpha - \beta)]$  znamená fázový posuv mezi odraženou a dopadající vlnou. Pro výpočet poměru intenzit záleží však na velikosti amplitud, nikoli na fázovém posuvu, takže máme

$$R = \frac{I_R}{I_0} = \left| \frac{A_R}{A_0} \right|^2 = \frac{(n-1)^2 + \mathcal{K}^2}{(n+1)^2 + \mathcal{K}^2}. \quad (10.23)$$

Tento vzorec se nazývá Beerův. Specializací  $\mathcal{K} = 0$  vede zpětně na (10.6).

Index absorpce jeví disperzi podobně jako index lomu. Může se stát, že v některém frekvenčním oboru nabude index absorpce tak velké hodnoty, že zlomek na pravé straně rovnice (10.23) je prakticky roven jedné. To znamená, že ve frekvenčním oboru, v němž látky silně absorbují (velké  $\mathcal{K}$ ), také silně odražejí (reflektují,  $I_R/I_0 \approx 1$ ).

Podle předchozího výkladu by každý vodič měl elektromagnetické vlny pohlcovat, každý izolant je propouštět. Víme však, že např. roztok NaCl ve vodě (poměrně dobrý vodič stejnosměrného proudu) viditelné světlo propouští, zatím co např. ebonit (izolant) známe jako neprůhledný. Důvod záleží opět ve frekvenční závislosti příslušných veličin (viz závěr článku 10.1). Podstatné je, že frekvenční závislost permitivity může být toho druhu, že i u dielektrika (izolantu) vede ke komplexnímu indexu lomu  $\tilde{n} = n - i\mathcal{K}$ ; pozoruje se pak oblast absorpce elektromagnetických vln, spojená se silnou reflexí ("kovové" chování dielektrika, viz následující článek). Další příčinou frekvenční závislosti permitivity (existence komplexního indexu lomu) je zejména u polovodičů excitace elektronů z valenčního do vodivostního pásu (článek 10.5).

Pro informaci uveďme, že u pevných látek vůbec index lomu v propustné i absorbující oblasti spektra leží přibližně v rozmezí  $n \approx 1$  až 6. Co se týče absorpční konstanty  $K$  a indexu absorpce  $\mathcal{K}$ , jejich hodnoty uvádíme dále v závěru článku 10.5.

### 10.3. Základní myšlenky Lorentzova-Drudeova modelu

#### 10.3.1. Příklad dielektrika (izolantu)

Nejprve se zaměříme na výklad disperze indexu lomu u dielektrik (izolantů), tj. elektrony v atomu budeme pokládat za pevně vázané k jádru.

Předpokládejme, že jádro atomu je nepohyblivé a těžší než záporného náboje obíhajícího elektronu (orbitu elektronu) se vůči jádru posune vlivem vnějšího elektrického pole o  $x$ . Posunutím elektronového obalu jádra vznikne na atomu elektrický dipól; tento děj se nazývá elektronová polarizace atomu a je reálný právě při frekvencích viditelného oboru spektra a v jejich blízkosti. Označme  $e_0$  a  $m$  náboj a hmotnost elektronu,  $\tilde{\mathcal{E}}$  velikost intenzity elektrického pole elektromagnetické vlny periodicky proměnného s časem  $t$ , tedy  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_0 \exp(i\omega t)$  ( $\tilde{\mathcal{E}}_0, \omega$  amplituda a kruhová frekvence vlny). Předpokládejme, že orbit elektronu je k atomovému jádru vázán elastickou silou, tj. při

vychýlení z rovnovážné polohy je tažen zpět silou velikosti  $F$  úměrnou výchylce, tedy  $F = -Kx$  ( $K$  = konstanta úměrnosti, tuhost vazby, nikoli absorpční konstanta). Pohybová rovnice pro výše uvedený děj pak zní

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - e_0 \tilde{\mathcal{E}}_0 \exp(i\omega t), \quad (10.24)$$

zanedbáme-li tlumící jevy (člen úměrný  $dx/dt$ ). Rovnice (10.24) je rovnice vynuceného kmitavého pohybu, jejíž obecné řešení sestává ze dvou částí:

1. periodické tlumené části s vlastní frekvencí  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ , která po určité době vymizí (ve skutečnosti vždy existuje nějaké tlumení), 2. periodické ustálené části s frekvencí  $\omega$ . Nás zajímá ustálený stav, pro nějž hledáme řešení ve tvaru

$$x = A \exp [i(\omega t - \varphi)] \quad (10.25)$$

( $A, \varphi$  konstanty, amplituda a fázový posuv). Po dosazení podle (10.25) do (10.24) dostáváme rovnici

$$-m\omega^2 A \exp [i(\omega t - \varphi)] = -K A \exp [i(\omega t - \varphi)] - e_0 \tilde{\mathcal{E}}_0 \exp(i\omega t),$$

kterou lze splnit za podmínek  $\varphi = 0$  (nulový fázový posuv, zanedbáme-li tlumení) a  $A(K - m\omega^2) = -e_0 \tilde{\mathcal{E}}_0$ , neboli podle (10.25)

$$x = -\frac{e_0 \tilde{\mathcal{E}}_0}{K - m\omega^2} \exp(i\omega t) = -\frac{e_0 \tilde{\mathcal{E}}}{m(\frac{K}{m} - \omega^2)} = -\frac{e_0 \tilde{\mathcal{E}}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (10.26)$$

Výchylka  $x$  podle (10.26), násobena nábojem elektronu  $e_0$ , dává elektronový dipólový moment vznikající posuvem jednoho elektronového orbitu. Účastní-li se na tomto ději stejnou měrou  $f$  elektronů z elektronového obalu atomu a počet atomů v objemové jednotce látky je  $N$ , máme pro velikost elektronové polarizace látky  $P$  (tj. pro elektrický moment objemové jednotky látky)

$$P = -N f e_0 x. \quad (*) \quad (10.27)$$

Z elementární fyziky jsou známy vztahy

$$P = \chi_e \epsilon_0 \tilde{\mathcal{E}}, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad (10.28)$$

kde  $\chi_e$  je elektrická susceptibilita látky a význam ostatních znaků byl již uveden. Užitím  $\epsilon_r = n^2$  (dielektrikum,  $\gamma = 0$ ,  $\mu_r = 1$ , viz (10.3)) dostáváme z (10.28)

$$\chi_e = n^2 - 1 \quad (10.29)$$

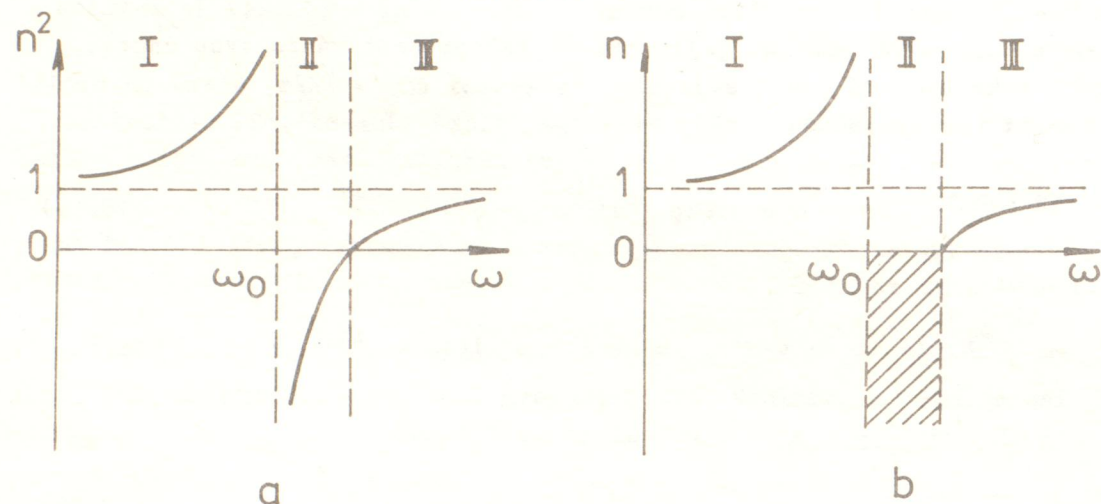
a dále pak podle (10.26), (10.27), (10.28) a (10.29)

$$P = \frac{N f e_0^2 \tilde{\mathcal{E}}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = (n^2 - 1) \epsilon_0 \tilde{\mathcal{E}},$$

$$n^2 - 1 = \frac{N f e_0^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (10.30)$$

\*) Znaménko minus v tomto vzorci má původ v tom, že záporně nabitý elektron se posunuje v opačném směru než jaký má intenzita elektrického pole.

Rovnice (10.30) se pokládá za základní disperzní vztah, který přes četná zjednodušení vystihuje již všechny základní rysy závislosti indexu lomu na frekvenci. Vzhledem k soudobému kvantověmechanickému popisu probíhajícího děje (článek 10.4.4) nazývá se veličina  $f$  ve vzorci (10.30) mohutnost nebo síla (atomového) oscilátoru. Závislost  $n^2$  a  $n$  na frekvenci  $\omega$  podle (10.30) je schematicky znázorněna v obr. 10.1a,b.



Obr. 10.1. Závislost kvadrátu indexu lomu  $n^2$  a indexu lomu  $n$  na frekvenci světelné vlny podle vzorce (10.30) (schematicky).

Rovná-li se frekvence dopadajícího záření vlastní frekvenci atomového oscilátoru  $\omega_0$ , atomy jeví maximum absorpce světla. Je to způsobeno tím, že prakticky všechna dopadající energie se spotřebuje na vybuzení vlastních kmitů atomového oscilátoru a atomy silně absorbují (jev rezonanční absorpce). Pozorováním maxima absorpce je zjištěno, že  $\omega_0$  leží téměř výhradně v ultrafialové oblasti spektra. Ve viditelné oblasti ( $\omega < \omega_0$ ) je tedy podle (10.30)  $n > 1$  a s rostoucí frekvencí  $\omega$  index lomu roste (výklad normální disperze, oblast I v obr. 10.1). Pro tuto oblast převádí se vzorec (10.30) na tvar

$$n^2 = 1 + \frac{C}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \quad C = \frac{N f e_0^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2},$$

v němž pro  $\omega \ll \omega_0$  máme

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2},$$

takže dostáváme

$$n^2 \approx 1 + C \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

Protože frekvence  $\omega = 2\pi\nu$  je nepřímo úměrná vlnové délce světla  $\lambda$ , platí podle poslední rovnice

$$n^2 \approx A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad (10.31)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou pro danou látku konstanty, tj. závislost  $n^2 = f(\lambda^{-2})$  vychází přímkově. Vzorec (10.31) jako empirický byl znám již dříve, a nazývá se Cauchyův. Vztahem (10.31) se ve viditelné a blízké infračervené oblasti řídí též index lomu jednoatomových polovodičů se silně kovalentní vazbou. Např. pro germanium je  $\omega_0 \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  na rozhraní viditelné a ultrafialové oblasti spektra a v této oblasti se u germania skutečně projevuje silná absorpce.

Nabude-li frekvence  $\omega$  hodnoty  $\omega_0$ , ztrácí vzorec (10.30) smysl. Selhání vzorce je způsobeno tím, že jsme zanedbali jevy tlumení (viz dále článek 10.4.3). Je-li  $\omega > \omega_0$ , avšak  $\omega$  velmi blízké k  $\omega_0$ , dostává se na pravé straně rovnice (10.30) velké záporné číslo,  $n^2$  vychází záporné a  $n$  ryze imaginární (v obr. 10.1 oblast II, v obr. 10.1b vyznačeno šrafováním). V tomto případě podle vzorce (10.16) (dielektrikum!) amplituda vlny s průnikem do prostředí exponenciálně klesá, stejně jako pro vodivé prostředí (vzorec (10.21)), v našem přiblížení chybí však prostorově periodická závislost  $\exp(-i\omega n x/c)$  (vzorec (10.20)). Tento výsledek lze interpretovat tak, že jde o oblast úplného odrazu; světelná vlna se neabsorbuje, ale dochází k rychlému útlumu v prostředí a všechna energie se odráží. - Podrobněji o této oblasti a jejím okolí viz dále článek 10.4.3.

Roste-li frekvence  $\omega$  v oboru  $\omega > \omega_0$  dále, prochází  $n^2$  i  $n$  nulou, je  $n^2 < 1$  i  $n < 1$  a v limitě  $\omega \gg \omega_0$  se  $n^2$  i  $n$  blíží jedné. Jde o známý jev, že pro některé látky již v daleké ultrafialové oblasti a pro všechny látky určitě v oblasti rentgenova záření je index lomu prakticky roven jedné, ve skutečnosti o velmi málo menší než jedna. Např. pro sklo při  $\lambda = 0,1 \text{ nm}$  se uvádí  $n = 1 - 1 \cdot 10^{-6}$ .

### 10.3.2. Příklad kovu (vodiče)

Z optických vlastností kovů probereme jev propustnosti alkalických kovů v ultrafialové oblasti spektra. V této oblasti je frekvence světelné vlny  $\nu \approx 10^{15} \text{ Hz}$  až  $10^{16} \text{ Hz}$ , tj. nejméně o řád vyšší než frekvence srážek elektronu s mřížkou  $1/\tau$  (relaxační doba  $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ , viz článek 8.4 a příklad 8.3). Vlivem elektromagnetického pole dochází tedy k velmi rychlým oscilacím systému elektronů (tzv. plazmové kmity), nikoli k přenosu náboje jejich usměrněným pohybem (vedení elektrického proudu).

U alkalických kovů lze vodivostní elektrony pokládat v dobrém přiblížení za volné. Pohybovou rovnici pro volný elektron (tj. nevázaný k atomovému jádru) dostaneme z rovnice (10.24) specializací  $K = 0$ ; stejnou specializací dostaneme řešení z rovnice (10.26), tedy

$$x = \frac{e_0 \xi}{m \omega^2}$$

( $x$  = výchylka elektronu). Protože alkalické kovy jsou jednomocné (jeden uvolněný elektron,  $f = 1$ ), máme pro velikost polarizace  $P$  podle vzorce (10.27)

$$P = -N e_0 x = -\frac{N e_0^2}{m \omega^2} \xi$$

a pro relativní permitivitu  $\epsilon_r$  s použitím vzorců (10.28)

$$\epsilon_r = 1 - \frac{N e_0^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

Počítáme-li s hodnotou  $\mu_r = 1$  a elektrickou vodivost kovu z důvodu  $\nu > 1/\tau$  (viz výše) neuvažujeme, vyplývá z rovnic (10.3)  $\epsilon_r = n^2$ , takže

$$n^2 = 1 - \frac{N e_0^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \quad (10.32)$$

Podle (10.32) je při vysokých frekvencích  $n^2 > 0$ ,  $n$  reálné a kov se chová jako dielektrikum propustné pro světlo; při nízkých frekvencích je však  $n^2 < 0$ ,  $n$  ryze imaginární a podle předchozího výkladu (oblast II v obr. 10.1) kov světlo odráží. Nejnižší frekvence  $\omega_{\min}$  světla, které kov ještě propustí, je dána podmínkou  $n^2 = 0$ , tedy podle (10.32)

$$\omega_{\min} = e_0 \sqrt{N/\epsilon_0 m}, \quad (10.33a)$$

neboli maximální vlnová délka  $\lambda_{\max}$  světla procházejícího kovem je (rychlost světla  $c = \lambda \nu = \lambda \omega / 2\pi$ )

$$\lambda_{\max} = (2\pi c/e_0) \sqrt{\epsilon_0 m/N}. \quad (10.33b)$$

Experimentálně naměřené hodnoty  $\lambda_{\max}$  jsou uvedeny v tab. 10.1 a velmi dobře souhlasí s počítanými hodnotami (viz cvičení). - Právě popsaný jev nastává i u silně legovaných polovodičů, kde přes malé hustoty elektronů může v důsledku nízkých  $m_n^*$  ležet  $\omega_{\min}$  až v infračervené oblasti.

Kov	Li	Na	K	Rb
$\lambda_{\max}/\text{nm}$	155	210	315	340

Tab. 10.1

#### 10.4. Upřesnění Lorentzova-Drudeova modelu. Výsledky kvantověmechanického řešení

Nejprve pojednáme o upřesnění vzorce (10.30) ve třech bodech klasického pojetí:

##### 10.4.1. Případ více absorpčních frekvencí

Každý atom má ve skutečnosti více než jednu absorpční frekvenci  $\omega_0$ . Rozlišíme-li tyto frekvence indexy  $i$  a označíme-li  $\sum_{(i)}$  součet přes všechny absorpční frekvence, máme místo (10.30) obecněji

$$n^2 - 1 = \frac{N e_0^2}{\epsilon_0 m} \sum_{(i)} \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (10.30a)$$

Znak  $f_i$  zůstává za sčítacím symbolem proto, že u jednotlivých absorpčních frekvencí se mohou uplatňovat různé počty elektronů, obecněji různé mohut-

nosti (síly) oscilátoru.

##### 10.4.2. Započtení interakce s okolními atomy

Při odvozování vzorců (10.30) a (10.30a) jsme předpokládali jednotlivé atomy bez vzájemného působení (interakce), tj. tyto vzorce by měly platit nejspíše pro plyny. U kapalin a pevných látek je nutno interakci započítat. Provedeme to tak, že každý atom si představíme umístěný v kulové dutině tvořené okolím všech ostatních atomů; na okolí kulové dutiny pohlížíme jako na spojité prostředí s elektrickou polarizací velikosti  $P$ . Podle výsledků elementární teorie elektrostatického pole je intenzita pole velikosti  $\mathcal{E}_d$  v kulové dutině zvýšena oproti velikosti intenzity vnějšího elektrického pole  $\mathcal{E}$  o intenzitu vnitřního (tzv. Lorentzova) pole velikosti  $(1/3\epsilon_0)P$  (viz cvičení), tedy

$$\mathcal{E}_d = \mathcal{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} P.$$

První ze vzorců (10.28) nabývá pak tvaru

$$P = \chi_e \epsilon_0 \mathcal{E}_d = \chi_e \epsilon_0 \left( \mathcal{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right), \quad (10.34)$$

kde  $\chi_e$  charakterizuje chování dielektrika za současného působení vnějšího i vnitřního (Lorentzova) pole. Výpočtem  $P$  dostáváme z (10.34)

$$P = \frac{\chi_e}{1 - \frac{1}{3}\chi_e} \epsilon_0 \mathcal{E}.$$

V tomto vztahu představuje zlomek

$$\frac{\chi_e}{1 - \frac{1}{3}\chi_e} = \frac{3\chi_e}{3 - \chi_e}$$

reálně pozorovanou a měřenou elektrickou susceptibilitu, tj. susceptibilitu, kterou odvozujeme z měřené velikosti polarizace  $P$  navozené vnějším elektrickým polem o intenzitě velikosti  $\mathcal{E}$ . Druhý ze vztahů (10.28) pro pozorovanou (měřenou) permitivitu  $\epsilon_r$  vázanou s měřeným (pozorovaným) indexem lomu  $n$  vztahem  $\epsilon_r = n^2$  nabývá pak tvaru

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{3\chi_e}{3 - \chi_e}$$

neboli po výpočtu  $\chi_e$

$$\chi_e = 3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (10.35)$$

Srovnáním (10.29) a (10.35) zjišťujeme, že započtení interakce atomů se projeví záměnou výrazu  $n^2 - 1$  zlomkem  $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ . Tuto záměnu provedeme ve vzorcí (10.30), a máme

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N f e_0^2}{3 \epsilon_0 m (\omega_{0i}^2 - \omega^2)} \quad (10.30b)$$

Vidíme, že (10.30) dostaneme z (10.30b) specializací  $n \approx 1$  ( $n^2 + 2 \approx 3$ ), tj. vzorec (10.30) platí pro kapaliny i pevné látky, je-li jejich index lomu blízký jednotce. Odtud plyne relativně dobrý souhlas vzorce (10.30) s experimentálními výsledky např. pro skla ( $n \approx 1,5$ ). Větší počet absorpčních frekvencí je možno vzít v úvahu stejným způsobem jako v článku 10.4.1.

### 10.4.3. Započtení tlumicích jevů

Nejzávažnější upřesnění vzorce (10.30) závisí v započtení tlumicích jevů. V tom případě připojí se na pravé straně rovnice (10.24) tlumicí člen ve tvaru  $-gm(dx/dt)$ , kde  $g$  je konstanta úměrnosti. Řešení se předpokládá opět ve tvaru (10.25). Po dosazení do pohybové rovnice a porovnání reálné a imaginární části (viz cvičení) plynou tyto výsledky:

Existuje fázový posuv  $\varphi \neq 0$  mezi výchylkou částice a intenzitou dopadajícího pole  $\vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ . Platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

specializace  $g = 0$  dává výsledek z článku 10.3.

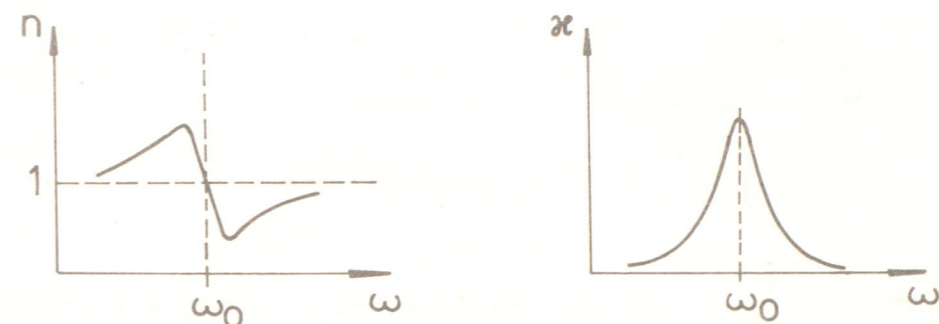
Index lomu je komplexní číslo. Užijeme-li rozkladu na reálnou a imaginární část podle (10.18), dostáváme

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= 1 + \frac{N e_0^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2} \\ 2n\kappa &= \frac{N e_0^2}{\epsilon_0 m} \frac{g\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

Rovnice (10.36) jsou odvozeny pro  $f = 1$ . Zobecnění na jiné hodnoty  $f$ , popř. na soubor hodnot  $f$ , je evidentní (viz výše článek 10.4.1), a lze též započítat interakci mezi atomy (viz výše článek 10.4.2). Specializací  $g = 0$  přecházejí rovnice (10.36) na rovnici (10.30). Pozorujeme plnou analogii s rovnicemi (10.19): index lomu  $n$  a index absorpce  $\kappa$  jsou v rovnicích (10.19) vyjádřeny prostřednictvím makroskopických materiálových parametrů, v rovnicích (10.36) prostřednictvím mikrofyzikálních veličin. Vzorce (10.22) a (10.23) zůstávají v platnosti, neboť nezáleží na tom, jakého původu jsou veličiny  $n$  a  $\kappa$ .

Z rovnic (10.36) lze odvodit jednotlivě průběhy  $n$  a  $\kappa$  na frekvenci  $\omega$ . Výsledek je znázorněn na obr. 10.2. Zjišťujeme: 1. Selhání vzorce (10.30) pro frekvenci  $\omega = \omega_0$  je odstraněno. Je-li  $\omega$  dosti vzdálené od  $\omega_0$ , dostáváme pro index lomu stejný průběh jako podle vzorce (10.30), obr. 10.1. 2. V okolí  $\omega_0$  pozorujeme pokles indexu lomu s rostoucí frekvencí, dostáváme tedy oblast anomální disperze indexu lomu (viz článek 10.1). 3. V okolí  $\omega_0$  nabývá index absorpce velkých hodnot, tj. v soulase s předchozím výkladem a výkladem v článku 10.2 dielektrikum elektromagnetické vlnění silně absorbuje i odráží.

Poslední bod 3. vysvětluje, proč se v určitých frekvenčních oborech dielektrika chovají z hlediska optických vlastností jako kovy. V těchto frek-



Obr. 10.2. Závislost indexu lomu  $n$  a indexu absorpce  $\kappa$  na frekvenci  $\omega$  při započteném tlumení (schematicky). Příklad tzv. kladné disperze, srov. s obr. 10.3.

venčních oborech má smysl definovat i proudovou hustotu  $j = N e_0(dx/dt)$ , odvodit vodivost  $\gamma = j/E$ , korelovat ji s mikrofyzikálními veličinami a na základě rovnic (10.19) hledat další analogie s kovy. Touto problematikou se však nebudeme zabývat.

### 10.4.4. Nástin kvantověmechanického řešení

Kvantověmechanicky řeší se disperze světla tak, že světelné pole s elektrickou intenzitou velikosti  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  se pokládá za vnější poruchu, působící na uvažovanou soustavu (atom, molekulu). Počítá se s dostatečně intenzivní vlnou a vlnovou délkou mnohem větší než rozměr soustavy (viz článek 10.1, bod d). Zde uvedeme pouze hlavní myšlenky odvození s udáním výsledků, co do podrobností odkazujeme na literaturu [1].

Nepůsobí-li světelná vlna, je soustava v kvantovém stavu  $E_k$ , jemuž přísluší vlnová funkce  $\psi_k^{(0)}$ , Schrödingerova rovnice má tvar

$$\mathcal{H}^{(0)} \psi_k^{(0)} = E_k \psi_k^{(0)}$$

kde  $\mathcal{H}^{(0)}$  je operátor celkové energie (hamiltonián) pro tento případ. Aplikujeme-li světelnou vlnu, je stav soustavy jiný (vznikají vynucené kmity). Tento stav je popsán vlnovou funkcí  $\psi_k$ , která vyhovuje Schrödingerově rovnici

$$i \hbar \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \mathcal{H} \psi_k = \mathcal{H}^{(0)} \psi_k + W \psi_k \quad (10.37)$$

kde  $W$  je poruchový potenciál světelné vlny. Má-li elektrické pole světelné vlny pouze  $x$ -ovou složku (srov. s článkem 10.3.1), pak při výchylce náboje  $e_0$  z rovnovážné polohy  $o$   $x$  je tento potenciál  $W = -e_0 x \vec{E} = -e_0 x E_0 \cos \omega t$ . Jako řešení rovnice (10.37) v prostoru ( $x$ ) a čase ( $t$ ) předpokládáme součet neporušené funkce a dvou dalších členů s frekvencemi  $\omega_k - \omega$  a  $\omega_k + \omega$ , tedy

$$\psi_k(x, t) = \psi_k^{(0)}(x) \exp(i\omega_k t) + u_k(x) \exp[i(\omega_k - \omega)t] + v_k(x) \exp[i(\omega_k + \omega)t]$$

\* Ve skutečnosti jde o energii. Termín "poruchový potenciál" ponecháváme proto, že je běžný v literatuře.



kde  $\omega_k = E_k/\hbar$  a  $u_k$  a  $v_k$  jsou hledané korekce k  $\psi_k^{(0)}$ . Po dosazení do (10.37) a vyhledání přibližného výrazu pro  $\psi_k(x,t)$  můžeme v první aproximaci vypočítat střední velikost elektrického momentu

$$p = e_0 \int \psi_k^*(x,t) \cdot x \cdot \psi_k(x,t) \cdot d\tau = e_0 \int |\psi_k(x,t)|^2 x \cdot d\tau,$$

kde integrace se vztahuje na celý prostor. Zjistíme, že moment  $p$  se skládá ze dvou částí: 1. z momentu nezávislého na čase, 2. z momentu, který je periodicky proměnný v čase s frekvencí rovnou frekvenci dopadajícího světla a který lineárně závisí na intenzitě elektrického pole. Pro problém disperze má význam pouze tento druhý (indukovaný) moment, jehož velikost označíme  $p_t$ . Dostaneme pro ní

$$p_t = 2 e_0^2 \mathcal{E} \sum_{(n)} a_{nk}^2 \frac{E_n - E_k}{(E_n - E_k)^2 - \hbar^2 \omega^2}, \quad (10.38)$$

kde  $E_n$  a  $E_k$  jsou energie v příslušných kvantových stavech soustavy a

$$a_{nk} = \int \psi_n^{(0)} \cdot x \cdot \psi_k^{(0)} \cdot d\tau.$$

Rovnice (10.28) a (10.29) dávají  $P = N p_t = (n^2 - 1) \mathcal{E}_0 \mathcal{E}$ , tedy podle (10.38)

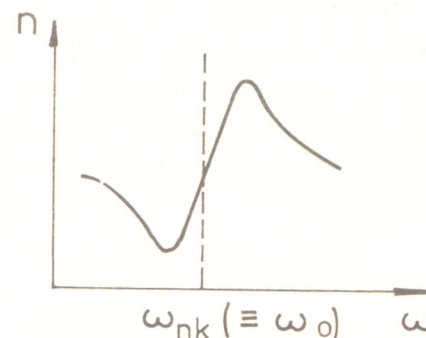
$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= \frac{2N e_0^2}{\mathcal{E}_0} \sum_{(n)} a_{nk}^2 \frac{E_n - E_k}{(E_n - E_k)^2 - \hbar^2 \omega^2} = \\ &= \frac{2N e_0^2}{\mathcal{E}_0 \hbar} \sum_{(n)} a_{nk}^2 \frac{\omega_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} = \\ &= \frac{N e_0^2}{\mathcal{E}_0 m} \sum_{(n)} \frac{f_{nk}}{\omega_{nk}^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (10.39)$$

kde

$$f_{nk} = \frac{2 m a_{nk}^2 \omega_{nk}}{\hbar}. \quad (10.40)$$

Uvědomíme-li si, že  $\omega_{nk}$  jsou frekvence vyzařované atomem, zjišťujeme plnou analogii mezi klasickým vzorcem (10.30a) a kvantovým vzorcem (10.39). Podle kvantové teorie nejsou však mohutnosti (síly) oscilátoru  $f_{nk}$  celá čísla, jak se i potvrzuje experimentem. V (10.40) veličina  $a_{nk}^2$  určuje pravděpodobnost přechodu, při němž se vyzáří kvantum energie s frekvencí  $\omega_{nk}$ ; mohutnosti (síly) oscilátoru jsou tedy těmito pravděpodobnostem úměrné.

Pozoruhodný je případ negativních hodnot  $f_{nk}$ , které se vyskytnou, je-li  $\omega_{nk} < 0$ ,  $E_n < E_k$ . K tomu je zapotřebí, aby atomy byly ve vzbuzeném (excitovaném) stavu, zatím co běžná měření se provádějí v základním stavu. V případě  $f_{nk} < 0$  má disperzní křivka průběh podle obr. 10.3; jde o tzv. negativní (zápornou) disperzi, kterou klasická teorie nezná. Negativní disperze byla též potvrzena experimentálně (Ladenburg, r. 1930).



Obr. 10.3. Tzv. záporná disperze (schematicky). Srov. s obr. 10.2.

#### 10.5. Mezipásové přechody v polovodičích

Pás zakázaných energií šířky  $E_g$  (článek 7.5), u polovodičů relativně úzký ve srovnání s izolanty, lze překonat dodáním světelného kvanta s dostatečnou energií. Přitom dojde k vytvoření páru elektron (ve vodivostním pásu) a díra (ve valenčním pásu). Absorpce světla, která takto vzniká, je pro polovodiče typická.

Soustředíme se nejprve na přímé přechody podle článku 7.4. Minimální frekvence  $\omega_g$ , nad níž začíná oblast spojitě absorpce, je zřejmě dána vzorcem

$$E_g = \hbar \omega_g. \quad (10.41)$$

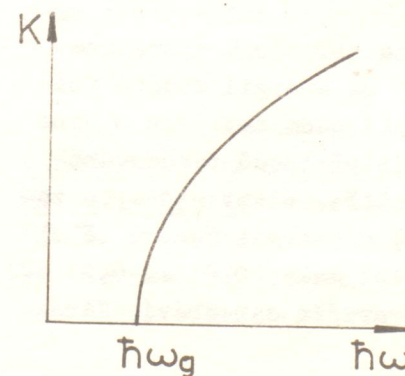
Uvědomíme-li si vztah (7.6) mezi hybností (obecněji kvazihybností) a vlnovým číslem (obecněji vlnovým vektorem), podmínka zachování hybnosti uvažovaného děje zní

$$\hbar k + \hbar k_i = \hbar k_f \text{ neboli } k + k_i - k_f = 0, \quad (10.42a)$$

kde  $k$  je vlnové číslo světelného kvanta a  $k_f$  a  $k_i$  vlnové čísla elektronu v krystalové mřížce v konečném a počátečním stavu (po a před absorpcí světelného kvanta). Protože však podle (7.25)  $k_f \approx k_i \approx 1/a$  a podle (3.28)  $k = 2\pi/\lambda$ , platí pro oblast viditelného světla a jemu blízké frekvence  $k \ll k_f, k_i$  a podmínka (10.42a) přechází ve vyhovujícím přiblížení na tvar

$$k_f = k_i. \quad (10.42b)$$

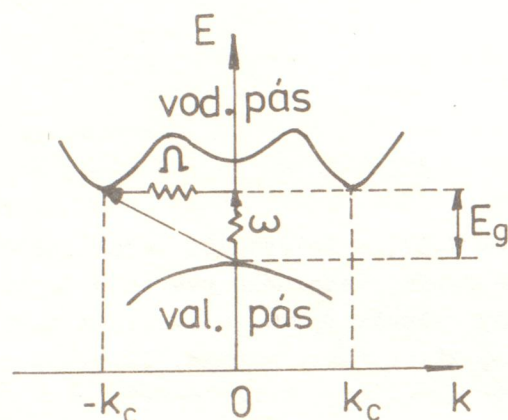
Průběh absorpční konstanty  $K$  pro přímý přechod ve vlastním polovodiči za nízkých teplot, kdy lze zanedbat tepelnou excitaci elektronů z valenčního do vodivostního pásu (teoreticky za absolutní nuly), je v závislosti na energii fotonu  $\hbar \omega$  znázorněn schematicky v obr. 10.4. Začátek absorpce (tzv. hrana



Obr. 10.4. Absorpce ve vlastním polovodiči při přímém přechodu (schematicky).

absorpce, bod  $\hbar\omega_g$ ) určuje šířku zakázaného pásu podle (10.41).

Jak bylo již uvedeno v závěru článku 7.5, neleží v zobrazení  $E = E(k)$  nejnížší bod spodní hranice vodivostního pásu nutně ve vertikálním směru nad nejvyšším bodem horní hranice valenčního pásu. Takový případ je schematicky znázorněn v obr. 10.5, kde je též vyznačena šířka zakázaného pásu  $E_g$ . Přechod



Obr. 10.5. Nepřímý přechod ve vlastním polovodiči (schematicky).

elektronu z valenčního do vodivostního pásu (překonání energie  $E_g$ ) se pak zřejmě neděje se zachováním hybnosti elektronu podle (10.42b), nýbrž vlnové číslo elektronu v konečném a počátečním stavu se liší. Přechod tohoto druhu se nazývá nepřímý; v obr. 10.5 je šikmou šipkou znázorněn nepřímý přechod mezi stavy s  $k_i = 0$  a  $k_f = -k_c$ .

Pro splnění podmínek zachování energie a hybnosti se při nepřímých přechodech uplatňují kvanta kmitové energie krystalové mřížky, tj. fonony (viz článek 3.4). V limitě  $T \rightarrow 0$  K, kdy v látce fonony neexistují, vzniká (emituje se) při absorpci fotonu fonon, který lze charakterizovat vlnovým číslem  $\mathcal{K}$  a frekvencí  $\Omega$  (viz analogii s fotony, článek 3.4). Zákon zachování energie pak zní

$$\hbar\omega = E_g + \hbar\Omega \quad (10.43a)$$

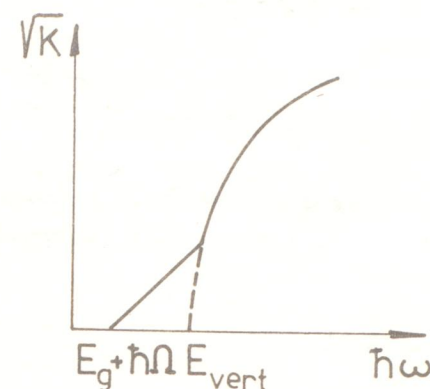
a zákon zachování hybnosti, uvědomíme-li si, že pro foton, podobně jako výše, je  $k \approx 0$

$$k = k_c + \mathcal{K} \approx 0,$$

tedy přibližně

$$\mathcal{K} = -k_c. \quad (10.43b)$$

Účast fotonu a fononu na nepřímém přechodu je na obr. 10.5 vyznačena schematicky vlnovkami. Závislost absorpční konstanty na energii fotonů znázorňuje pro tento případ schematicky obr. 10.6; vnější podmínky jsou stejné jako výše u přímého přechodu (obr. 10.4). U nepřímých přechodů pozorovaná absorpční hrana nikdy neurčuje přímo hodnotu  $E_g$ , protože oblast absorpce začíná při energii  $E_g$  zvýšené (nebo snížené, viz dále) o energii fononu  $\hbar\Omega$  (viz obr. 10.6). Energie fononu bývá však zanedbatelně malá (0,01 až 0,03 eV) vůči šířce zakázaného pásu  $E_g$  ( $\approx 1$  eV), takže se zpravidla zanedbává. Jinak



Obr. 10.6. Absorpce ve vlastním polovodiči při nepřímém přechodu (schematicky).

lze veličinu  $E_g$  určit též z teplotní závislosti měrné elektrické vodivosti (viz dále kapitulu 12), avšak jedině optická měření mohou rozhodnout mezi přímým a nepřímým přechodem. Energie  $E_{vert}$ , získaná extrapolací z oblasti silné absorpce (na obr. 10.6 čárkovaně), znamená minimální energii pro přímý vertikální přechod podle obr. 10.5 při  $k = 0$ , kdy vzniká pár elektron + díra bez účasti fononu.

Přímý přechod se označuje znakem d (direct), nepřímý i (indirect); v tab. 10.2 sestavené podle [2] jsou uvedeny údaje o typu přechodu a  $E_g$  pro základní polovodivé látky (rozumí se za velmi nízkých teplot,  $T \rightarrow 0$  K).

Krystal	přechod	$E_g$ /eV	Krystal	přechod	$E_g$ /eV
Si	i	1,17	Te	d	0,33
Ge	i	0,74	PbS	d	0,29
InSb	d	0,24	PbSe	d	0,17
InAs	d	0,43	PbTe	d	0,19
InP	d	1,42	CdS	d	2,58
GaP	i	2,32	CdSe	d	1,84
GaAs	d	1,52	CdTe	d	1,61
GaSb	d	0,81	SnTe	d	0,30
AlSb	i	1,65	(diamant)	i	5,40

Tab. 10.2

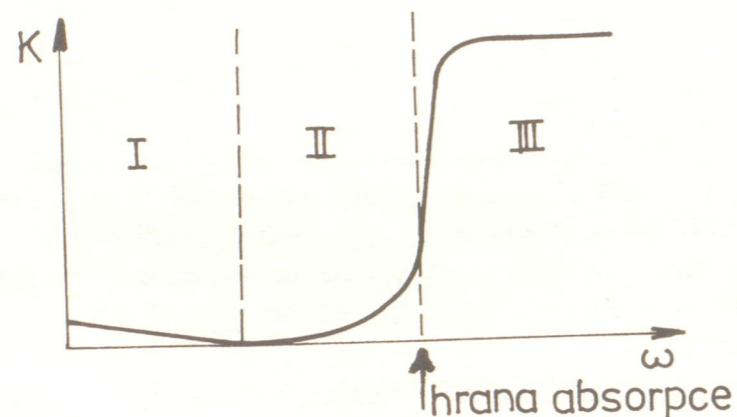
Vznik fononu, uvažovaný výše, je omezen na případ extrémně nízkých teplot. Při poněkud vyšších teplotách, existují-li již v látce fonony, může se při absorpci fotonu fonon absorbovat (zanikat, anihilovat). Místo (10.43a) máme pak rovnici

$$\hbar\omega = E_g - \hbar\Omega.$$

Je na místě uvědomit si, že při nepřímých přechodech platí zákony zachování energie a hybnosti (jako v klasické fyzice), neplatí však zákon zachování počtu částic (kvazičástic: fotonů, fononů), jež jsou kvantové povahy (srov. s kvantovou mechanikou a jadernou fyzikou). Upozorníme též, že v obecném případě je potřeba rovnice pro zachování hybnosti psát ve vektorovém tvaru (místo vlnového čísla nastoupí vlnový vektor).

Jev, že absorpcí světelného kvanta vzniká pár elektron - díra (u vlastních polovodičů), popř. dochází k excitaci elektronu z donorové hladiny do vodivostního pásu nebo z valenčního pásu na akceptorovou hladinu (u příměsových polovodičů, kapitola 11), má praktické užití v optoelektronických prvcích (kapitola 13).

Závěrem tohoto článku shrneme a doplníme poznatky o frekvenčním průběhu absorpce u izolantů a polovodičů (tj. za existence  $E_g$ ). V obr. 10.7 je hrubě



Obr. 10.7. Závislost absorpce na frekvenci u dielektrik (izolantů) a polovodičů (hrubě schematicky).

schematicky znázorněna závislost absorpční konstanty  $K$  (spíše v logaritmickém měřítku) na frekvenci světla  $\omega$ . Zásadně existují tři oblasti: V oblasti I, pokrývající přibližně frekvence středního infračerveného oboru spektra, je  $K \approx 10^0$  až  $10^2 \text{ cm}^{-1}$  (index absorpce  $\mathcal{K} \approx 10^{-5}$ ). Dochází zde nejvýše k přechodům elektronů v jednom pásu (valenčním nebo vodivostním) na hladiny uvolněné excitací elektronů. V oblasti II, která leží před hranou absorpce, jsou čisté a bezporuchové polovodiče a izolanty prakticky průhledné. V blízkosti absorpční hrany objevuje se absorpce v důsledku zachycení elektronu na příměsových hladinách v zakázaném pásu (donory, akceptory, viz kapitola 11). V oblasti III, která pro většinu polovodičů leží v blízkém infračerveném nebo viditelném oboru spektra, absorpce prudce vzrůstá a pozoruje se  $K \approx 10^4$  až  $10^6 \text{ cm}^{-1}$  (index absorpce  $\mathcal{K} \approx 6$ ). U polovodičů dochází zde k přímým mezipásovým přechodům, které byly probírány výše v tomto článku, příslušná hrana absorpce je v obr. 10.7 vyznačena šipkou a silná absorpce zřetelně nabíhá nad slabou absorpcí z oblasti II. U izolantů se v oboru ultrafialového záření uplatňuje rezonanční absorpce atomových oscilátorů (článek 10.3 a 10.4), popř. též mezipásové přechody.

### 10.6. Magnetooptické jevy

Magnetooptické jevy vznikají při interakci světla s prostředím za přítomnosti magnetického pole.

#### 10.6.1. Faradayův jev

Jako příklad probereme poněkud podrobněji podélný Faradayův jev v magne-

tický neuspořádaných látkách. Tímto jevem rozumíme otáčení kmitové roviny lineárně polarizovaného světla, šíří-li se světlo prostředím ve směru siločar magnetického pole.

Jak známo, lineárně polarizovanou vlnu lze nahradit dvěma kruhově polarizovanými vlnami, pravotočivou (znak +) a levotočivou (znak -). Otočení kmitové roviny lineárně polarizované vlny o určitý úhel  $\alpha$  vzniká, posunou-li se obě kruhově polarizované vlny fázově o určitý úhel  $\delta$ . Z nauky o vlnění a optiky víme, že  $\alpha = \delta/2$ . Jsou-li známy indexy lomu prostředí  $n_+$  a  $n_-$  pro obě kruhově polarizované vlny, lze při tloušťce vzorku  $D$  vypočítat  $\alpha$  takto: Rozdíl optických drah obou vln je dán součinem  $D(n_+ - n_-)$ . Označíme-li  $\lambda$  vlnovou délku světla, platí dále  $\delta/2\pi = D(n_+ - n_-)/\lambda$ , takže

$$\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\omega D}{2c} (n_+ - n_-), \quad (10.44)$$

kde  $\omega$  je kruhová frekvence světelné vlny a  $c$  její rychlost ve vakuu ( $\lambda \nu = c$ ,  $\omega = 2\pi \nu$ ).

Z atomové fyziky je známo, že při vložení látky do magnetického pole vzniká u atomů látky precese elektronových orbitů kolem směru indukce pole. Pro úhlovou rychlost  $\omega_L$  této tzv. Larmorovy precese platí (viz též cvičení)

$$\omega_L = \frac{e_0 B}{2m}, \quad (10.45)$$

kde  $e_0$  a  $m$  jsou náboj a hmotnost elektronu a  $B$  velikost indukce aplikovaného magnetického pole. Interakce pravotočivé (+) a levotočivé (-) kruhově polarizované vlny s prostředím se za existence Larmorovy precese projeví tím, že jedna vlna se ve svém postupu prostředím urychlí, druhá zbrzdí, tzn. pravotočivé a levotočivé vlně přísluší různý index lomu. Rozdílný index lomu pro obě vlny vypočteme tak, že do základního disperzního vztahu (10.30) dosadíme místo původní vlastní frekvence atomového oscilátoru  $\omega_0$  jednu frekvenci sníženou, druhou zvýšenou o frekvenci Larmorovy precese  $\omega_L$ , tedy

$$\left. \begin{aligned} n_+^2 - 1 &= \frac{N f_+ e_0^2}{\epsilon_0 m [(\omega_0 - \omega_L)^2 - \omega^2]}, \\ n_-^2 - 1 &= \frac{N f_- e_0^2}{\epsilon_0 m [(\omega_0 + \omega_L)^2 - \omega^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

Dále označíme  $f$  mohutnost (sílu) oscilátoru a  $n$  index lomu prostředí za nepřítomnosti magnetického pole (velikost indukce  $B = 0 \text{ T}$ ). Předpokládáme, že platí

$$f_+ = f_- = f/2, \quad (10.47)$$

a protože rozdíl mezi  $n_+$  a  $n_-$  je zřejmě velmi malý, píšeme

$$n_+ - n_- = \frac{n_+^2 - n_-^2}{n_+ + n_-} \approx \frac{n_+^2 - n_-^2}{2n}. \quad (10.48)$$

Podle (10.44), (10.46), (10.47) a (10.48) vychází pak

$$\alpha = \frac{N f e_0^2 \omega D}{8 \epsilon_0 m n c} \left[ \frac{1}{(\omega_0 - \omega_L)^2 - \omega^2} - \frac{1}{(\omega_0 + \omega_L)^2 - \omega^2} \right] \quad (10.49)$$

Sloučením zlomků v hranaté závorce dostáváme

$$\frac{[(\omega_0 + \omega_L)^2 - \omega^2] - [(\omega_0 - \omega_L)^2 - \omega^2]}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 - \omega^2][(\omega_0 + \omega_L)^2 - \omega^2]} = \frac{4 \omega_0 \omega_L}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (10.50)$$

zanedbáme-li ve jmenovateli  $\omega_L$  jako malé vůči  $\omega_0$ .

Užitím (10.45) a (10.50) plyne z (10.49)

$$\alpha = \frac{N f e_0^3 \omega_0 \omega}{4 \epsilon_0 m^2 n c (\omega_0^2 - \omega^2)^2} D B \quad (10.51)$$

Diferencováním rovnice (10.30) získáme vzorec pro disperzi indexu lomu  $dn/d\omega$ , a to

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{N f e_0^2}{\epsilon_0 m n} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

takže (10.51) přechází na tvar

$$\alpha = V D B, \quad (10.52a)$$

kde

$$V = \frac{e_0 \omega_0}{4 m c} \frac{dn}{d\omega} \quad (10.52b)$$

je tzv. Verdetova konstanta. Její hodnoty pro vybrané látky při vlnové délce světla  $\lambda = 589 \text{ nm}$  a za pokojové teploty podává tab. 10.3 (podle [3]). Verdetova konstanta se pokládá za kladnou, má-li otočení kmitové roviny světla stejný směr jako proud budící magnetické pole. Při známé Verdetově konstantě lze vztahu (10.52a) užít k měření velikosti indukce B.

Látka	$V$ rad.m <sup>-1</sup> .T <sup>-1</sup>	Látka	$V$ rad.m <sup>-1</sup> .T <sup>-1</sup>
voda	3,81	flintové sklo	28,2
methylalkohol	2,79	kuchyňská sůl	10,0
aceton	3,26	diamant	6,8
benzen	8,73	sfalerit	65,7

Tab. 10.3

U pevných látek je hmotnost elektronu  $m$  v (10.52b) zastoupena jeho efektivní hmotností  $m_n^*$  (článek 7.6). Po určitých úpravách vzorců (10.52a,b) lze jich pak ve spojení s experimentálním sledováním Faradayova jevu použít k určování efektivní hmotnosti elektronů, event. děr. Blíže o tom z hlediska polovodičů viz např. [4], str. 316.

Jako příklad studia polovodičů uveďme výsledky Palika a ost. (r. 1961)

na polovodivé sloučenině InSb s hustotou volných elektronů  $\eta = 4 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$  \*) při teplotě kapalného dusíku a s efektivní hmotností elektronu  $m_n^* = 0,019 m$ . Při tloušťce vzorku  $D = 0,75 \text{ mm}$  a vlnové délce světla  $\lambda = 22,6 \mu\text{m}$  (polovodič InSb je v infračervené oblasti průhledný) byl v poli o velikosti indukce  $B = 1,2 \text{ T}$  naměřen úhel otočení kmitové roviny světla  $\alpha = 3,4 \text{ rad}$ , tj. Verdetova konstanta (10.52a) vychází  $V = 3,8 \cdot 10^3 \text{ rad.m}^{-1}.\text{T}^{-1}$ .

### 10.6.2. Přehled jiných magnetooptických jevů

Jev Cottonův-Moutonův neboli Voigtův je dvojlom světla vyvolaný v magneticky neuspořádaném prostředí magnetickým polem; směr intenzity pole a směr šíření světla v prostředí jsou přitom navzájem kolmé. Vznikají dvě kmitové roviny světla, jedna vlna kmitá ve směru intenzity magnetického pole (znak  $\parallel$ ), druhá kolmo k intenzitě pole (znak  $\perp$ ). Tyto vlny se prostředím šíří různou rychlostí, přísluší jim tedy rozdílné indexy lomu  $n_{\parallel}$  a  $n_{\perp}$ . Je-li  $D$  tloušťka vzorku, platí pro fázový posuv  $\sigma'$  (srov. s (10.44))

$$\sigma' = \frac{\omega D}{c} (n_{\parallel} - n_{\perp}).$$

Ukazuje se, že rozdíl indexů lomu  $n_{\parallel} - n_{\perp}$  je úměrný čtverci velikosti indukce pole  $B^2$ , tedy též

$$\sigma' = C D B^2, \quad (10.53)$$

kde  $C$  je tzv. Cottonova-Moutonova (Voigtova) konstanta.

Jev sám má význam pro měření polí, zejména silných (úměrnost  $\sigma' \sim B^2$ ). Teoretický výraz pro  $C$  obsahuje u pevných látek efektivní hmotnost elektronu  $m_n^*$ , lze tedy experimentálním sledováním závislosti (10.53)  $m_n^*$  určit. Blíže o tom a o vztahu k Faradayově jevu viz např. [4], str. 318.

Pro příklad uveďme, že u polovodivého InSb, za stejných podmínek jako v závěru článku 10.6.1, bylo v poli s velikostí indukce  $B = 2 \text{ T}$  naměřeno  $\sigma' = 1,2 \text{ rad}$ , tj. v tomto případě vychází  $C = 4 \cdot 10^2 \text{ rad.m}^{-1}.\text{T}^{-2}$ .

Faradayův jev v látkách se spontánním magnetickým uspořádáním. Prochází-li lineárně polarizované světlo prostředím tloušťky  $D$ , jehož magnetizace má nenulovou složku  $M$  ve směru šíření světla, stává se světlo obecně elipticky polarizovaným. Protože však elipticita světla je velmi malá, pozorujeme prakticky pouze otočení  $\alpha$  kmitové roviny polarizovaného světla. Platí  $\alpha = K D M$ , kde  $K$  je konstanta úměrnosti (někdy Kundtova konstanta). Např. při kolmém průchodu světla železnou vrstvou tloušťky  $100 \text{ nm}$  zmagnetovanou kolmo k rovině do nasycení ( $M_B = 1,7 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-1}$ ) měří se ve viditelném oboru (tenká vrstva je průhledná)  $\alpha \approx 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ , tedy v tomto případě  $K \approx 0,2 \text{ rad.A}^{-1}$ .

Kerrův magnetooptický jev (lišit od Kerrova elektrooptického jevu, který je elektrickou obdobou Cottonova-Moutonova (Voigtova) magnetooptického jevu!). Dopadá-li lineárně polarizované světlo na povrch spontánně zmagnetované látky, je světlo pozorované po odrazu obecně elipticky polarizováno. Ze stejných

\*) Hustotu volných elektronů značíme v této kapitole  $\eta$ , protože znak  $n$  je zadán pro index lomu.

důvodů jako výše stačí omezit se na otáčení kmitové roviny světla. Např. u železa, zmagnetovaného do nasycení kolmo k povrchu odrážejícímu světlo, je ve viditelném oboru otočení kmitové roviny světla asi  $6 \cdot 10^{-3}$  rad. Při jiných orientacích magnetizace vůči reflektujícímu povrchu jsou otočení menší.

Obou posledně uvedených jevů lze použít ke sledování doménové struktury magnetik. Otočení kmitové roviny světla závisí na velikosti magnetizace a její orientaci vzhledem k povrchu vzorku a směru šíření světla. Pozorujeme-li tedy prošlé nebo odražené světlo vhodně nastaveným analyzátozem, jeví se různě uspořádané domény jako světlejší a tmavší plošky. Pozorovaný obraz doménové struktury je kontrastnější u Faradayova než u Kerrova jevu (srov. otočení kmitové roviny  $3,5 \cdot 10^{-2}$  rad a  $6 \cdot 10^{-3}$  rad).

#### Literatura

- [1] Blochincev D.I.: Základy kvantové mechaniky, nakl. ČSAV Praha 1956, str. 327  
Davydov A.S.: Kvantová mechanika, SPN Praha 1978, str. 438
- [2] Kittel Ch.: Introduction to Solid State Physics, 5. vydání J. Wiley N. York 1976, kap.8
- [3] Brož J., Roskovec V., Valouch M.: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL Praha 1980, str. 135
- [4] Velický B., Tauc J., Trlifaj M., Prosser V.: Interakce elektromagnetického záření s pevnou látkou. Ve sborníku "Teorie pevných látek", nakl. ČSAV Praha 1965

#### Význam použitých symbolů

$A, A_0, A_m, A_R$  - amplitudy elektromagnetické vlny  
 $A, B, C$  - konstanty v Cauchyově vzorci (10.31)  
 $B$  - velikost magnetické indukce  
 $C$  - Cottonova-Moutonova (Voigtova) konstanta  
 $D$  - tloušťka vzorku  
 $f$  - mohutnost (síla) oscilátoru  
 $g$  - konstanta tlumení  
 $\vec{H}$  - intenzita magnetického pole  
 $\mathcal{H}, \mathcal{H}^{(0)}$  - hamiltonián  
 $\mathcal{E}, \Omega$  - energie fononu  
 $I, I_0$  - intenzity elektromagnetické vlny  
 $k, k_1, k_f, \mathcal{K}$  - vlnová čísla  
 $K$  - absorpční konstanta; tuhost vazby; Kundtova konstanta  
 $n$  - index lomu (absolutní)  
 $\tilde{n}$  - komplexní index lomu  
 $N$  - hustota atomů (iontů)  
 $p, p_t$  - velikosti elektrických momentů  
 $P$  - velikost elektrické polarizace  
 $R$  - odrazivost  
 $V$  - Verdetova konstanta  
 $\mathcal{W}$  - poruchový potenciál

$\alpha$  - otočení kmitové roviny lineárně polarizovaného světla  
 $\delta, \varphi$  - fázový posuv  
 $\epsilon$  - permitivita  
 $\epsilon_r$  - relativní permitivita  
 $\eta$  - hustota volných elektronů  
 $\chi$  - index absorpce  
 $\mu$  - permeabilita  
 $\mu_r$  - relativní permeabilita  
 $\tau$  - relaxační doba elektronu;  $d\tau$  - prostorový element  
 $\chi_e$  - elektrická susceptibilita  
 $\omega_L$  - kruhová frekvence Larmorovy precese

## 11. ROZDĚLENÍ VOLNÝCH ČÁSTIC S NÁBOJEM V POLOVODIČÍCH A IZOLANTECH

### 11.1. Úvodní poznámky

Polovodivé materiály zaujímají v současné době velmi důležité místo pro svoje velmi značné technické aplikace. Nejjednodušší jsou elementární polovodiče, poněvadž se skládají pouze z jednoho druhu atomů. Tím odpadají problémy nestechiometrie. Nejdůležitějším elementárním polovodivcem je křemík, který pro své vlastnosti má zabezpečeno výhradní postavení při výrobě diod, tranzistorů, tyristorů atd. V současné době se začínají uplatňovat také binární polovodiče.

Nejdůležitějšími vlastnostmi polovodičů, na kterých se zakládají jejich technické aplikace, jsou jednak závislost jejich elektrické vodivosti i jiných veličin na hustotě příměsí a jednak možnost ovlivnění fyzikálních vlastností elektrickým polem, magnetickým polem, světlem atd. Tím se mohou v širokém rozmezí měnit elektrické vlastnosti daného polovodiče.

Pro rozhodnutí, zda je daná látka polovodič nebo ne, je důležitá znalost energiového modelu. Polovodivé látky mají při  $T = 0 \text{ K}$  plně obsazené elektrony pás valenční a prázdný pás vodivostní. Šířka zakázaného pásu může nabývat hodnot od velmi malých ( $\approx 0 \text{ eV}$ ) do  $3 \text{ eV}$  (uváděné kritérium pro rozlišení mezi polovodivcem a izolantem). Kritérium určování polovodivé látky z teplotní závislosti měrné vodivosti uváděné v některých publikacích neplatí obecně. Při úplné ionizaci příměsí bude teplotní závislost měrné vodivosti stejná jako pro kovy (bližší viz 12.2). Při pokojové teplotě se měrná vodivost polovodivých látek pohybuje v rozmezí mnoha řádů (od  $10^{-8} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  do  $10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ).

V počátečním stadiu výzkumu fyzikálních vlastností polovodičů se používal nejjednodušší model struktury energiových pásů, který předpokládal, že oba pásy (valenční a vodivostní) mají nedegenerované extrémy ve středu Brillouinovy zóny, tj. v bodě  $k = 0$  a že závislost  $E$  na  $k$  je v tomto okolí parabolická a efektivní hmotnosti jsou izotropní. Pro vodivostní pás pak platí vztah

$$E(k) = E_C + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} \quad (11.1a)$$

a pro valenční pás

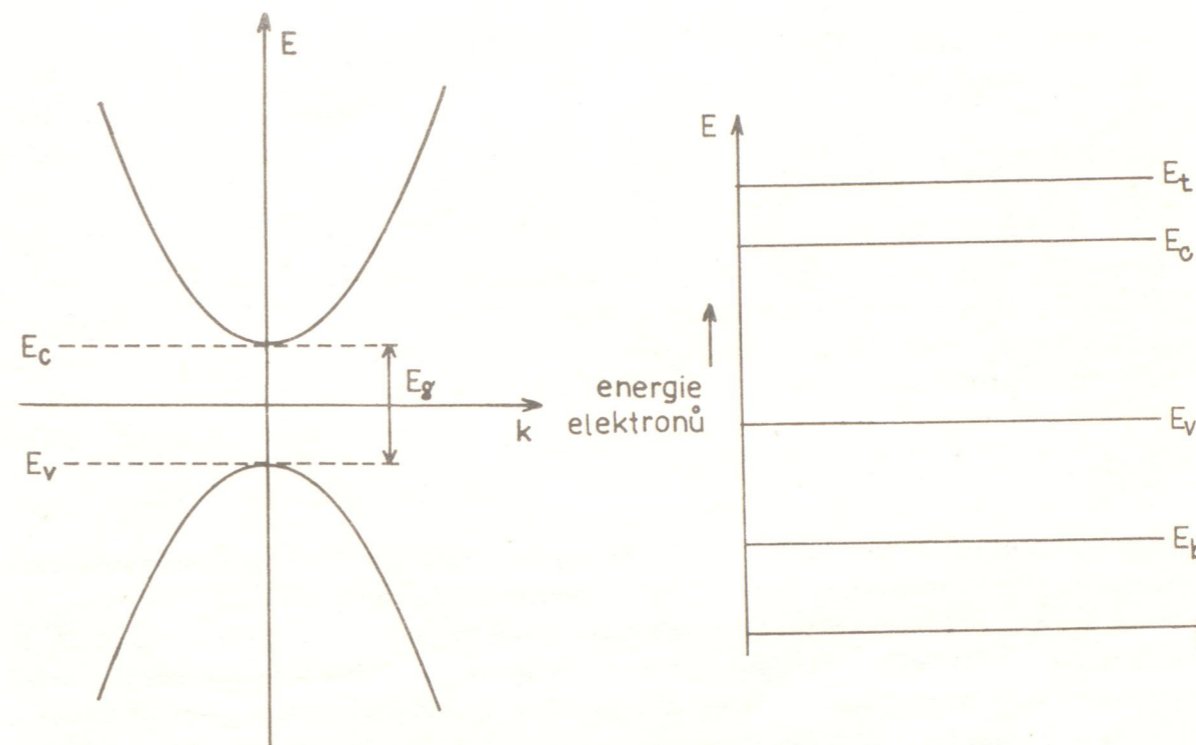
$$E(k) = E_V - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*} \quad (11.1b)$$

Zde jsou  $m_n^*$ ,  $m_p^*$  efektivní hmotnosti elektronů a děr. Grafické znázornění  $E$  na  $k$  pro tento případ je na obr. 11.1. Vodivostní pás je oddělen od valenčního pásu pásem zakázaných energií o šířce  $E_g$ . Izoenergiové plochy (tj. plochy konstantní energie) jsou kulové plochy. Takový popsaný model se často nazývá model standartního polovodiče.

Podrobnější výzkumy ukázaly, že průběhy pásů mají složitější strukturu. Pro svou jednoduchost budeme proto v našich úvahách vycházet téměř výhradně z modelu standartního polovodiče.

Místo závislosti  $E = E(k)$  se často používá pásový model (energiový model) zobrazující závislost  $E = E(x)$  (obr.11.2). Osa  $x$  je totožná se zvoleným

směrem v krystalu a model se používá ke znázornění místních změn v průběhu energie.



Obr.11.1. Závislost  $E = f(k)$  pro vodivostní a valenční pás

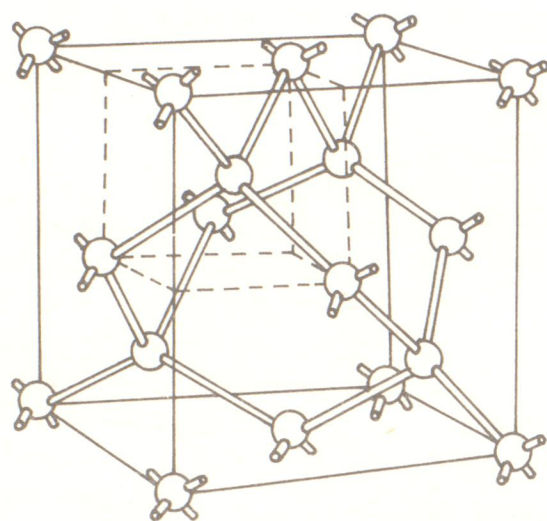
Obr.11.2. Energiové (pásové) schéma pro elektrony

### 11.2. Valenční polovodiče

Mezi první polovodiče, které se podařilo vyrobit v dostatečné čistotě a jako dostatečně velké monokrystaly a které našly značné uplatnění v elektrickém průmyslu, patří prvky Ge a Si.

Tyto prvky patří do 4. skupiny periodické soustavy prvků. Krystalují v kubické soustavě a mají diamantovou strukturu (obr. 11.3). Lze si ji představit jako plošně centrovanou kubickou mřížku s bází tvořenou dvěma atomy; jeden ve vrcholu a druhý v  $1/4$  tělesové uhlopříčky od příslušného vrcholu. Každý atom Ge nebo Si je obklopen čtyřmi sousedními atomy, které leží ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu.

Každý atom má čtyři valenční elektrony. Volné atomy těchto prvků mají dva valenční elektrony ve stavu  $s$  a dva ve stavu  $p$ . Pro germanium je elektronová konfigurace v atomu následující:  $1 s^2, 2 s^2, 2 p^6, 3 s^2, 3 p^6, 3 d^{10}, 4 s^2, 4 p^2$  a pro křemík  $1 s^2, 2 s^2, 2 p^6, 3 s^2, 3 p^2$ . Z vlnových funkcí popisujících stavy  $s$  a  $p$  se vytvoří hybridní vlnové funkce, elektronová konfigurace se změní na  $3 s^1, 3 p^3$  (u křemíku), a vzniknou čtyři ekvivalentní chemické vazby. Každý atom přispívá k jedné chemické vazbě jedním elektronem. Oba dva elektrony jsou sdíleny oběma atomy. Tato chemická vazba se nazývá kovalentní.



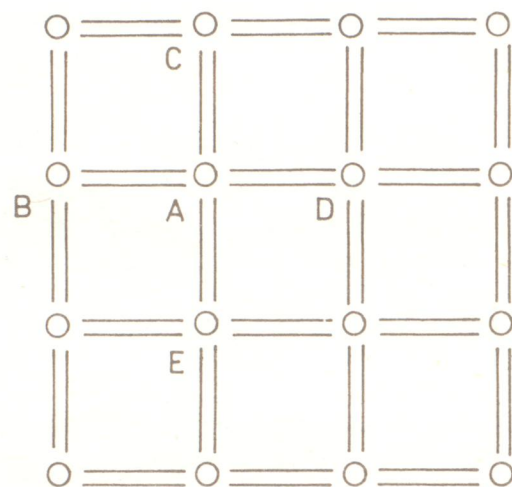
Obr.11.3. Struktura elementární buňky Si

Schematické znázornění těchto vazeb se často provádí ve dvojrozměrném modelu, jak je vidět na obr. 11.4. Ve schematu je potřeba vidět, že např. atom A se nachází v těžišti tetraedru, jehož vrcholy tvoří atomy B, C, D, E. Dvě čárky mezi dvěma sousedními atomy představují jednu vazbu tvořenou dvěma elektrony dvou sousedních atomů. Čistě kovalentních krystalů je dost málo. Patří sem diamant, křemík, germanium. Diamant je izolantem, zatím co křemík a germanium patří mezi polovodiče. Protože krystal je z jednotlivých atomů vytvořen pomocí kovalentní vazby, nazývají se tyto polovodiče valenční.

Kovalentní vazba je charakterizována tím, že elektrony budou k atomům poměrně silně vázány a k jejich uvolnění z kovalentní vazby (aby se mohly pohybovat krystalem) je potřeba určité energie. V pásovém energiovém schematu to odpovídá šíři zakázaného pásu, tj.  $E_g$ . Z toho také vyplývá, že při velmi nízkých teplotách bude pouze velmi málo volných částic s nábojem a taková látka se bude chovat jako izolant. Při teplotě  $T = 0 \text{ K}$  budou dolní pásy včetně valenčního zcela zaplněny elektrony a horní (vodivostní) pás bude úplně prázdný. S rostoucí teplotou se budou elektrony uvolňovat z nejvyššího úplně zaplněného pásu (valenčního pásu) a budou přecházet do nejbližšího volného pásu (vodivostního pásu), který se jimi bude částečně zaplňovat. Uvolňování elektronu z valenčního pásu si můžeme také představit jako jeho zaplňování dírou (viz článek 11.3).

Z tab. 11.1. je vidět, jak se mění fyzikální veličiny popisující některé fyzikální vlastnosti diamantu, křemíku a germania. V tomto pořadí mřížkový parametr roste, Debyeova teplota  $\Theta_D$ , teplota tání a šířka zakázaného pásu klesají. Tuto pravidelnost je možné kvalitativně vysvětlit různě silnou chemickou vazbou mezi atomy, která je ovlivňována proměnnou vzdáleností mezi atomy u jednotlivých prvků.

Kromě valenčních polovodičů existuje značné množství i polovodivých sloučenin, které byly vyrobeny a našly rovněž velké technické uplatnění. Je to také proto, že skýtají podstatně větší spektrum při výběru polovodičů z hlediska jejich parametrů, jako je např. šíře zakázaného pásu, pohyblivost. (viz kapitola 12).



Obr.11.4. Schematické znázornění vazeb v dvojrozměrném modelu

Polovodič	$a$ nm	$T_T$ °C	$\epsilon_r$	$\Theta_D$ K	$E_g$ eV
C	0,356	3550	5,7	1800	7
Si	0,543	1420	12	658	1,14
Ge	0,566	936	16	362	0,67

Tab.11.1. Velikosti vybraných veličin valenčních polovodičů.  $a$ -mřížková konstanta,  $T_T$ -teplota tání,  $\epsilon_r$ -relativní permitivita,  $\Theta_D$ -Debyeova teplota,  $E_g$  - šířka zakázaného pásu

Byly zkoumány sloučeniny vzniklé z prvků III. skupiny a V. skupiny periodické soustavy prvků. Sloučeniny se proto označují jako sloučeniny typu  $A^{III}B^V$ . Z periodické soustavy prvků je vidět, že ve sloupci III A se vyskytují prvky, které mají seskupení vnějších elektronů takové, že dva se nacházejí ve stavu  $s$  a jeden ve stavu  $p$ . Podobně prvky ve sloupci V A mají seskupení vnějších elektronů takové, že dva se nacházejí ve stavu  $s$  a tři ve stavu  $p$ . Tyto sloučeniny krystalují ve sfaleritové struktuře, což je struktura podobná diamantové struktuře, jen bázi tvoří jeden atom A a jeden atom B.

Některé jejich charakteristické fyzikální veličiny jsou zřejmé z tab. 11.2. Zvláště zajímavé jsou kombinace těchto šesti prvků - Al, Ga, In, P, As, Sb. Chemická vazba u těchto sloučenin není čistě kovalentní, ale má i částečně iontový charakter. Proto se tyto polovodiče nezařazují mezi valenční.

Polovodič	$a$ nm	$E_g$ eV	$T_T$ °C
AlP	0,236	3,0	1500
GaAs	0,234	1,43	1238
InSb	0,280	0,18	523

Tab.11.2. Velikosti vybraných veličin polovodičů typu  $A^{III}B^V$ . Význam symbolů viz tab.11.1.

Další skupinou sloučenin jsou sloučeniny typu  $A^{II}B^{VI}$ , tj. prvků z II. a VI. skupiny periodické soustavy prvků.

### 11.3. Vliv poruch na hustotu volných částic s nábojem

V tomto článku se převážně zaměříme na výklad vlivu poruch na hustotu volných elektronů a děr ve valenčním polovodiči. U ostatních typů polovodičů bude jen stručná zmínka o jejich vlivu.

V kapitole 4 jsme se seznámili s poruchami v pevných látkách. Zde se omezíme na vliv bodových a čarových poruch na hustotu volných částic s nábojem. Nejčastěji používané jsou příměsi, tj. vědomě zabudované atomy jiných prvků než jsou atomy polovodiče.

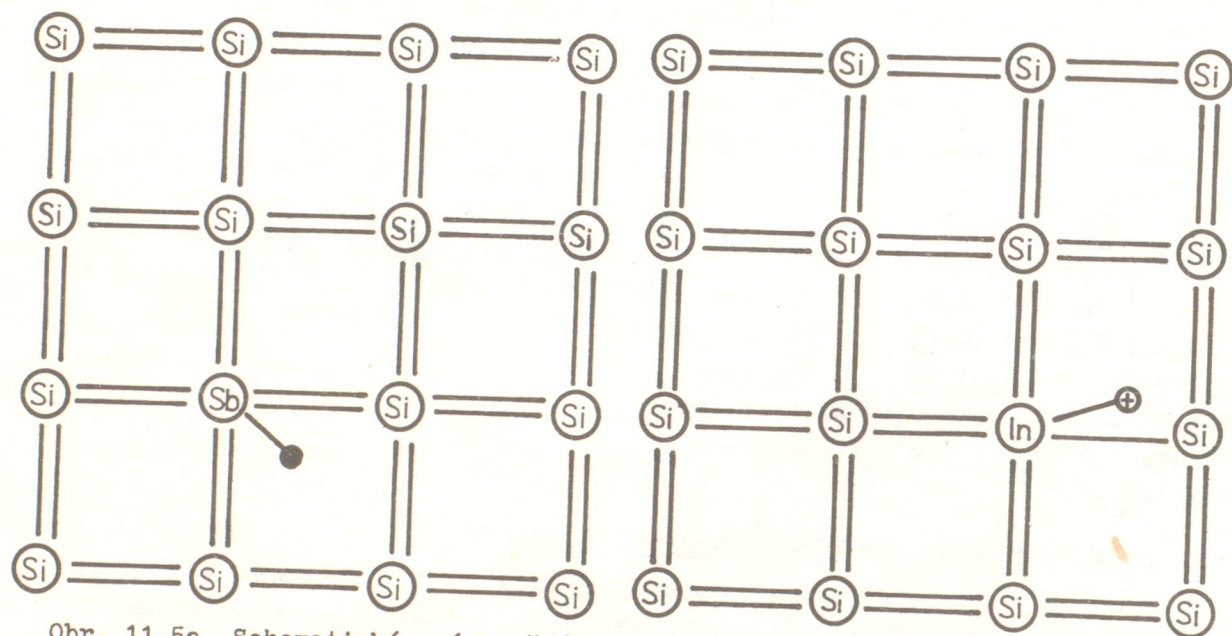
Ve valenčních polovodičích jsou k těmto účelům nejužívanější prvky III. a V. skupiny periodické soustavy prvků. Tyto atomy zabudované do krystalu mohou zaujímat buď místo v mřížkových uzlech nebo v intersticiálních polohách. V prvním případě mluvíme o substitučních poruchách, ve druhém o intersticiálních poruchách.

Krystal s poruchami nazýváme také buď substituční tuhý roztok nebo intersticiální tuhý roztok. V dalším se budeme zabývat poruchami elektricky aktivními, tj. takovými, které mají vliv na elektrické vlastnosti.

Pearson a Bardeen experimentálně ukázali, že bór a fosfor tvoří s křemíkem substituční tuhé roztoky. Zjistili to experimentálně měřením mřížkové

konstanty. Později měření opakoval Horn a výsledky měření potvrdil. Podobným měřením bylo dále zjištěno, že všechny prvky III. skupiny a V. skupiny v mřížce germania nebo křemíku tvoří s nimi substituční tuhý roztok. Budeme proto v dalším výkladu uvažovat o těchto poruchách jako o poruchách substitučních. Tyto příměsi se mohou zavádět do Ge nebo Si kontrolovaným způsobem v široké oblasti hustot, tj. asi od  $10^{-9}$  N do  $10^{-3}$  N, kde N je celková hustota atomů v látce). Mluvíme o dotování (dopování) dané látky příměsí.

Představme si, že v substituční poloze se u germania nebo křemíku nachází pětimočný atom (např. Sb). Tento atom má pět valenčních elektronů, z nichž čtyři se podílejí na vytváření kovalentní vazby se čtyřmi sousedními atomy. Pátý elektron je z hlediska kovalentních vazeb nadbytečný a je k atomu Sb vázán jen slabě. Schematické znázornění ve dvourozměrném modelu je na obr. 11.5a. Stačí tedy malá energie k tomu, aby se pátý elektron uvolnil od atomu a mohl se pohybovat po krystalu. Z atomu Sb se tak stává ion  $Sb^+$



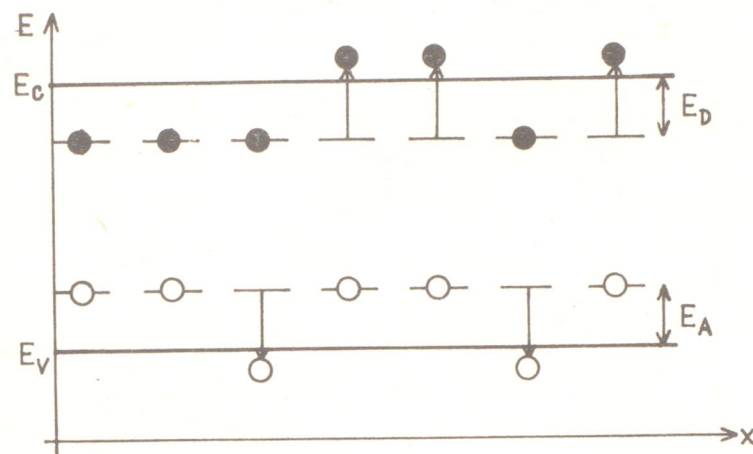
Obr. 11.5a. Schematické znázornění poruchy tvořené pětimočným atomem

Obr. 11.5b. Schematické znázornění poruchy tvořené trojmočným atomem

Tyto atomy z V. sloupce periodické soustavy prvků se nazývají donory (dárčí elektronů) nebo donorové příměsi. Protože je k uvolnění elektronu potřeba určitá energie, v energiovém modelu se zobrazí do zakázaného pásu v těsné blízkosti spodního okraje vodivostního pásu. Protože pátý valenční elektron od atomu se nachází u atomu, projeví se v energiovém zobrazení  $E = f(x)$  jako bod v určitém místě x, kde se nachází atom. Hladina se tedy zakreslí krátkou čárkou. Říkáme, že tyto hladiny jsou lokalizovány (umístěny v určitém místě). Energiové hladiny, které jsou vytvořeny pětimočnými prvky, se nazývají donorové hladiny. Jak již bylo řečeno, do energiového schématu se zakreslují krátkými úsečkami (viz obr. 11.6). Pokud jsou tyto příměsi neionizovány, znázorníme v energiovém schématu skutečnost, že pátý valenční elektron se nachází u atomu tak, že se na donorovou hladinu zakreslí plný kruh. Zkráceně, i když ne zcela přesně, mluvíme také o neionizované donorové

hladině. Je-li pátý valenční elektron uvolněn od atomu, stává se volným. Tato situace se zobrazí v energiovém schématu podle obr. 11.6 (elektron se přemístil do vodivostního pásu). Zkráceně pak mluvíme o elektronu, který z donorové hladiny přešel do vodivostního pásu a o hladině říkáme, že je ionizovaná.

Řádový odhad velikosti energie  $E_D$  potřebné k ionizaci Sb je možné podle Betheho provést následujícím způsobem podle zjednodušeného modelu. Pátý



Obr. 11.6. Energiové schéma s donorovými a akceptorovými hladinami

elektron Sb můžeme považovat za elektron, který se pohybuje v poli kladného bodového náboje, tj. problém lze převést na úlohu jako u atomu vodíku. Rozdíl mezi vodíkem a antimonem je v tom, že pátý elektron a kladný ion antimonu jsou uloženy v prostředí o relativní permitivitě  $\epsilon_r$ . Dále je potřeba místo hmotnosti elektronu uvažovat jeho efektivní hmotnost. Vztah pro  $E_D$  lze psát ve tvaru

$$E_D = \frac{m_n^{\infty}}{m} \frac{E_H}{n^2 \epsilon_r^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.2a)$$

kde  $E_H$  je ionizační energie atomu vodíku. Pro jednu ionizovaný atom Sb je  $n = 1$ . Dosadíme-li pro germanium  $m_n^{\infty} = 0,2 m$ ,  $\epsilon_r = 16$  a protože  $E_H = 13,62$  eV, je  $E_D = 0,01$  eV. Pro křemík je  $m_n^{\infty} = 0,4 m$ ,  $\epsilon_r = 12$ , takže  $E_D = 0,04$  eV, což je v dobré shodě s experimentálními výsledky. Experimentálně zjištěné hodnoty  $E_D$  pro různé prvky V. skupiny periodické soustavy prvků jsou v tab. 11.3.

Zajímavý výsledek dále dostaneme při výpočtu vzdálenosti r (Bohrův poloměr), v níž se nachází 5. elektron donorového atomu. Podobně jako pro energii  $E_D$  platí zde

$$r = \frac{m}{m_n^{\infty}} \epsilon_r r_H^n, \quad (11.2b)$$

kde  $r_H$  je Bohrův poloměr pro vodík. Pro germanium dostáváme opět pro  $n = 1$   $r = 4,3$  nm, což je asi 8 x více než mřížková konstanta. Z toho dále plyne, že ionizační energie je malá (slabá vazba).

Donorové hladiny, pro které je  $E_D$  malé (ve srovnání s  $E_g$ ), se nazývají mělké donorové hladiny.

Dále vyšetříme substituční poruchu z III. skupiny periodické soustavy prvků (např. In). V tomto případě chybí jeden elektron k vytvoření čtyř úplných vazeb se čtyřmi sousedními atomy a jedna vazba je neúplná (viz obr. 11.5b). Doplnění vazby může nastat tím, že v důsledku tepelných excitací se poruší u některého atomu v blízkosti trojmočného atomu úplná vazba a uvolněný elektron zaplní neúplnou vazbu u trojmočného prvku. Tím dojde k to-



mu, že z atomu In se stane záporně nabitý ion  $In^-$  a neúplná vazba se vyskytne v jiném místě krystalu. Z výkladu je zřejmé, že výše popsané seskupení

Příměs	Ge		Si			
	Působení	$E_D = E_C - E$ eV	$E_A = E - E_V$ eV	Působení	$E_D = E_C - E$ eV	$E_A = E - E_V$ eV
Sb	D	0,0096		D	0,039	
P	D	0,0120		D	0,045	
As	D	0,027		D	0,049	
In	A		0,0112	A		0,16
Ga	A		0,0108	A		0,065
B	A		0,0104	A		0,045
Al	A		0,0102	A		0,057
Mn	A		0,16	D	0,53	
Cu	A		0,04	A		0,24
Mn	A		0,37	-		
Zn	A		0,03	A		0,31

Tab.11.3. Experimentálně zjištěné hodnoty  $E_D$  a  $E_A$  pro různé typy příměsí v Ge a Si.  $E$  je energie donorové (akceptorové) hladiny vzhledem ke zvolenému počátku.

(neúplná vazba) se může pohybovat krystalem. V místě, kde je neúplná kovalentní vazba, chybí záporný náboj a místo se jeví jako kladně nabitě. Popis pohybu této neúplné vazby a studium jejího chování by bylo značně obtížné. Ukazuje se však, že ke stejným výsledkům dojdeme, budeme-li děje popisovat "částicemi" s kladným nábojem o velikosti  $e_0$ . Výsledky plynoucí z takového popisu jsou v dobré shodě s experimentálními výsledky. Protože se ve skutečnosti nejedná o žádnou reálnou částici, užívá se často pojmu kvazičástice nebo "částice". Této kvazičástici se říká díra.

Znamé reálné částice s kladným nábojem o velikosti  $e_0$  jsou proton a pozitron. Ani jedna z nich nepřichází v úvahu pro své fyzikální vlastnosti. Popis jeví pomocí děr přichází v úvahu nejen při výkladu vedení elektrického proudu, ale např. také i při rozptylových mechanismech, kde se uvažují interakce děr s fonony, s ionizovanými poruchami atd.

Prvky z třetí skupiny periodické soustavy prvků zabudované jako substituční poruchy do Ge nebo Si se nazývají akceptory (příjemci elektronů) nebo akceptorové příměsi.

Podobné úvahy jako u donorů vedou k tomu, že ionizační energie  $E_A$  (tj. energie potřebné k uvolnění díry od akceptoru) jsou opět řádově stejné jako  $E_D$ . Jsou však o něco větší v důsledku větší efektivní hmotnosti  $m_p^*$ . V energiovém modelu se tyto energie zobrazují opět v zakázaném pásu v blízkosti vrchního okraje valenčního pásu. Jsou opět lokalizované a proto se vyznačují krátkými úsečkami. Nazývají se akceptorové hladiny. Hladina obsazená dírou se zobrazí tak, že se na akceptorové hladině nakreslí prázdný kroužek (viz obr. 11.6). O hladině říkáme, že je neionizovaná (nezaplňená kovalentní vazba). Zaplní-li se vazba elektronem, znamená to v terminologii pomocí díry,

že se díra přemístila do jiného místa (pohyb díry). Mluvíme o ionizaci akceptoru, který se nabíjí záporně. V energiovém modelu to představuje případ, kdy se díra přemístí z akceptorové hladiny do valenčního pásu. O hladině říkáme, že je ionizovaná.

Akceptorové hladiny, pro které je  $E_A$  velmi malé (ve srovnání s  $E_g$ ), se stejně jako v případě donorů nazývají mělké hladiny.

Ionizační energie  $E_A$  pro různé prvky v Ge a Si jsou v tab. 11.3.

Proces ionizace akceptoru můžeme chápat také tak, že díra vázaná na záporně nabitou poruchu se tepelnou excitací přemístí do jiného místa.

Kromě těchto mělkých hladin existují v krystalu i tzv. hluboké hladiny, které se nacházejí v blízkosti středu zakázaného pásu. Tyto hladiny vytvářejí v křemíku např. zlato a to donorovou hladinu ve vzdálenosti 0,35 eV od vrchního okraje valenčního pásu a akceptorovou ve vzdálenosti 0,54 eV od spodního okraje vodivostního pásu. Některé další hluboké hladiny jsou uvedeny v tab. 11.3.

U polovodičových sloučenin typu  $A^{III}B^V$  platí podobné schéma pro určování donorových a akceptorových hladin jako u valenčních polovodičů. Zabudujeme-li tedy prvek z II. skupiny periodické soustavy prvků místo prvku  $A^{III}$ , vytvoří se akceptorová hladina. Podobně se vytvoří donorové hladiny, zabudujeme-li místo atomu  $B^V$  atom ze VI. skupiny periodické soustavy prvků. Hodnoty  $E_A$  a  $E_D$  pro některé sloučeniny  $A^{III}B^V$  jsou uvedeny v tab. 11.4.

Podobné zákonitosti platí také pro polovodičové sloučeniny typu  $A^{II}B^{VI}$ .

Polovodič	$E_D$ eV	$E_A$ eV
InSb	0,0007	0,03
InAs	0,002	0,05
InP	0,008	-
GaAs	0,008	0,005
GaSb	0,003	0,03

Tab. 11.4. Energie  $E_D$  a  $E_A$  pro vybrané polovodičové sloučeniny typu  $A^{III}B^V$ .

Máme-li polovodič jen s jedním typem poruch např. s donory, mluvíme o polovodiči typu N. Název vznikl z toho, že vedení proudu je v tomto případě zprostředkováno převážně elektrony (negativním nábojem). Nachází-li se v polovodiči jen díry, mluvíme o polovodiči typu P - vedení proudu je zprostředkováno dírami (pozitivním nábojem).

Máme-li polovodič, v němž se nacházejí jak donory, tak i akceptory, mohou nastat dva případy: 1.  $N_d > N_a$ , kde  $N_d$  je hustota donorů a  $N_a$  hustota akceptorů.

V tomto případě dojde k tomu, že část elektronů z donorových hladin přejde bez dodání energie na akceptorové hladiny. Tyto akceptorové hladiny se pak již nemohou ionizovat a přejít na ně elektrony z valenčního pásu (to je ekvivalentní přechodu díry do valenčního pásu). Stejně tak příslušný donor nemůže již dodat volný elektron do vodivostního pásu. Pro hustotu neutrálních donorů platí  $N_d^x = N_d - N_a$ . Hustota záporně nabitých akceptorů je  $N_a^- = N_a$  a  $N_a$  donorů je kladně nabitých ( $N_d^+ = N_a$ ). Pouze z neutrálních donorů se mohou elektrony přemístit do vodivostního pásu a účastnit se vedení elektrického proudu. Bude tedy v tomto případě převládat hustota volných elektronů nad hustotou děr, tj.  $n > p$ . Mluvíme tedy opět o polovodiči typu N.

Z provedeného výkladu je zřejmé, že přidáním akceptorových příměsí do polovodiče se vliv donorů zeslabuje. Proto se popisovaný proces nazývá kompence a takovému polovodiči říkáme polovodič kompenzovaný.

Děje, ke kterým dochází v pevné látce při kompenzaci, lze popsat takto: Nachází-li se atom donorové příměsí v blízkosti akceptorové příměsí, dojde k tomu, že pátý valenční elektron donorové příměsí se uvolní a zaplní neúplnou kovalentní vazbu u akceptorové příměsí. Celková hustota donorových příměsí, které mohou uvolnit elektron, je pak  $(N_d - N_a)$ .

2.  $N_a > N_d$ . V tomto případě přejdou všechny elektrony z donorových hladin na akceptorové hladiny a tím se nemohou stát zdrojem volných elektronů ve vodivostním pásu. Z celkové hustoty  $N_a$  akceptorových hladin může pouze  $(N_a - N_d)$  akceptorů uvolnit díry, které se přemístí do valenčního pásu. V tomto případě převládá hustota děr nad volnými elektrony, tj.  $p > n$  a mluvíme o polovodiči typu P. Opět se jedná o polovodič kompenzovaný.

Výše uvedené úvahy platí pouze v případě nepřilíš velkých hustot příměsí. Jinak dochází k rozštěpení jednotlivých donorových nebo akceptorových hladin a k vytvoření příměsových páسů. K tomuto rozštěpení dochází u Ge pro hustoty příměsí větší než  $3 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$  a u Si větší než  $6 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ .

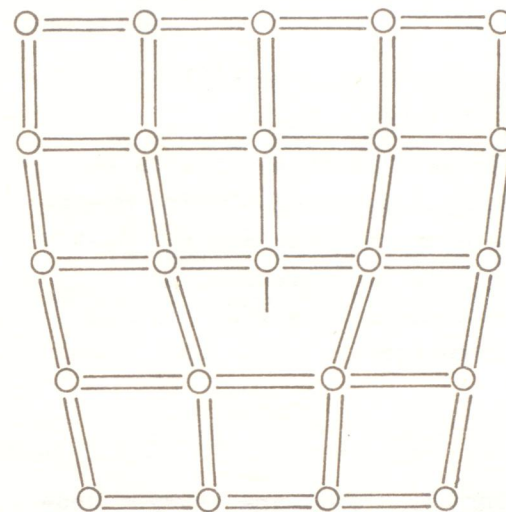
Vliv ostatních prvků (tj. prvků z jiné skupiny než III. nebo V. skupiny) v Ge a Si byl studován a experimentálně zjištěn, ale podrobná teorie ještě rozpracována nebyla. Ukázalo se, že tyto atomy tvoří hluboké hladiny, od některých prvků vzniká celé spektrum energiiových hladin. Existují dokonce i takové příměsí, jejichž energiiové hladiny se nacházejí v pásech dovolených energií, tj. ve vodivostním nebo ve valenčním pásu.

Vakance vytvořené ve valenčních polovodičích vytvářejí hluboké hladiny, které se většinou chovají jako pasti (viz článek 12.8) a příliš neovlivňují hustotu volných elektronů nebo děr. Bylo experimentálně zjištěno, že při ozarování Ge se objevují jevy, které pravděpodobně mají příčinu ve vzniku vakancí a intersticiálů. Intersticiály pravděpodobně vytvářejí donorové hladiny, vakance akceptorové.

U polovodivých sloučenin má na jejich elektrické vlastnosti vliv také narušení stechiometrie krystalu. V těchto sloučeninách může tedy vzniknout větší množství bodových poruch než u valenčních polovodičů. Jednotlivé poruchy mohou spolu interagovat a vytvářet složité komplexy. Takové komplexy se vytvářejí převážně z opačně nabitých poruch. Typickým případem jsou barevná centra (viz článek 4.1.5).

Také dislokace mají vliv na elektrické vlastnosti. Při plastické deformaci krystalu dochází totiž ke změně elektrické vodivosti krystalů. Experimentálně se ukázalo, že v Ge typu N se deformací snížila měrná vodivost [1]. U polovodiče typu P byl vliv deformace na hustotu částic s nábojem nepatrný. To znamená, že se vlivem zvýšené hustoty dislokací vytvářejí akceptorové hladiny. Vysvětlení vzniku akceptorových hladin je podle Reada [2] následující: V těchto krystalech dochází ke skluzu na rovinách  $\{111\}$  ve směru  $\langle 110 \rangle$ . Nadbytečné poloroviny hranových dislokací vedou k vytváření řady volných vazeb, protože tyto atomy nemají žádné sousední atomy (ve dvojrozměrném mo-

delu viz obr. 11.7). Nespárovaný elektron není volný, protože je vázán k atomu Ge. Tato vazba však není tak silná jako pro elektrony, které vytvářejí normální elektronovou vazbu mezi dvěma sousedními atomy. Vytvářejí se tedy akceptorové hladiny ležící v zakázaném pásu. Logan a spol. [3], kteří provedli jako první elektrická měření na řadě dislokací v Ge našli, že tyto akceptorové hladiny se nacházejí 0,18 eV až 0,2 eV pod spodním okrajem vodivostního pásu.



Obr. 11.7. Schematické znázornění vazeb v dvojrozměrném modelu v okolí dislokace

U polovodivých sloučenin typu  $A^{III}B^V$  nebo  $A^{II}B^{VI}$  je situace složitější, protože se vyskytují dva typy dislokací a to  $\alpha$  dislokace a  $\beta$  dislokace.  $\alpha$  dislokace mají nadbytečnou rovinu tvořenou atomy A a  $\beta$  dislokace atomy B. Protože  $\alpha$  dislokace obsahuje prvky o menší valenci než jsou prvky ze IV. skupiny periodické soustavy prvků, dá se očekávat (a také je to experimentálně dokázáno), že vytváří akceptorové hladiny. Podobnou úvahou pro dislokace  $\beta$  zjistíme, že bude vytvářet donorové hladiny.

#### 11.4. Fermiova-Diracova statistika - aplikace na volné elektrony a díry

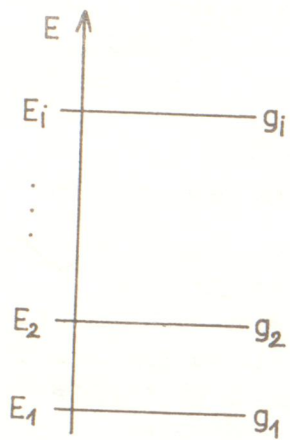
Pro naše další úvahy je velmi důležité znát pravděpodobnost obsazení jednotlivých energiiových hladin elektrony a dírami a to jak hladin ve vodivostním pásu a valenčním pásu, tak i hladin příměsových (donorových a akceptorových). Naším hlavním úkolem bude zjistit pravděpodobnost obsazení akceptorových a donorových hladin elektrony, i když vztah pro pravděpodobnost obsazení hladin ve vodivostním pásu elektrony známý z dřívějších přednášek se při našich úvahách a výpočtech objeví také.

Při dalších úvahách budeme vycházet z následujících předpokladů:

1. Elektrony jsou vzájemně nerozlišitelné
2. Každá hladina může být obsazena nejvýše dvěma elektrony s opačnými spiny
3. Pro jednu ionizovanou příměsí může být energiiová hladina obsazena pouze jedním elektronem. Příměsí s těmito vlastnostmi se převážně používají.

Hustotu elektronů v energiiových pásech označíme  $n$ . Tyto elektrony se mohou nacházet na  $N$  hladinách o energiích  $E_1, E_2, \dots, E_N$ . Hustotu stavů na jednotlivých hladinách označíme  $g_1, g_2, \dots, g_N$  (viz obr. 11.8). Označíme-li dále  $n_j$  hustotu elektronů, které obsadí energiiové stavy o energii  $E_j$ , pak ( $g_j - n_j$ ) stavů bude neobsazených.

Počet vzájemných přeskupení stavů  $g_j$  je  $g_j!$ . Protože však jsou elektrony vzájemně nerozlišitelné, je potřeba brát v úvahu pouze ty případy, kdy dochází k vzájemné záměně obsazených a neobsazených hladin. Je tedy potřeba vy-



Obr. 11.8. Energiové schéma s vyznačením hustoty stavů

loučit počet přeskupení  $n_j!$  mezi obsazenými hladinami a  $(g_j - n_j)!$  mezi neobsazenými hladinami. Pak pro celkovou hustotu vzájemně různých přeskupení platí

$$W_j = \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

a pro celkovou hustotu přeskupení na všech  $g_j$  hladinách je

$$W_1 = \prod_j W_j = \prod_j \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!} \quad (11.3)$$

Dále předpokládejme, že se v pásovém schématu nachází v zakázaném pásu  $N_d$  donorových hladin. Hustotu hladin obsazených elektronem označíme  $N_d^x$ . Hustota neobsazených hladin (tj. ionizovaných) je  $N_d^+ = N_d - N_d^x$ . Stejnými úvahami jako výše dojdeme k počtu vzájemných přeskupení

$$\frac{N_d!}{N_d^x! (N_d - N_d^x)!} \quad (11.4)$$

Protože příměsová hladina může být podle předpokladu 3 obsazena nejvýše jedním elektronem s libovolným spinem, je počet vzájemných přeskupení  $g_d$  2 krát větší než pro jeden elektron. Pro  $N_d^x$  elektronů je potřeba výraz (11.4) vynásobit činitelem  $(g_d)^{N_d^x}$ . Pak

$$W_2 = (g_d)^{N_d^x} \frac{N_d!}{N_d^x! (N_d - N_d^x)!} \quad (11.5)$$

V případě akceptorových hladin uvažujeme, že jejich hustota (hustota akceptorových příměsí) je  $N_a$ . Hladina bude obsazena elektronem (tj. ionizovaná - díra se přemístila do valenčního pásu) tehdy, přejde-li na ní elektron z valenčního pásu. Hustotu hladin si označíme  $N_a^-$ . Hustota neobsazených hladin (tj. neionizovaných - díry se nacházejí na akceptorových hladinách) je  $N_a^x = (N_a - N_a^-)$ . Počet možných přeskupení je analogický případu donorů, tj. je roven

$$\frac{N_a!}{N_a^-! (N_a - N_a^-)!} \quad (11.6)$$

K tomu, abychom zjistili celkovou hustotu přeskupení, je potřeba vzít v úvahu opět dvě možnosti orientace spinu elektronu. Protože hustota neobsazených akceptorových hladin je  $N_a^x = N_a - N_a^-$ , je potřeba výraz (11.6) vynásobit činitelem  $(g_a)^{(N_a - N_a^-)}$ , kde  $g_a = 2$ . Platí tedy

$$W_3 = (g_a)^{(N_a - N_a^-)} \frac{N_a!}{N_a^-! (N_a - N_a^-)!} \quad (11.7)$$

Existují-li v polovodiči jak donorové, tak i akceptorové hladiny, pak, využijeme-li rovnic (11.7), (11.5), (11.3), platí pro celkovou hustotu sesku-

pení

$$W = W_1 W_2 W_3 = (g_d)^{N_d^x} \frac{N_d!}{N_d^x! (N_d - N_d^x)!} (g_a)^{(N_a - N_a^-)} \frac{N_a!}{N_a^-! (N_a - N_a^-)!} \prod_j \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!} \quad (11.8)$$

Nejpravděpodobnější rozdělení nalezneme z rovnice  $\frac{dW}{dn_j} = 0$ . (11.9)

První doplňující podmínka je, že celkový počet částic musí zůstat konstantní. Druhá doplňující podmínka je, že celková energie  $U$  se nemění. Platí tedy

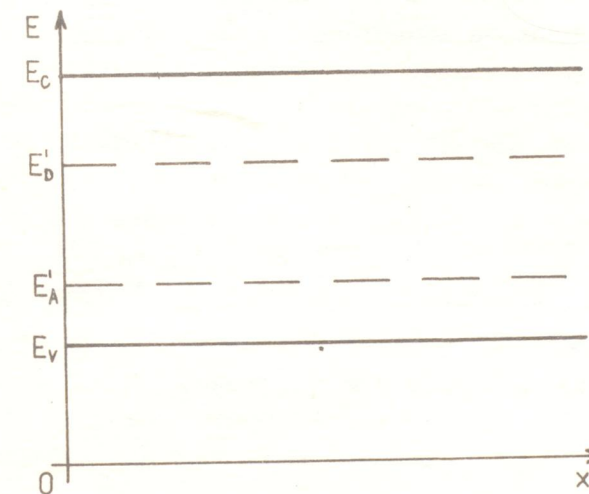
$$n - N_d^x - N_a^- - \sum_j n_j = \text{konst.} \quad (11.10)$$

$$U - N_d^x E_D' - N_a^- E_A' - \sum_j n_j E_j = \text{konst.} \quad (11.11)$$

kde  $E_D'$  a  $E_A'$  je zřejmé z obr. 11.9.

K řešení rovnice (11.9) při splnění rovnic (11.10) a (11.11) se používá metody Lagrangeových neurčitých multiplikátorů. Zavedeme výraz

$$\Sigma = \ln W + \alpha (n - N_d^x - N_a^- - \sum_j n_j) + \beta (U - N_d^x E_D' - N_a^- E_A' - \sum_j n_j E_j), \quad (11.12)$$



Obr. 11.9. Energiové schéma s donorovou a akceptorovou hladinou s vyznačením příslušných energií.

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou Lagrangeovy neurčité multiplikátory. Rovnici (11.12) lze splnit, když

$$\frac{d\Sigma}{dN_a^-} = 0, \quad \frac{d\Sigma}{dN_d^x} = 0, \quad \frac{d\Sigma}{dn_j} = 0. \quad (11.13)$$

K nalezení výsledných vztahů použijeme ještě Stirlingův vztah  $\ln x! = x \ln x - x$ , který platí pro  $x \gg 1$ . Pak

$$\frac{d(\ln n_j!)}{dn_j} = \ln n_j \quad (11.14)$$

Z rovnice (11.13) použitím (11.12) a (11.14) dostáváme po úpravě

$$\frac{d\Sigma}{dN_d^x} = \ln g_d - \ln N_d^x + \ln (N_d - N_d^x) - \alpha - \beta E_D' = 0 \quad (11.15)$$

$$\frac{d\Sigma}{dN_a^-} = \ln g_a - \ln N_a^- + \ln (N_a - N_a^-) - \alpha - \beta E_A' = 0, \quad (11.16)$$

$$\frac{d\Sigma}{dn_j} = - \ln n_j - \ln (g_j - n_j) - \alpha - \beta E_j = 0. \quad (11.17)$$

Z rovnic (11.15), (11.16) a (11.17) dostáváme pro  $N_d^x$ ,  $N_a^-$  a  $n_j$  vztahy

$$N_d^x = N_d \left[ \frac{1}{g_d} \exp(\alpha + \beta E_D') + 1 \right]^{-1}, \quad (11.18)$$

$$N_a^- = N_a \left[ g_a \exp(\alpha + \beta E_A') + 1 \right]^{-1}, \quad (11.19)$$

$$n_j = g_j \left[ \exp(\alpha + \beta E_j) + 1 \right]^{-1}. \quad (11.20)$$

Ve statistické fyzice se dále dokazuje, že  $\alpha = -E_F/k_B T$ ,  $\beta = 1/k_B T$ , (11.21), kde  $E_F$  je Fermiova energie. Její fyzikální význam je zřejmý z dalších úvah.

Dosazením (11.21) do (11.18) až (11.20) dostáváme následující vztahy

$$N_d^x = N_d \left[ \frac{1}{g_d} \exp \frac{E_D' - E_F}{k_B T} + 1 \right]^{-1}, \quad (11.22)$$

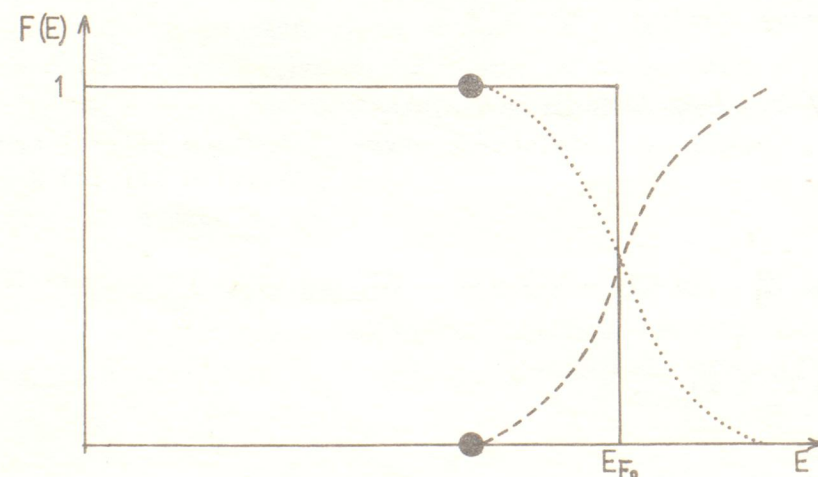
$$N_a^- = N_a \left[ g_a \exp \frac{E_A' - E_F}{k_B T} + 1 \right]^{-1}, \quad (11.23)$$

$$n_j = g_j \left[ \exp \frac{E_j - E_F}{k_B T} + 1 \right]^{-1}. \quad (11.24)$$

Výraz  $n_j/g_j$  je roven pravděpodobnosti obsazení stavu o energii  $E_j$  v termodynamické rovnováze. Nazývá se Fermiova-Diracova rozdělovací funkce a značí se  $F(E)$ . Platí

$$F(E) = \frac{1}{\exp \frac{E - E_F}{k_B T} + 1}. \quad (11.24a)$$

Grafické zobrazení  $F(E)$  jako funkce  $E$  si nejprve ukážeme pro  $T = 0$  K. Při  $T = 0$  K platí ve vztahu (11.24a), že pro  $E < E_{F0}$  je  $F(E) = 1$  a pro  $E > E_{F0}$  je  $F(E) = 0$  (hodnota  $E_{F0}$  je hodnota  $E_F$  pro  $T = 0$  K). Graf je zobrazen na obr. 11.10 - vytažen plně. Je-li  $T > 0$  K, pak pro  $E = E_F$  je  $F(E) = 1/2$



Obr. 11.10. Průběh  $F(E)$  pro  $T = 0$  K (vytažen plně), pro  $T > 0$  K (vyznačen tečkovaně) a průběh  $F'(E)$  pro díry (vytažen čárkovaně).

a graf je vyznačen tečkovaně. Je vidět, že tvar funkce se mění jen v okolí  $E = E_{F0}$ . Změna nastává pro energie o několik  $k_B T$  větší nebo menší než  $E_{F0}$ .

Z uvedeného grafu je vidět, že pro  $T = 0$  K jsou všechny energetické stavy pro  $E < E_{F0}$  obsazeny elektrony a všechny stavy pro  $E > E_{F0}$  prázdné (neobsazeny).

Pro  $T > 0$  K existuje určitá pravděpodobnost, že energetický stav pod  $E_F$  bude neobsazen a nad  $E_F$  bude obsazen. Tato "nejistota" se vztahuje na interval energií asi  $\pm 3k_B T$  od  $E_F$  (viz cvičení 11.1). Znalost polohy Fermiovy energie nám přibližně určuje, zda je určitá hladina obsazena elektronem či nikoliv.

Rozdělovací funkci pro díry si označíme  $F'(E)$ . Protože hladina obsazená elektronem není obsazená dírou, platí  $F'(E) = 1 - F(E)$ , čili

$$F'(E) = \frac{1}{\exp \frac{E_F - E}{k_B T} + 1}. \quad (11.25)$$

Průběh funkce  $F'(E)$  je na obr. 11.10 vyznačen čárkovaně.

#### 11.5. Jednoduchý model izolantu

K odvozování vztahů platných v izolantu si nejprve vytvoříme jednoduchý model. Budeme předpokládat, že šířka valenčního a vodivostního pásu je menší než šířka zakázaného pásu. Všechny atomy ve valenčním pásu pak budou mít energii  $E_V$  a ve vodivostním pásu  $E_C$ . Takovýto model připomíná diskrétní energetické spektrum jako u izolovaného atomu.

Předpokládejme, že v každém pásu se bude nacházet  $Z$  možných energetických stavů. Pro teplotu  $T = 0$  K bude vodivostní pás zcela prázdný. Izolant neobsahuje volné částice s nábojem a tedy jím nebude procházet proud. Při teplotách  $T > 0$  K budou přecházet některé elektrony z valenčního pásu do vodivostního pásu. Energie volných elektronů bude  $E = E_C$ . Hustota volných částic s nábojem pak bude dána vztahem

$$n = Z F(E) = \frac{Z}{1 + \exp \frac{E_C - E_F}{k_B T}}. \quad (11.26)$$

Podobně se vyjádří hustota elektronů ve valenčním pásu ( $n_{val}$ ). Energie elektronů je  $E = E_V$  a proto platí

$$n_{val} = \frac{Z}{1 + \exp \frac{E_V - E_F}{k_B T}}. \quad (11.27)$$

Pro případ izolantu, kde jsou šíře zakázaného pásu několik eV, pocházejí všechny elektrony ve vodivostním pásu z pásu valenčního a tedy platí

$$n + n_{val} = Z. \quad (11.28)$$

Dosazením z (11.26) a (11.27) vychází

$$E_F = \frac{E_V + E_C}{2} \quad (11.29)$$

Znamená to tedy, že při platnosti tohoto jednoduchého modelu se Fermiova energie nachází uprostřed mezi pásem vodivostním a valenčním.

Pokud je možné ve jmenovateli vztahů (11.26) zanedbat jedničku vzhledem k  $\exp \frac{E_C - E_V}{k_B T}$  ( $(E_C - E_V) > k_B T$ ), dostáváme pro  $n$  vztah (dosazením z (11.29))

$$n = Z \exp \frac{E_C - E_V}{2k_B T} \quad (11.30)$$

Vzhledem k tomu, že  $Z \approx N$ , kde  $N$  je hustota atomů v izolantu, je přibližně

$$n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3} \exp \frac{-E_g}{2k_B T} \quad (11.31)$$

Protože  $n = p$ , platí stejný výsledek pro hustotu děr ve valenčním pásu.

Pokud není splněn požadavek, aby šíře zakázaného pásu byla podstatně větší než šíře valenčního a vodivostního pásu, dostáváme se ke složitějšímu modelu izolantu. Tento model je však i modelem pro vlastní polovodiče, protože mezi polovodičem a izolantem je jen kvantitativní rozdíl. Bude o něm pojednáno v následujícím článku.

#### 11.6. Vlastní polovodiče

Vlastní polovodič je definován tak, že volné elektrony ve vodivostním pásu pocházejí z valenčního pásu. Přechod z valenčního pásu přes zakázaný pás do vodivostního pásu se uskutečnil tím, že elektronům ve valenčním pásu byla udělena dodatečná energie k překonání zakázaného pásu buď jako energie tepelná, světelná nebo jiná forma energie. Z toho vyplývá, že hustota elektronů  $n_i$  se rovná hustotě děr  $p_i$ . Index  $i$  znamená, že se jedná o intrinzičnou (vlastní) hustotu elektronů a děr. Platí

$$n_i = p_i \quad (11.32)$$

Hustotu elektronů nacházejících se ve vodivostním pásu můžeme vypočítat následující úvahou. Vyjdeme ze vztahu (11.24). Pro hustotu elektronů  $dn$ , které mají energii mezi  $E$  a  $(E + dE)$  bude platit vztah

$$dn = g(E) F(E) dE$$

a po dosazení z (11.24) a ze cvičení 6.2, kde místo  $E$  píšeme obecněji  $(E - E_C)$ , dostáváme

$$dn = 4\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(E - E_C)^{1/2} dE}{\exp \frac{E - E_F}{k_B T} + 1}$$

Chceme-li zjistit celkovou hustotu elektronů ve vodivostním pásu, musíme sečíst jednotlivé příspěvky pro hustotu elektronů pro energie od  $E_C$  do  $E_t$  (viz obr. 11.2). Platí

$$n = \int_{E_C}^{E_t} 4\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(E - E_C)^{1/2} dE}{\exp \frac{E - E_F}{k_B T} + 1} = 4\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{E_C}^{E_t} \frac{(E - E_C)^{1/2} dE}{\exp \frac{E - E_F}{k_B T} + 1} \quad (11.33)$$

Podobně i pro hustotu děr ve valenčním pásu vyjdeme ze vztahu (11.25) a platí

$$dp = g(E) F'(E) dE \quad a$$

$$p = \int_{E_b}^{E_V} 4\pi \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(-E + E_V)^{1/2} dE}{\exp \frac{E_F - E}{k_B T} + 1} \quad (11.34)$$

Z matematického hlediska je výhodnější nahradit horní mez integrálu (11.33)  $\infty$ . To můžeme, protože elektrony obsazují stavy v blízkosti spodního okraje vodivostního pásu a příspěvek od vyšších energií je nulový.

V dalších úvahách rozlišujeme dva případy:

1. Fermiova energie  $E_F$  je dostatečně vzdálená od spodního okraje vodivostního pásu, takže platí  $(E - E_F) \gg k_B T$ . Pak

$$\exp \frac{E - E_F}{k_B T} \gg 1$$

a ve jmenovateli výrazu pro  $F(E)$  lze tedy zanedbat jedničku a Fermiova-Diracova statistika přechází v Boltzmannovu statistiku. V tomto případě říkáme, že polovodič je nedegenerovaný. Výraz (11.33) se pak zjednoduší na tvar

$$n_i = 4\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{E_C}^{\infty} (E - E_C)^{1/2} \exp \frac{E_F - E}{k_B T} dE \quad (11.35)$$

K výpočtu integrálu zavedeme substituci  $x = (E - E_C)/k_B T$ . Pak  $dx = dE/k_B T$ .

Po dosazení do (11.35) je

$$n_i = 4\pi \left( \frac{2m_n^*}{h^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T} \int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x) dx.$$

Protože platí  $\int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ,

máme po úpravě

$$n_i = 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T} = N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T}, \quad (11.36)$$

kde  $N_C = 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$ . Veličina  $N_C$  se nazývá efektivní hustota stavů (elektronů) ve vodivostním pásu. Její fyzikální význam vyplývá z následující

úvahy: Pro  $T \rightarrow \infty$  jsou všechny elektrony z valenčního pásu excitovány do vodivostního pásu. Ze vztahu (11.36) je  $n_i \rightarrow N_C$  a  $N_C$  odpovídá hustotě energiových stavů ve vodivostním pásu.

Pro  $p_i$  platí ze vztahu (11.34)

$$p_i = 4\pi \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{E_b}^{E_V} (E_V - E)^{1/2} \exp \frac{-E_F + E}{k_B T} dE \quad (11.37)$$

Ze stejných důvodů jako u vztahu (11.33) lze nahradit v tomto případě spodní mez  $-\infty$  a pak platí

$$p_i = 4\pi \left( \frac{2m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{E_V} (E_V - E)^{1/2} \exp \frac{-E_F + E}{k_B T} dE$$

Zavedením substituce

$$x = \frac{E_V - E}{k_B T}$$

a užitím vztahu

$$\frac{E_F - E}{k_B T} = x + \frac{E_F - E_V}{k_B T}$$

dostaneme po úpravě

$$p_i = 2 \left( \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \frac{-E_F + E_V}{k_B T} = N_V \exp \frac{-E_F + E_V}{k_B T} \quad (11.38)$$

kde  $N_V = 2 \left( \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$  se nazývá efektivní hustota děr ve valenčním pásu.

Její fyzikální význam je podobný jako u  $N_C$ .

Ze vztahů (11.38) a (11.36) lze vypočítat polohu Fermiovy energie. Pro vlastní polovodič platí  $n_i = p_i$  čili

$$N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T} = N_V \exp \frac{E_V - E_F}{k_B T} \Rightarrow \exp \frac{2E_F - E_C - E_V}{k_B T} = \frac{N_V}{N_C}$$

čili po úpravě

$$E_F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_p^*}{m_n^*} \quad (11.39)$$

Ze vztahu (11.39) je vidět, že Fermiova energie se pro  $T = 0$  K nachází uprostřed zakázaného pásu. Pro  $T > 0$  K se nepatrně odchyluje od středu zakázaného pásu v důsledku nestejných efektivních hmotností elektronů a děr.

Ze vztahů (11.38) a (11.36) lze vypočítat také intrinzičnou hustotu volných elektronů. Platí

$$n_i p_i = n_i^2 = N_C N_V \exp \frac{E_V - E_C}{k_B T} = N_C N_V \exp \frac{-E_g}{k_B T} \quad (11.40)$$

kde  $E_g = (E_C - E_V)$  je šířka zakázaného pásu. Dále

$$n_i = 2 \left( \frac{2\pi k_B T}{h^2} \right)^{3/2} (m_p^* m_n^*)^{3/4} \exp \frac{-E_g}{2k_B T} \quad (11.41)$$

Protože efektivní hmotnost elektronů a děr je většinou uváděna v násobcích hmotnosti volného elektronu  $m$ , přepíšeme vztah (11.41) na tvar

$$\begin{aligned} n_i = p_i &= 2 \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \left( \frac{m_p^*}{m} \frac{m_n^*}{m} \right)^{3/4} T^{3/2} \exp \frac{-E_g}{2k_B T} = \\ &= 4,82 \cdot 10^{21} m^{-3} K^{-3/2} \left( \frac{m_p^*}{m} \frac{m_n^*}{m} \right)^{3/4} T^{3/2} \exp \left( -\frac{E_g}{2k_B T} \right) \end{aligned} \quad (11.42)$$

V literatuře o fyzice pevných látek se většinou pokládá nulová hodnota energie do spodního okraje vodivostního pásu, tj.  $E_C = 0$  eV. Pak platí  $E_V = -E_g$ . Hodnoty energie nad spodním okrajem vodivostního pásu se označují jako kladné hodnoty, energie pod spodním okrajem vodivostního pásu jako hodnoty záporné. Hodnoty energie, které charakterizují materiál, jako je  $E_g$ ,  $E_A$ ,  $E_D$  se berou jako kladné hodnoty. Vztahy se zjednoduší na tvar

$$n_i = N_C \exp \frac{E_F}{k_B T} \quad (11.43)$$

$$p_i = N_V \exp \left( -\frac{E_F + E_g}{k_B T} \right) \quad (11.44)$$

$$E_F = -\frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_p^*}{m_n^*} \quad (11.45)$$

Ze vztahu (11.45) je vidět, že  $E_F < 0$  eV, což odpovídá úmluvě o hodnotách energií.

Zavedeme-li ve vztahu (11.25) energii  $E' = (-E_g - E)$  a  $E'_F = (-E_g - E_F)$  (viz obr. 11.11)-tj. zavedeme-li pro díry nulovou energii pro  $E_V = 0$  eV, lze psát

$$F'(E) = F'(E') = \frac{1}{\exp \frac{-E_g - E'_F + E' + E_g}{k_B T} + 1} = \frac{1}{\exp \frac{E' - E'_F}{k_B T} + 1}$$

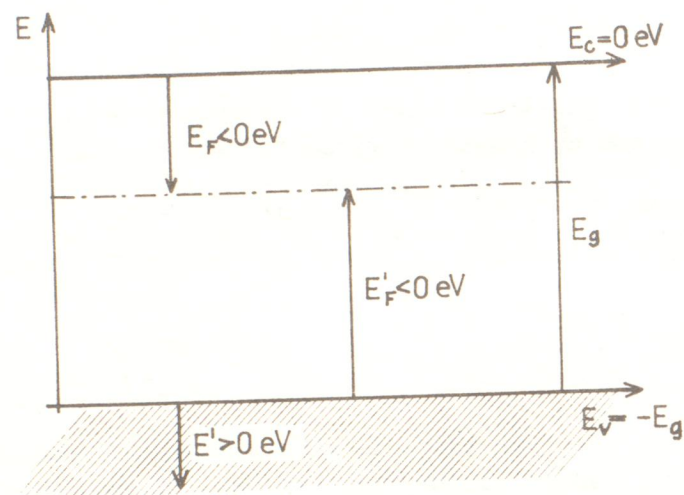
který je formálně stejný jako  $F(E)$ .  $E'_F$  má význam Fermiovy energie pro díry. Odečítá se od horního okraje valenčního pásu, směrem nahoru se bere záporně a směrem dolů kladně (viz obr. 11.11).

Pokud se jedná o nehomogenní polovodič, nebudou energiové pásy rovnoběžné s osou  $x$ . Bližší viz kapitola 13. Proto, pokud nebude výslovně řečeno, bude se vzhledem k obecnější platnosti platnosti používat vyjádření s  $E_C \neq 0$  eV.

Poznámka:

Při odvozování vztahů (11.36) a (11.38) jsme nikdy nepoužili podmínku, že se jedná o vlastní polovodič a proto tyto vztahy budou platit i v případě příměsového nedegenerovaného polovodiče. Poloha Fermiovy energie však může

být, jak uvidíme dále, odlišná od Fermiovy energie ve vlastním polovodiči.



Obr. 11.11. Vyznačení energií  $E$ ,  $E'$ ,  $E_F$ ,  $E'_F$  v energiovém modelu

2. Když není splněna podmínka  $(E - E_F) \gg k_B T$ , mluvíme o degenerovaném polovodiči. Pak nelze ve jmenovateli výrazu pro  $F(E)$  zanedbat jedničku a zůstává nám výraz (11.33). Platí

$$n_i = 4\pi \left( \frac{2m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} F_{1/2} \left( \frac{E_F}{k_B T} \right), \quad (11.46)$$

kde  $F_{1/2}(E_F/k_B T)$  je speciální případ Fermiova integrálu. Obecně

$$F_n(z) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp(x-z) + 1}, \quad z = \frac{E_F}{k_B T}, \quad x = \frac{E}{k_B T}. \text{ Tyto integrály lze}$$

řešit pouze numericky. Jsou tabelovány [4]. Výpočet  $E_F$  je v tomto případě možný pouze numericky.

Pro malou degeneraci, tj.  $-1 < z < 2$ , můžeme užít Ehrenbergovy aproximace. Platí

$$F_{1/2}(z) = \frac{2\pi^{1/2} \exp z}{4 + \exp z}.$$

Pro případ velké degenerace leží  $E_F$  ve vodivostním pásu. Pro  $z > 5$  (tj. leží výše než  $5k_B T$  nad spodním okrajem vodivostního pásu), platí pro Fermiův integrál aproximace

$$F_{1/2}(z) = \frac{2}{3} z^{3/2}.$$

Elektrony jsou plně degenerovány a polovodič přechází v kov.

Pokud není možné v polovodiči uvažovat kulové izoenergiové plochy (tj. nutno brát reálnou strukturu), vychází se z izoenergiových plůch ve tvaru rotačního elipsoidu. Pak platí (pro nedegenerovaný polovodič)

$$n_i = 2m_L^2 m_T \left( \frac{2k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{E_C - E_F}{k_B T} \right),$$

kde  $m_L$  je longitudinální složka efektivní hmotnosti a  $m_T$  je transversální

složka efektivní hmotnosti. Výraz lze formálně uvést na tvar (11.36) zavedením efektivní hmotnosti hustoty stavů

$$m_{nd}^{\#3} = m_L m_T^2.$$

### 11.7. Příměsové polovodiče

Příměsové polovodiče jsou takové polovodiče, v nichž jsou zabudovány příměsi donorového a akceptorového typu. Převládá-li hustota volných elektronů nad hustotou děr, tj. platí-li  $n > p$ , mluvíme o polovodiči typu N, je-li tomu naopak, tj. je-li  $p > n$ , mluvíme o polovodiči typu P. Jak bylo řečeno v poznámce v článku 11.6, platí vztahy (11.36) a (11.38) i pro příměsové nedegenerované polovodiče. Je tedy

$$n = N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T}, \quad (11.47)$$

$$p = N_V \exp \left( - \frac{E_F - E_V}{k_B T} \right). \quad (11.48)$$

Pak

$$np = N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T} N_V \exp \frac{-E_F + E_V}{k_B T} = N_C N_V \exp \frac{E_V - E_C}{k_B T} = N_C N_V \exp \left( - \frac{E_g}{k_B T} \right).$$

Porovnáním tohoto vztahu s (11.40) dostáváme vztah

$$np = n_i^2, \quad (11.49)$$

kde  $n_i$  je pro danou teplotu konstantní. Ze vztahu vyplývá, že v případě vzrůstu hustoty volných elektronů nad hustotu intrinzičnou dojde k poklesu hustoty děr pod hustotu intrinzičnou.

#### 11.7.1. Plná ionizace příměsí - donorové příměsí

Pokud je teplota polovodiče tak vysoká, že všechny příměsi jsou ionizovány, mluvíme o plné ionizaci příměsí. Pro valenční polovodiče je dostačující pokojová teplota, při které je  $k_B T = 0,026$  eV, což je podstatně více než  $E_L$ .

Ke zjištění podmínky pro to, zda se jedná o nedegenerovaný polovodič, vyjdeme z rovnice (11.47), kterou lze psát ve tvaru

$$n = N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T} = N_d.$$

Její řešení je

$$\frac{E_C - E_F}{k_B T} = \ln \frac{N_C}{N_d}. \quad (11.50)$$

Případ nedegenerovaného polovodiče nastane, když

$$\frac{E_C - E_F}{k_B T} \gg 1,$$

tj.  $\ln \frac{N_C}{N_d} \gg 1$ . Podrobnějším rozбором se však ukazuje, že k tomu, aby polovodič bylo možno považovat za nedegenerovaný stačí, aby  $\ln \frac{N_d}{N_C} < -2$ .

Pro výpočet  $n$  vyjdeme z podmínky neutrality. Celková hustota kladných

nábojů je rovna  $(p + N_d)$ , protože ionizované donory mají kladný náboj. Celková hustota záporných nábojů je  $n$ . Platí tedy

$$n = p + N_d.$$

Užitím vztahu (11.49) máme

$$n - \frac{n_1^2}{n} = N_d$$

a po úpravě

$$n^2 - nN_d - n_1^2 = 0.$$

Řešením dostáváme pro  $n$

$$n_{1,2} = \frac{N_d \pm \sqrt{N_d^2 + 4n_1^2}}{2}.$$

Protože výraz pod odmocninou  $(N_d^2 + 4n_1^2)$  je větší než  $N_d^2$ , vychází druhý kořen záporný a proto nemá reálné opodstatnění. Platí tedy

$$n = \frac{N_d + (N_d^2 + 4n_1^2)^{1/2}}{2} = \frac{N_d}{2} + \left[ \left( \frac{N_d}{2} \right)^2 + n_1^2 \right]^{1/2} = \frac{N_d}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4n_1^2}{N_d^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (11.51)$$

Vztah pro  $p$  získáme pomocí vztahu (11.49). Je

$$p = \frac{n_1^2}{n} = \frac{2n_1^2}{N_d} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4n_1^2}{N_d^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (11.52)$$

a) Příklad  $N_d \gg n_1$  a současně  $\ln(N_d/N_C) < -2$ .

Pro pokojovou teplotu a pro  $m_n^* = m$ , je  $N_C = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Stačí tedy, aby  $N_d < 3 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ . Ujijeme vztahu  $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  pro  $x \ll 1$  a rovnicí (11.51) upravíme na tvar

$$n = \frac{N_d}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2n_1^2}{N_d^2} \right) \right] = N_d + \frac{n_1^2}{N_d}. \quad (11.53)$$

Výraz pro  $p$  lze upravit na jednodušší vztah užitím vztahu  $n = p + N_d$ . Máme

$$p = n - N_d = \frac{n_1^2}{N_d}. \quad (11.54)$$

Porovnáním vztahů (11.53) a (11.54) zjistíme, že  $n > p$ , tj. jedná se o polovodič typu N.

b)  $n_1 \gg N_d$ . Pak  $\frac{n_1}{N_d} \gg 1$  a vztahy (11.51) a (11.52) lze zjednodušit. Dostáváme

$$n = \frac{N_d}{2} \left[ 1 + \frac{2n_1^2}{N_d^2} \right] = \frac{N_d}{2} + n_1. \quad (11.53a)$$

Výraz pro  $p$  získáme opět ze vztahu  $n = p + N_d$ . Je

$$p = \frac{N_d}{2} - n_1. \quad (11.54a)$$

Porovnáním rovnic (11.53a) a (11.54a) vychází  $n > p$ . Dále je vidět, že hustota elektronů je jen o málo větší než intrinzická hustota. V literatuře se často takový polovodič označuje  $\nu$  (slabý typ N).

Protože  $n > p$ , nazýváme elektrony majoritními částicemi s nábojem a díry minoritními.

### 11.7.2. Plná ionizace příměsí - akceptorové příměsí

Hodnota  $E_A$  je pro valenční polovodiče (ale i pro mnoho ostatních) podstatně menší než střední energie částic při pokojové teplotě ( $\sim 0,026 \text{ eV}$ ) a proto za těchto podmínek jsou prakticky všechny akceptory ionizovány. Podmínku, zda se jedná o nedegenerovaný polovodič zjistíme z rovnice (11.48).

Platí

$$p = N_V \exp \left( - \frac{E_F - E_V}{k_B T} \right) = N_A.$$

Z ní plyne

$$\frac{E_F - E_V}{k_B T} = \ln \frac{N_V}{N_A} \quad (11.55)$$

Podmínka pro nedegenerovaný polovodič je  $\frac{-E_V + E_F}{k_B T} \gg 1$ , tj.  $N_V \gg N_A$ . Po-

dobně jako u donorových příměsí, stačí k tomu, aby polovodič byl nedegenerovaný, platnost vztahu  $\ln(N_A/N_V) < -2$ . Vztah pro  $p$  a  $n$  zjistíme opět z podmínky neutrality. Platí

$$n + N_A = p.$$

Užitím vztahu (11.49) dostáváme

$$p = \frac{N_A}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4n_1^2}{N_A^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (11.56)$$

$$n = \frac{2n_1^2}{N_A} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4n_1^2}{N_A^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (11.57)$$

a) Pro případ  $N_A \gg n_1$ ,  $\ln(N_A/N_V) < -2$ , platí po úpravě

$$p = N_A + \frac{n_1^2}{N_A}, \quad (11.58), \quad n = \frac{n_1^2}{N_A}. \quad (11.59)$$

Porovnáním vztahů se zjistí, že  $p > n$  a jedná se o polovodič typu P. Protože  $p > n$ , nazýváme díry majoritní částice s nábojem a elektrony minoritní.

b) Pro  $N_A \ll n_1$  platí po zjednodušení

$$p = \frac{N_A}{2} + n_1 \quad (11.60) \quad \text{a} \quad n = \frac{N_A}{2} - n_1. \quad (11.61)$$

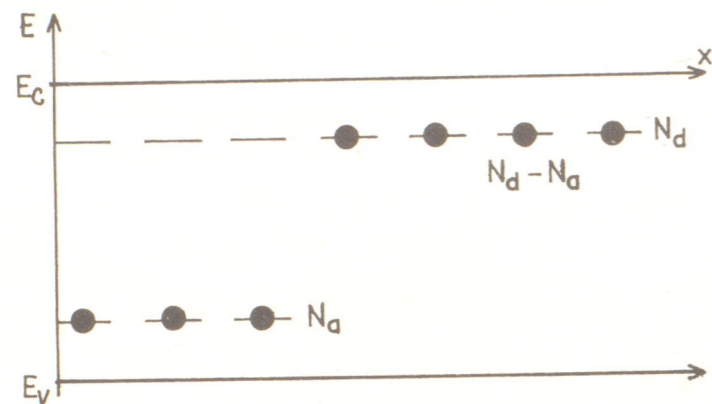
V tomto případě je hustota děr nepatrně vyšší než intrinzická hustota a jedná se o slabý polovodič typu P. V literatuře se často označuje jako typ  $\pi$ .

### 11.7.3. Plná ionizace příměsí - donorové a akceptorové příměsí

Předpokládejme, že máme polovodič s hustotou donorových příměsí  $N_d$  a jeden atom akceptorové příměsí. Vytvořením této akceptorové příměsí dojde k tomu, že elektron z donorové hladiny se přemístí na akceptorovou hladinu. K tomuto přechodu dojde bez dodání energie. Z celkového počtu  $N_d$  donorů jich nyní může být ionizováno pouze  $(N_d - 1)$ . Pokud bude hustota akceptorových pří-



měsí  $N_a$  (a platí  $N_d > N_a$ ), pak se  $N_a$  elektronů z donorových hladin přemístí na akceptorové hladiny, takže pak může dojít k ionizaci a tím i vytvoření volných elektronů pouze z  $(N_d - N_a)$  donorových hladin (viz obr. 11.12).



Obr. 11.12. Energiové schéma příměsové kompenzace

Donorové příměsí se tak nabíjejí kladně, akceptorové záporně. Takovýmto způsobem ionizované donory a akceptory už nedávají elektrony nebo díry do vodivostního nebo do valenčního pásu. Platí pro ně vztah

$$(N_d - N_a) = N_C \exp \frac{E_F - E_C}{k_B T}$$

V tomto případě mluvíme o kompenzovaných příměsích.

Opačně, je-li  $N_a > N_d$ , může dojít k ionizaci a vytvoří se pouze hustota děr  $(N_a - N_d)$ . Platí pro ni vztah

$$N_a - N_d = N_V \exp \left( - \frac{E_F - E_V}{k_B T} \right)$$

Závěrem této části se zaměříme na polohu Fermiovy energie. Máme-li polovodič typu N, lze v případě plné ionizace vypočítat  $E_F$  ze vztahu (11.47), kde  $n = N_d$  a vztah upravíme na tvar

$$E_F = E_C + k_B T \ln \frac{N_d}{N_C}$$

Položíme-li  $E_C = 0$  eV, pak

$$E_F = k_B T \ln \frac{N_d}{N_C} \quad (11.62)$$

Je-li polovodič nedegenerovaný, platí  $N_d < N_C$  a  $E_F < 0$  eV, tj.  $E_F$  se nachází v zakázaném pásu. Zvětšujeme-li  $N_d$ , zvětšuje se  $E_F$ , tj. Fermiova energie se posunuje od středu zakázaného pásu směrem nahoru ke spodnímu okraji vodivostního pásu. Jak bylo řečeno výše, je horní hodnota  $N_d$  pro to, aby polovodič nebyl ještě degenerovaný,  $\ln(N_d/N_C) < -2$ . Pro rovnost vychází

$$E_F = -k_B T \ln 2 \quad (11.62a)$$

Roste-li  $N_d$  ještě více, přechází polovodič v degenerovaný. Může dojít k případu, že  $E_F > 0$  eV, tj. že Fermiova energie se bude nacházet ve vodivostním pásu. Degenerovaný polovodič tohoto typu se v praxi označuje jako typ  $N^+$  (silně dotovaný). Pro pokojovou teplotu je mezní hodnota  $E_F = -0,05$  eV (viz vztah (11.62a)). Jak bylo řečeno výše, mezní hustota donorů v germaniu je  $N_d = 3 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ .

Fermiova energie se tedy bude změnou hustoty  $N_d$  posunovat ze středu zakázaného pásu (vlastní vodivost) až do vodivostního pásu.

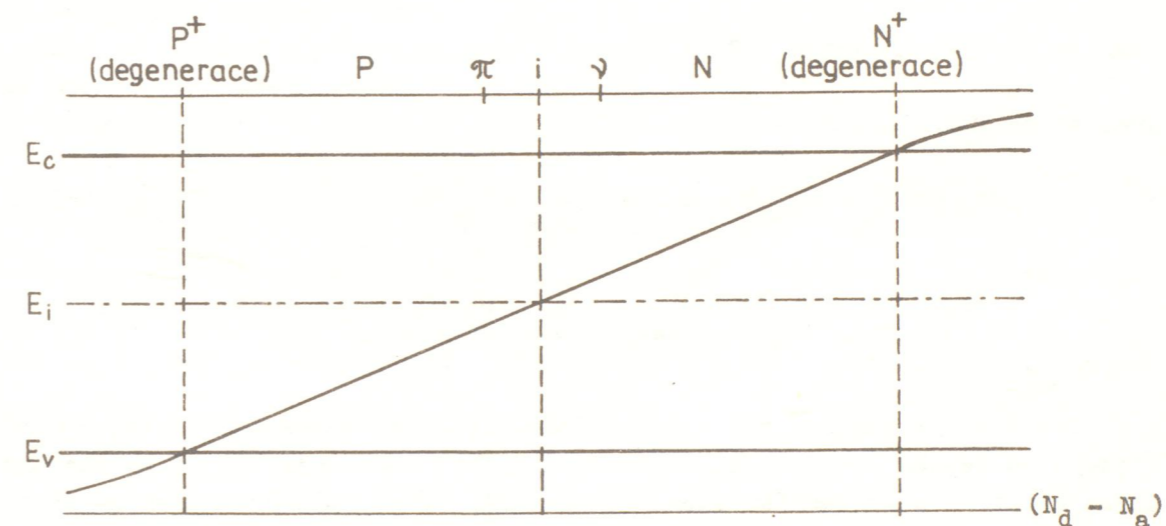
V případě polovodiče typu P lze vypočítat  $E_F$  ze vztahu (11.55), který lze upravit na tvar

$$E_F - E_V = k_B T \ln \frac{N_V}{N_a}$$

S rostoucím  $N_a$  se zmenšuje  $(E_F - E_V)$ , tj. Fermiova energie se posunuje směrem k hornímu okraji valenčního pásu. Hodnota  $N_a = N_V e^{-2}$  určuje největší hodnotu, při které lze polovodič ještě považovat za nedegenerovaný. Pro větší hodnoty  $N_a$  se Fermiova energie posunuje ještě blíže k hornímu okraji valenčního pásu, event. do valenčního pásu. Polovodič se stává degenerovaný. V literatuře se takový polovodič označuje  $P^+$  (silně dotovaný). Pro mezní hodnotu  $E_F$  platí při pokojové teplotě opět

$$E_F - E_V = 0,05 \text{ eV}$$

Tyto úvahy platí samozřejmě i pro kompenzovaný polovodič. Průběh  $E_F$  v závislosti na  $(N_d - N_a)$  event.  $(N_a - N_d)$  s vyznačením jednotlivých typů polovodičů, je na obr. 11.13.  $E_i$  je poloha Fermiovy energie pro intrinzický polovodič při  $T = 0$  K.



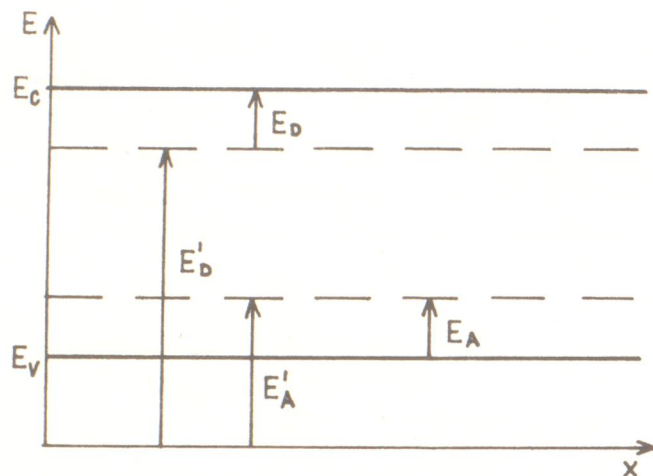
Obr. 11.13. Průběh  $E_F$  v závislosti na  $(N_d - N_a)$

#### 11.7.4. Neúplná ionizace příměsí

K neúplné ionizaci příměsí polovodiče typu N resp. P dochází při nízkých teplotách, tj. když  $k_B T < E_D$ , resp.  $k_B T < E_A$ . Pro další úvahy a výpočty bude důležité znát hustotu elektronů, které se uvolní z donorových hladin a dostanou se do vodivostního pásu resp. hustotu děr, které se uvolní z akceptorových hladin a dostanou se do valenčního pásu. Vyjdeme ze vztahů (11.22) a (11.23). Vzhledem k tomu, že v článku 11.4 se všechny uváděné energie  $E_D'$ ,  $E_A'$  odečítaly od určité hodnoty energie (viz obr. 11.14) a vzhledem k tomu, že v článku 11.6 se v souladu s běžným značením v literatuře zavedlo odečítání energií  $E_D$  resp.  $E_A$  od spodního okraje vodivostního pásu resp. od vrchního okraje valenčního pásu, je potřeba místo hodnot  $E_D'$  resp.  $E_A'$  v rovnicích (11.22) a (11.23) psát  $E_D' = E_C - E_D$  a  $E_A' = E_V + E_A$ .

Uvažujme polovodič typu N, ve kterém se nacházejí jen donorové příměsí o hustotě  $N_d$ . Výraz  $N_d^x$  představuje hustotu donorových hladin, které nejsou ionizovány, tj. na kterých se nacházejí elektrony. Hustotu ionizovaných hla-

din  $N_d^+$  (tj. hustotu elektronů ve vodivostním pásu z hladin donorových) vy-  
počteme ze vztahu



Obr. 11.14. Vztah mezi  $E_D$ ,  $E_A$  a  $E_D'$ ,  $E_A'$

přepsat na tvar (pro  $E_C = 0$  eV)

$$N_d^+ = N_d \left[ 1 + 2 \exp \frac{E_F + E_D}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.64)$$

Také platí

$$N_d^x = N_d \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp \frac{-E_D - E_F}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.65)$$

Pro výpočet hustoty děr ve valenčním pásu polovodiče typu P ( $N_d = 0 \text{ m}^{-3}$ ) vyjdeme ze vztahu (11.23). Ionizované akceptory znamenají, že se na nich nachází elektron z valenčního pásu. To znamená, že ve valenčním pásu se objeví díra. To je v terminologii děr totéž, jako když se díra uvolní z akceptorové hladiny a přemístí se do valenčního pásu. Pak hustota ionizovaných akceptorových hladin  $N_a^-$  je stejná jako hustota děr ve valenčním pásu. Platí tedy

$$N_a^- = N_a \left[ g_a \exp \frac{E_V + E_A - E_F}{k_B T} + 1 \right]^{-1}$$

Vzhledem k zavedení  $E_C = 0$  eV, je  $E_V = -E_g$  a

$$N_a^- = N_a \left[ g_a \exp \frac{E_A - E_g - E_F}{k_B T} + 1 \right]^{-1}$$

Protože  $g_a = 2$  (platí stejná poznámka jako u  $g_d$ ), je

$$N_a^- = N_a \left[ 1 + 2 \exp \frac{E_A - E_g - E_F}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.66)$$

Pro hustotu neionizovaných akceptorových hladin platí

$$N_a^x = N_a \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp \frac{E_g + E_F - E_A}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.67)$$

Máme-li tedy polovodič typu N ( $N_a = 0 \text{ m}^{-3}$ ), pak platí pro hustotu volných

$$N_d^+ = N_d - N_d^x$$

tj. po úpravě

$$N_d^+ = \frac{N_d}{g_d \exp \frac{E_F + E_D - E_C}{k_B T} + 1} \quad (11.63)$$

V článku 11.4 jsme si uvedli, že  $g_d = 2$ . Platí to pro jednoduché (jednou ionizované) donory v případě standartního polovodiče. Bude-li v některých konkrétních případech potřeba brát jinou hodnotu  $g_d$ , bude na to upozorněno. Vztah (11.63) lze tedy

elektronů

$$n = N_d \left[ 1 + 2 \exp \frac{E_F + E_D}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.68)$$

Pro polovodič typu P ( $N_d = 0 \text{ m}^{-3}$ ) platí pro hustotu děr

$$p = N_a \left[ 1 + 2 \exp \frac{E_A - E_g - E_F}{k_B T} \right]^{-1} \quad (11.69)$$

#### 11.7.5. Neúplná ionizace - nekompensovaný polovodič

Úvahy provedeme pro polovodič typu N. Pro polovodič typu P získáme vztahy analogické. Zanedbáme-li vlastní vodivost, lze psát

$$n = N_d^+ = \frac{N_d}{2 \exp \frac{E_F + E_D}{k_B T} + 1} \quad (11.70)$$

Dosazením z (11.43) dostáváme pro  $\exp \frac{E_F}{k_B T}$  kvadratickou rovnici a výpočtem

pro  $E_F$  vztah

$$E_F = -E_D + k_B T \ln \frac{1}{4} \left[ -1 + \left( \frac{N_d}{N_C} \exp \frac{E_D}{k_B T} + 1 \right)^{1/2} \right] \quad (11.71)$$

Tento vztah platí pro značný teplotní obor s výjimkou vysokých teplot, kdy se začíná uplatňovat intrinzická vodivost.

Pro nízké teploty platí  $n \ll N_d$ . Protože  $n = N_d^+$ , podle (11.64) a (11.43) je

$$n = \frac{N_d}{1 + 2 \exp \frac{E_D}{k_B T} \frac{n}{N_C}}$$

Po úpravě vychází

$$n^2 - \frac{1}{2} N_C (N_d - n) \exp \frac{-E_D}{k_B T} = 0$$

a protože  $n \ll N_d$ , je

$$n = \left( \frac{1}{2} N_C N_d \right)^{1/2} \exp \frac{-E_D}{2k_B T} \quad (11.72)$$

Pro  $E_F$  vychází (pomocí vztahu (11.43))

$$E_F = -\frac{E_D}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2N_C} \quad (11.73)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pro  $T = 0$  K platí  $E_F = -E_D/2$ .

Pro velmi nízké teploty platí  $N_d > 2N_C$  a proto se Fermiova energie posouvá ze středu mezi spodním okrajem vodivostního pásu a hladinou donorovou nahoru k vodivostnímu pásu a když platí  $N_d < 2N_C$ , začne klesat a posouvá se ke středu zakázaného pásu (viz obr. 11.15).

Pokud by bylo  $E_D$  velmi malé a velká hustota  $N_d$ , pak může Fermiova energie být kladná, tj. Fermiova hladina se bude nacházet ve vodivostním pásu.

Takový polovodič pak bude degenerovaný.

Analogické vztahy budou platit i pro polovodič typu P.  $E_F$  se zde bude pohybovat zrcadlově vzhledem k  $E_i$  (viz cvičení 11.3 a 11.7).

### 11.7.6. Neúplná ionizace příměsí - kompenzovaný polovodič

Kompenzovaný polovodič obsahuje jak donory tak i akceptory. Podmínku neutrality pro tento případ lze psát ve tvaru

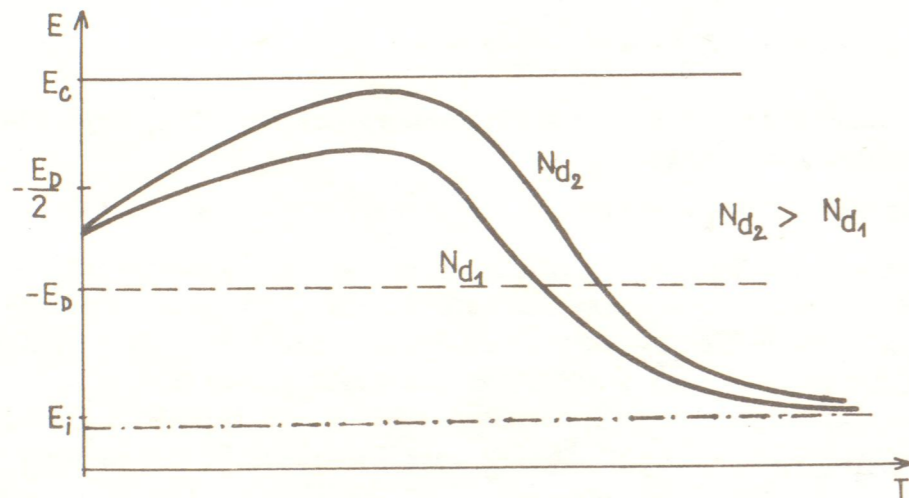
$$n + N_a^- = p + N_d^+ \quad (11.74)$$

nebo

$$n + N_a - N_a^x = p + N_d - N_d^x \quad (11.75)$$

Využijeme-li vztahů (11.64), (11.66), (11.43) a (11.44), dostaneme vztah pro  $E_F$ . Platí

$$N_C \exp \frac{E_F}{k_B T} + \frac{N_a}{1 + 2 \exp \frac{E_A - E_F - E_g}{k_B T}} = N_V \exp \frac{-E_g - E_F}{k_B T} + \frac{N_d}{1 + 2 \exp \frac{E_D + E_F}{k_B T}} \quad (11.76)$$



Obr. 11.15. Průběh  $E_F$  pro polovodič typu N pro neúplnou ionizaci při nízkých teplotách

zovaný polovodič předpokládáme, že platí  $p \approx 0 \text{ m}^{-3}$  a  $N_a^x \approx 0 \text{ m}^{-3}$ , zanedbáme-li intrinzičnou hustotu, (všechny hladiny jsou ionizovány elektrony z donorových hladin). Pak lze rovnici (11.75) přepsat na tvar

$$n + N_a = N_d - N_d^x \quad (11.77)$$

Rovnici vydělíme  $N_d^x$  a dostáváme

$$\frac{n + N_a}{N_d^x} = \frac{N_d}{N_d^x} - 1 \quad (11.78)$$

Užitím rovnic (11.65) a (11.77) lze rovnici (11.78) přepsat na tvar

$$\frac{n + N_a}{N_d - N_a - n} = \frac{1}{2} \exp \frac{-E_F}{k_B T} \exp \frac{-E_D}{k_B T}$$

a po užití rovnice (11.43) dostáváme

$$\frac{n(n + N_a)}{N_d - N_a - n} = \frac{1}{2} N_C \exp \frac{-E_D}{k_B T} \quad (11.79)$$

Dospěli jsme ke vztahu, který je velmi často používaný. Rovnici (11.79) lze ještě zjednodušit dalšími předpoklady. Probereme dva případy - případ slabě a silně kompenzovaného polovodiče.

#### Slabě kompenzovaný polovodič

Pro něj platí  $N_d \gg N_a$  a tedy i  $(N_d - N_a) \gg N_a$ . Teplotní obor si rozdělíme na tři oblasti:

##### I - oblast (nízké teploty)

Pak jsou donory velmi slabě ionizovány a platí tedy  $n \ll (N_d - N_a)$  a současně i  $n \ll N_a$ . Pak z rovnice (11.79) platí

$$n = \frac{N_d - N_a}{N_a} \frac{N_C}{2} \exp \frac{-E_D}{k_B T} \quad (11.80)$$

a dosazením za  $n$  z (11.43) vypočteme  $E_F$ . Platí

$$E_F = -E_D + k_B T \ln \frac{N_d - N_a}{2N_a} \quad (11.81)$$

Z této rovnice je vidět, že pro  $T = 0 \text{ K}$  je  $E_F = -E_D$  a s rostoucí teplotou roste, protože  $\ln \left[ \frac{(N_d - N_a)}{N_a} \right] > 0$  ( $(N_d - N_a) \gg N_a$ ) a posouvá se směrem k vodivostnímu pásu.

##### II - oblast

Zde jsou splněny předpoklady  $n \ll (N_d - N_a)$ , ale protože se jedná již o teploty vyšší než v první oblasti, je  $n \gg N_a$ . Potom platí

$$\frac{n^2}{N_d - N_a} = \frac{1}{2} N_C \exp \left( -\frac{E_D}{2k_B T} \right)$$

Použitím rovnice (11.43) vypočteme  $E_F$ . Platí

$$E_F = -\frac{E_D}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d - N_a}{2N_C} \quad (11.82)$$

Protože  $N_C \sim T^{3/2}$ , může nastat případ, že pro nízké teploty je  $N_C$  tak malé, že je  $(N_d - N_a) > 2N_C$ . Pak druhý člen výrazu (11.82) je kladný a s rostoucí teplotou roste. Poloha Fermiovy energie se tedy s rostoucí teplotou zvedá ke spodnímu okraji vodivostního pásu.

##### III - oblast - oblast úplné ionizace

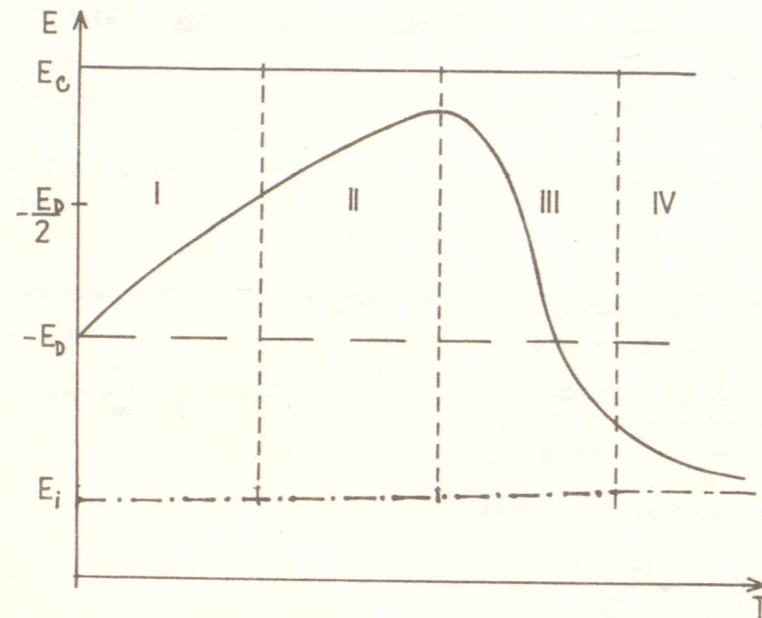
Dosáhne-li teplota takové hodnoty, že platí  $k_B T > E_D$ , jsou všechny donorové hladiny ionizovány a platí  $n = N_d - N_a$ . Při přechodu z oblasti II do oblasti III dochází k tomu, že Fermiova hladina začne klesat a klesne pod donorovou hladinu. Hustota elektronů nezávisí na teplotě, dokud nezačne převládat intrinzičká hustota částic.

Poloha Fermiovy hladiny v závislosti na teplotě je znázorněna na obr. 11.16. Oblast IV odpovídá převládající intrinzičké hustotě elektronů.

$E_1$  představuje polohu Fermiovy hladiny pro vlastní polovodič.

Silně kompenzovaný polovodič

Pro něj platí  $N_d \gg N_a$ ,  $(N_d - N_a) \ll N_a$ .



Teplotní oblast si rozdělíme na dvě oblasti odpovídající oblasti I a III pro slabě kompenzovaný polovodič. Oblast II nemůže existovat, protože nelze splnit předpoklad  $n \gg N_a$ . Muselo by totiž platit  $n \gg N_a \gg (N_d - N_a)$ , což není fyzikálně možné splnit mimo intrinzičtý polovodič.

Pro oblast I platí rovnice (11.80) a (11.81). Z rovnice (11.81) je

$$\frac{N_d - N_a}{2N_a} \ll 1 \text{ a tedy}$$

Obr. 11.16. Poloha  $E_F$  v závislosti na teplotě pro slaběkompenzovaný polovodič

poloha  $E_F$  se bude s rostoucí teplotou posouvat od  $(-E_D)$  ke středu zakázaného pásu (v oblasti III).

Pro částečně kompenzovaný polovodič typu P platí analogický vztah jako (11.79). Je

$$\frac{p(p + N_d)}{N_a - N_d - p} = \frac{1}{2} N_V \exp \frac{-E_A}{k_B T} \quad (11.83)$$

Všechny výsledky uvedené v článku 11.7.6 se dají použít i pro polovodiče typu P jen záměnou příslušných symbolů. Poloha  $E_F$  je opět zrcadlově symetrická vzhledem k  $E_1$ .

Literatura:

- [1] Gallagher, C.J: Phys.Rev. 88 (1952), str. 721
- [2] Read W.T: Phil.Mag. 45 (1954), str. 775, 45 (1954), str. 1119
- [3] Logan R.A; Pearson G.L; Kleinman D: J. Appl.Phys. 30 (1959), str. 885
- [4] Brož F; Roskovec V; Valouch M: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL Praha 1980

Význam použitých symbolů

- a - mřížková konstanta
- E - energie elektronů

- $E'$  - energie děr
- $E_A$  - energie akceptorových příměsí vzhledem k vrchnímu okraji valenčního pásu
- $E'_A$  - energie akceptorových příměsí vzhledem k libovolnému počátku
- $E_b$  - energie spodního okraje valenčního pásu
- $E_D$  - energie donorových příměsí vzhledem ke spodnímu okraji vodivostního pásu
- $E'_D$  - energie donorových příměsí vzhledem k libovolnému počátku
- $E_g$  - šířka zakázaného pásu
- $E_H$  - ionizační energie atomu vodíku
- $E_i$  - Fermiova energie odpovídající intrinzičtému polovodiči při  $T = 0 \text{ K}$ .
- $E_j$  - energie elektronů na j- té hladině
- $E_t$  - energie vrchního okraje vodivostního pásu
- $g_a$  - stupeň degenerace pro akceptory
- $g_d$  - stupeň degenerace pro donory
- $g_j$  - hustota stavů na j- té hladině
- $m_L$  - longitudinální efektivní hmotnost
- $m_n^*$  - efektivní hmotnost elektronů
- $m_p^*$  - efektivní hmotnost děr
- $m_T$  - transverzální efektivní hmotnost
- $N_a$  - hustota akceptorů
- $N_a^-$  - hustota ionizovaných akceptorů
- $N_a^0$  - hustota neionizovaných akceptorů
- $N_C$  - efektivní hustota stavů (elektronů)
- $N_d$  - hustota donorů
- $N_d^+$  - hustota ionizovaných donorů
- $N_d^0$  - hustota neionizovaných donorů
- $N_V$  - efektivní hustota stavů (děr)
- $n_i$  - hustota volných elektronů v intrinzičtém polovodiči
- $n_j$  - hustota elektronů na j- té hladině
- $p_i$  - hustota děr v intrinzičtém polovodiči
- $r_H$  - Bohrov poloměr pro vodík
- $T_T$  - teplota tání
- $U$  - celková energie elektromu
- $W_j$  - počet vzájemných přeskupení na j- té hladině
- $Z$  - protonové číslo
- $\alpha, \beta$  - Lagrangeovy neurčité multiplikátory
- $\epsilon_r$  - relativní permitivita
- $\Theta_T$  - Debyeova teplota

## 12. TRANSPORTNÍ JEVY V POLOVODIČÍCH

### 12.1. Vedení proudu v polovodičích

Při výkladu vedení elektrického proudu v polovodičích vyjdeme stejně jako v kapitole 8 z Fermiovy-Diracovy statistiky a Boltzmannovy transportní rovnice. Předpokládá se existence relaxační doby  $\tau$ . Pro výpočet uvažujeme z důvodů zjednodušení homogenní prostředí ( $F(E)$  není funkcí souřadnic) a intenzitu elektrického pole  $\mathcal{E}$  ve směru osy  $x$  ( $\mathcal{E}_x$ ). Prozatím také neuvažujeme funkční závislost  $\tau$  na  $E$  (nebo  $v$ ). V dalších článcích této kapitoly se budeme zabývat i různými druhy rozptylu, tj. i případem závislosti  $\tau = f(E)$ .

Výpočtem stejným jako v kapitole 8 se dojde ke vztahu pro měrnou vodivost  $\gamma$ . Platí (pro složku způsobenou volnými elektrony)

$$\gamma_n = \frac{ne_o^2 \tau_n}{m_n^*}, \quad (12.1)$$

kde  $n$  je hustota volných elektronů,  $e_o$  velikost náboje elektronu,  $\tau_n$  relaxační doba,  $m_n^*$  efektivní hmotnost elektronu. Tento vztah se častěji uvádí ve tvaru

$$\gamma_n = ne_o \mu_n, \quad (12.2)$$

kde  $\mu_n$  se nazývá pohyblivost elektronů. Platí

$$\mu_n = \frac{e_o \tau_n}{m_n^*}. \quad (12.2a)$$

Její jednotkou je  $m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$ .

V kapitole 8 je jako důsledek řešení transportní rovnice dále uveden vztah pro hustotu proudu (Ohmův zákon v diferenciálním tvaru)

$$j_x = \gamma \mathcal{E}_x. \quad (12.3)$$

Dále byl při výkladu fyzikálních mechanismů vzniku relaxační doby odvozen vztah mezi střední unášivou rychlostí a hustotou proudu ve tvaru

$$j_x = ne_o \bar{v}, \quad (12.4)$$

kde  $\bar{v}$  je střední unášivá (driftová) rychlost. Dosazením (12.2) do (12.3) a porovnáním s (12.4) vychází

$$\mu_n = \frac{\bar{v}}{\mathcal{E}_x}. \quad (12.5)$$

Z této rovnice je zřejmý fyzikální význam pohyblivosti  $\mu$ . Je číselně rovna střední unášivé rychlosti udělené elektronům v elektrickém poli o jednotkové intenzitě.

V kapitole 11 jsme zjistili, že v polovodičích existují kromě volných elektronů i díry. I tyto "částice" se mohou v polovodiči pohybovat, tj. mohou se podílet na vedení elektrického proudu. U polovodičů tedy mluvíme o elektronové a děrové složce proudu. Pro díry, jak je zřejmé, budou platit podobné vztahy jako pro elektrony. Je tedy

$$\gamma_p = pe_o \mu_p, \quad (12.2b)$$

kde  $\mu_p$  je pohyblivost děr. Označme  $j_{nx}$  elektronovou složkou hustoty proudu

ve směru osy  $x$  a  $j_{px}$  děrovou složku ve směru osy  $x$ . Protože díry mají kladný náboj, pohybují se vlivem elektrického pole opačným směrem než elektrony a protože usměrněný pohyb elektronů je ekvivalentní usměrněnému pohybu děr v opačném směru, bude pro celkovou hustotu proudu  $j_x$  platit

$$j_x = j_{nx} + j_{px}. \quad (12.6)$$

Z rovnic (12.2), (12.2b) a (12.3) po dosazení do (12.6) dostáváme

$$j_x = (ne_o \mu_n + pe_o \mu_p) \mathcal{E}_x = \gamma \mathcal{E}_x. \quad (12.7)$$

Z (12.7) vychází, že pro měrnou vodivost vzorku, který obsahuje volné elektrony i díry, platí vztah

$$\gamma = ne_o \mu_n + pe_o \mu_p. \quad (12.8)$$

Dále si probereme mechanismus vedení elektrického proudu v polovodičích z hlediska částicové struktury. Nepůsobí-li elektrické pole, konají volné částice s nábojem chaotický (neuspořádaný) pohyb. Počet částic prošlých plochou o jednotkovém plošném obsahu za jednotku času v jednom směru je stejný, jako počet částic prošlých v opačném směru a vzorkem tedy neprochází žádný proud. Tyto úvahy platí pro libovolně zvolený směr. Velikost rychlosti chaotického pohybu je řádově  $10^5$  m.s<sup>-1</sup> až  $10^6$  m.s<sup>-1</sup>.

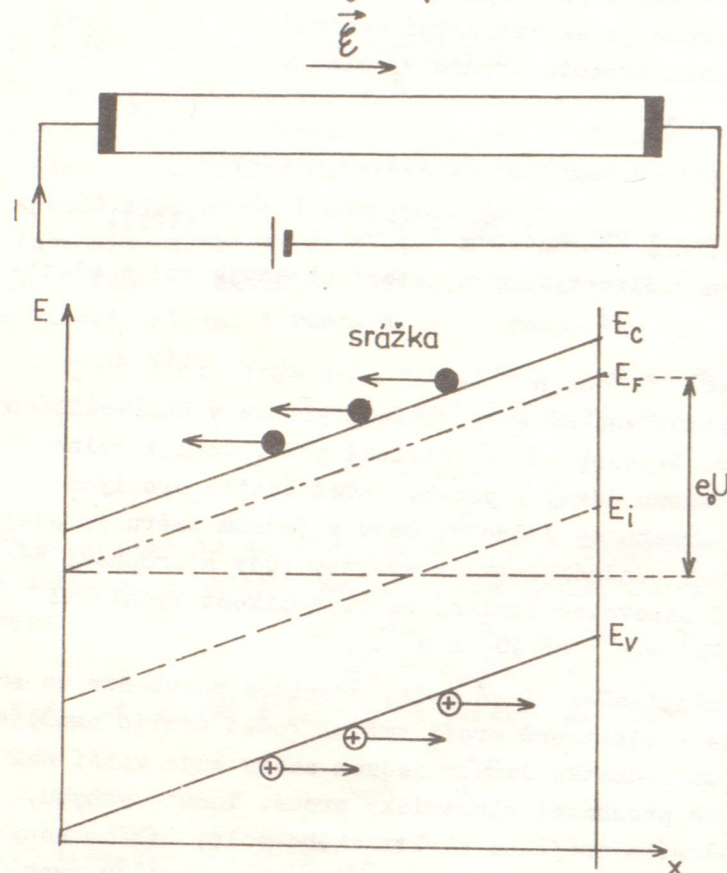
Přiložíme-li ke vzorku vnější elektrické pole, převládá pohyb děr ve směru intenzity elektrického pole a elektronů proti směru. Počet částic prošlých plochou o jednotkovém obsahu za jednotku času v jednom směru bude větší než ve směru opačném a vzorkem bude procházet elektrický proud. Tomuto pohybu, který vznikl v důsledku přiloženého vnějšího elektrického pole, říkáme pohyb usměrněný. Protože se každá částice bude pohybovat v tomto poli jinou rychlostí, zavádíme z makroskopického hlediska střední unášivou rychlost někdy označovanou jako driftovou. Částice se v době mezi dvěma srážkami pohybují zrychleným pohybem a jejich energie se tedy zvětšuje. V energiovém schématu to odpovídá pohybu elektronu ve vodivostním pásu směrem nahoru. Pro díry jde o jejich pohyb ve valenčním pásu směrem dolů. Proto pokud nejsou vyšší energiové hladiny (pro elektrony) v pásu volné, nemůže procházet látkou elektrický proud s výjimkou případu, kdy se dodává elektronům energie  $E_g$  k překonání zakázaného pásu.

Pro střední volnou dráhu  $\Lambda$ , kterou urazí částice mezi dvěma srážkami, platí za předpokladu, že  $\tau$  je střední doba mezi dvěma srážkami (viz kapitola 8)

$$\Lambda = v \tau. \quad (12.9)$$

Nachází-li se volný elektron v krystalové mřížce polovodiče, je jeho energie v pásovém modelu zobrazena u spodního okraje vodivostního pásu. Průběh  $E_C$  je totožný s místním rozložením energie. Proto lze osu  $x$  v pásovém modelu používat jako prostorovou souřadnici pro znázornění místního průběhu potenciálu. Pokud je přiloženo na vzorek elektrické pole, pohybují se volné částice vždy k místům menší potenciální energie, tj. o ( $-e_o U$ ) pro elektrony resp. ( $+e_o U$ ) pro díry méně než je hodnota  $E_C$  bez elektrického pole. Pro případ homogenního vzorku ve tvaru tyčinky všude stejného obsahu průřezu, na kterou je přilože-

no napětí, je průběh  $E_C$  a  $E_V$  znázorněn na obr. 12.1. V horní části je znázor-



Obr. 12.1. Průběh potenciální energie elektronů v homogenním elektrickém poli

postavenou skleněnou desku, můžeme pohyb děr přirovnat k pohybu bublinek ve vodě podél desky.

Ze vztahu (12.3) vychází, že hustota proudu je přímo úměrná intenzitě elektrického pole. Existují však případy, kdy dochází k porušení platnosti Ohmova zákona. Je to např. v případě nehomogenního polovodiče (přechod PN) nebo jevy na povrchu. Avšak i v případě homogenního polovodiče může dojít k tomu, že neplatí Ohmův zákon. Je to v případě silného elektrického pole. Pak není  $\gamma$  konstantou, ale je funkcí intenzity elektrického pole ( $\mu = f(\mathcal{E})$ ,  $n = f(\mathcal{E})$ ).

Bylo zjištěno, že měrná vodivost se mění v silném poli s intenzitou elektrického pole podle zákona

$$\gamma = \gamma_0 \propto (\mathcal{E} - \mathcal{E}_k)$$

kde  $\mathcal{E}_k$  je velikost kritické intenzity elektrického pole, od které neplatí Ohmův zákon. Grafická závislost  $\ln \gamma$  na  $\mathcal{E}$  je znázorněna na obr. 12.2. Je z něj vidět, že Ohmův zákon platí pro velikosti intenzity elektrického pole od  $0 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$  do  $\mathcal{E}_k$  a pro větší velikosti intenzit Ohmův zákon neplatí. Jak ukazují experimentálně zjištěné hodnoty, platnost Ohmova zákona přestává pro  $\mathcal{E}_k > 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ , u některých polovodičů již při  $10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Experimentálně zjištěná skutečnost, že s rostoucí intenzitou elektrického pole přiloženého na vzorek, rychle roste měrná vodivost, má široké uplat-

něn i vzorek s přiloženým vnějším elektrickým polem. Protože je v pásovém modelu zvykem vynášet energii elektronu jako kladnou veličinu, bude u levého konce krystalu připojeného na kladný pól zdroje hodnota  $E_C$  a  $E_V$  o ( $e_0 U$ ) níže než u pravého konce vzorku spojeného se záporným pólem zdroje. Představíme-li si spodní okraj vodivostního pásu jako nakloněnou rovinu, můžeme si pohyb elektronů v elektrickém poli představit jako koulení kuliček v gravitačním poli. Díry se pohybují od kladného pólu zdroje k zápornému a proto, jestliže si horní okraj valenčního pásu představíme jako šikmo

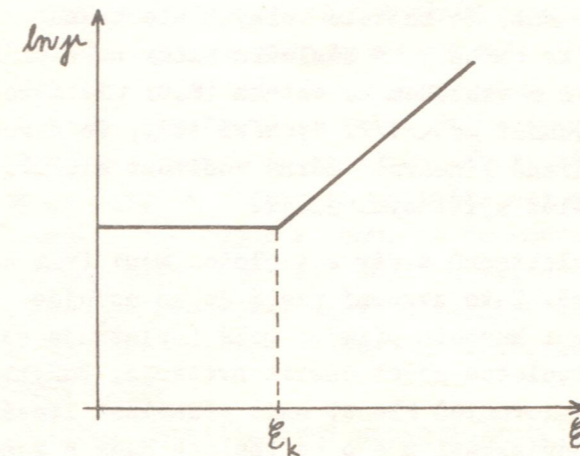
nění v nelineárních rezistorech, které se nazývají varistory (viz kapitola 13).

Fyzikálních příčin, které vedou k tomuto jevu, je několik. Zde se zmíníme o dvou.

#### a) Termoelektrická ionizace

Frenkel vytvořil v roce 1946 teorii, podle které mění vnější pole přiložené k polovodiči energiové stavy atomů tak, že na převedení elektronu z valenčního pásu do vodivostního pásu stačí energie o  $\Delta E$  menší než je  $E_g$  (tj. energie bez přítomnosti elektrického pole). Tím se zvyšuje pravděpodobnost tepelné generace elektronu (termoelektrická ionizace). Pro  $\Delta E$  platí

$$\Delta E = 2e_0 \sqrt{\frac{e_0 \mathcal{E}}{\epsilon}}$$



Obr. 12.2. Závislost měrné vodivosti na velikosti intenzity elektrického pole

V energiovém schématu to vypadá tak, že se vlivem elektrického pole zmenší  $E_g$ .

#### b) Nárazová ionizace

Při velkých velikostech intenzit elektrických polí získá volný elektron dostatečně velkou energii k tomu, aby ionizoval atom a uvolnil z něho elektron. To znamená, že se vytvořil další volný elektron. V pásovém schématu to vypadá tak, že se ve vodivostním pásu objeví další elektron.

Tento mechanismus však nemá za následek elektrický průraz polovodiče, tj. zvyšování hustoty elektronů o mnoho řádů, protože uvolněné elektrony interagují s kmity mřížky a tím jim svoji energii předávají. Současně však s růstem hustoty elektronů roste i jejich rekombinace s dírami, takže se ustaví vždy rovnovážný stav s odpovídající rovnovážnou hustotou elektronů.

K elektrickému průrazu dochází při podstatně větších intenzitách elektrického pole.

V tab. 12.1 jsou uvedeny pohyblivosti volných elektronů ( $\mu_n$ ) a děr ( $\mu_p$ ) pro Ge a Si.

#### 12.2. Rozdíl mezi kovem a polovodičem

V článku 7.5 jsme se seznámili s rozdílem mezi kovem, polovodičem a izolantem z hlediska pásové struktury jednotlivých látek. Nyní si všimneme experimentálně zjištěných teplotních závislostí měrné vodivosti pro kovy a polovodiče a zaměříme se na výklad těchto odlišných závislostí.

Polovodič	$\frac{\mu_n}{\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\mu_p}{\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$
Ge	0,36	0,16
Si	0,14	0,05

Tab. 12.1. Pohyblivosti elektronů a děr v Ge a Si

Experimentálně bylo zjištěno, že měrný odpor kovů s rostoucí teplotou roste čili měrná vodivost klesá (s vyloučením velmi nízkých teplot). U polovodičů naopak měrná vodivost (v určitém intervalu teplot) s rostoucí teplotou roste. K výkladu těchto závislostí vyjdeme ze vztahu (12.2).

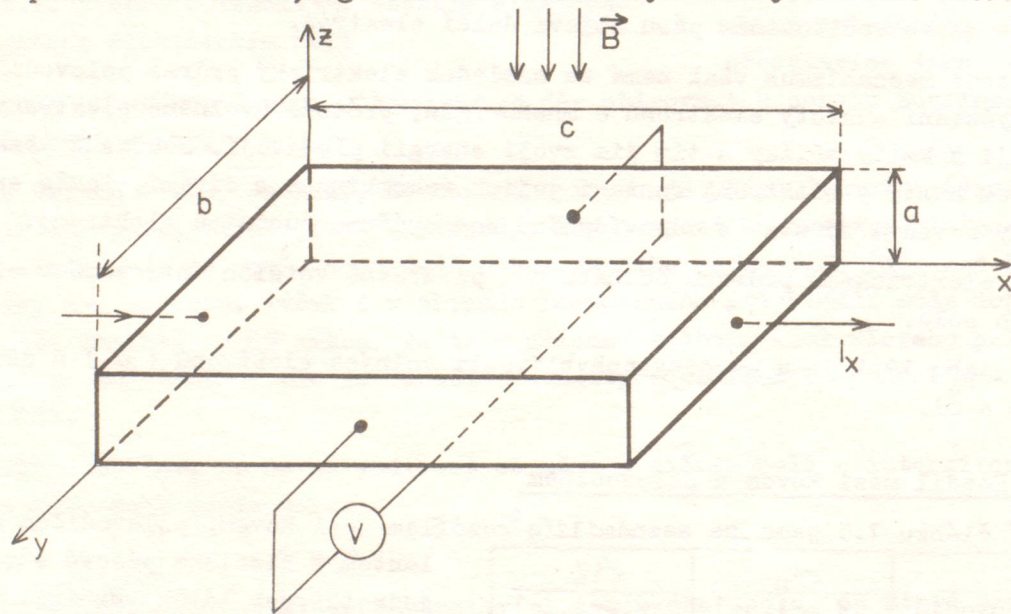
Pro kovy bylo v kapitole 8 zdůrazněno, že hustota volných elektronů nezávisí na teplotě a proto nedochází ke změně  $\gamma$  v důsledku změny  $n$ . V článku 8.5 jsme se dále dozvěděli, že  $\rho \sim T$  a vzhledem ke vztahu (8.8) platí také  $\gamma = 1/\rho \sim 1/T$ . Ze vztahu (12.2) vychází  $\mu \sim 1/T$ . Vychází tedy, že s rostoucí teplotou měrný odpor roste přibližně lineárně (měrná vodivost klesá). Tento závěr je v souladu s experimentálně zjištěnými údaji.

U polovodičů se hustota volných elektronů a děr s teplotou mění (viz kapitola 11) a to přibližně exponenciálně. Toto tvrzení platí dokud nedojde k úplné ionizaci příměsí nebo pokud není hustota příměsí malá (uplatňuje se vlastní vodivost). Pak se s rostoucí teplotou počet částic zvětšuje. Pohyblivost volných částic s nábojem bude u polovodičů klesat opět přibližně lineárně. Vzhledem k převaze exponenciální závislosti  $n$  a  $p$  na teplotě bude s rostoucí teplotou měrná vodivost vzrůstat, což souhlasí s experimentálními údaji.

### 12.3. Hallův jev

#### 12.3.1. Hallův jev - slabá magnetická pole

V prvním článku jsme se zabývali ději, které vzniknou po přiložení elektrického pole na polovodivý vzorek. Nyní se budeme zabývat případem, kdy kromě elektrického pole umístíme vzorek do magnetického pole. Poloha vzorku vzhledem k poli elektrickému, magnetickému a souřadným osám je na obr. 12.3. Je vidět,



Obr. 12.3 Orientace vzorku vzhledem k elektrickému a magnetickému poli

že elektrický proud prochází ve směru osy  $x$  a magnetické pole má indukci ve směru osy  $z$ . Pro zjednodušení budeme nejdříve uvažovat malou velikost indukce. Pro tento případ si ukážeme, že lze odvodit kvantitativně vztahy pro Hallův jev jednoduchým způsobem. Dále předpokládejme, že polovodivý vzorek je homogenní, je polovodič typu N a obsahuje jen elektrony, čili, že hustotu

minoritních částic s nábojem lze zanedbat. Protože se každý elektron pohybuje jinou rychlostí, je potřeba při popisu účinků magnetického pole (podobně jako u pole elektrického) uvažovat jejich střední unášivou rychlost. Na elektrony působí Lorentzova síla  $\vec{F} = -e_0[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$ ,

kde  $\vec{v}$  je jejich střední unášivá rychlost. Složka Lorentzovy síly od magnetického pole je vždy kolmá na tuto rychlost a na indukci magnetického pole. Pro malé velikosti indukce má tato síla prakticky směr osy  $y$ . Zakřivení dráhy elektronu je velmi malé. Znamená to, že na elektron působí také síla, která jej vychyluje ve směru osy  $y$ . Před vložením vzorku do magnetického pole je hustota elektronů ve směru osy  $y$  v celém vzorku stejná. Vlivem magnetického pole dojde k tomu, že ve směru osy  $y$  vznikne nerovnoměrné rozložení hustoty elektronů, tj. dojde k vytvoření gradientu hustoty. U jedné boční stěny vznikne větší hustota volných elektronů než u druhé stěny. Na bočních stěnách se vytvoří napětí  $U_H$ , které se nazývá Hallovo napětí a příslušný jev Hallův jev.

Pro kvantitativní popis Hallova jevu vyjdeme z orientace znázorněné na obr. 12.3 a neuvažujeme rozptyl. Jak již bylo řečeno, na elektrony působí ve směru osy  $y$  magnetická síla, která způsobuje nerovnoměrné rozložení elektronů ve směru osy  $y$ . Proti této síle působí elektrická síla vytvářejícího se elektrického pole v opačném směru. Rovnováha nastane, když se jejich vektorový součet rovná nule ( $\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$ ), tj. platí

$$-e_0 \vec{v} B - e_0 \mathcal{E}_y = 0,$$

kde  $\vec{v}$  je velikost rychlosti elektronu, čili

$$\mathcal{E}_y = -\vec{v} B. \quad (12.10)$$

Na volný elektron tedy bude působit jak síla ve směru osy  $x$ , tak i ve směru osy  $y$  a elektron se bude pohybovat ve směru síly vzniklé jejich vektorovým složením. Pro úhel  $\Theta_n$  (Hallův úhel) mezi osou  $x$  a výslednou silou platí

$$\text{tg } \Theta_n = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x}. \quad (12.11)$$

Dosazením za  $\vec{v}$  z (12.5) do (12.10) dostáváme

$$\mathcal{E}_y = -B \mu_n \mathcal{E}_x \quad (12.10a)$$

a tedy

$$\text{tg } \Theta_n = -B \mu_n. \quad (12.11a)$$

Z (12.10a) po dosazení za  $\mathcal{E}_x$  z (12.3) dostáváme

$$\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_y = -B \mu_n \frac{j_x}{\gamma} = -B \mu_n \frac{j_x}{ne_0 \mu_n} = R_H B j_x. \quad (12.12)$$

Veličina  $R_H$  se nazývá Hallova konstanta a platí

$$R_H = -\frac{1}{ne_0}. \quad (12.13)$$

Jednotkou Hallovy konstanty je  $\text{m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ .

Pro homogenní vzorek dále platí (viz obr. 12.3)  $U_H = \mathcal{E}_H b$  a po dosazení do (12.12) s přihlédnutím ke vztahu  $j_x = I_x / (ab)$  máme

$$U_H = R_H \frac{BI}{ab} \quad b = R_H \frac{BI}{a}. \quad (12.14)$$

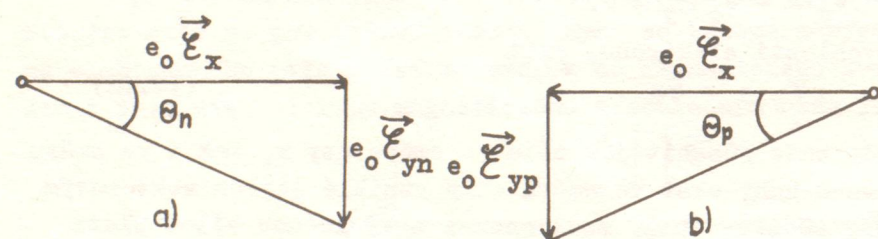
V polovodiči typu P jsou majoritními částicemi s nábojem díry. Předpokládejme opět, že lze hustotu minoritních částic s nábojem zanedbat. Protože při daném uspořádání (tj. i směru proudu) se díry pohybují opačně než elektrony, je nutné v rovnici (12.10) zaměnit  $\bar{v}$  za  $(-\bar{v})$ . Stejnými úvahami jako u polovodiče typu N dojdeme v tomto případě ke vztahu

$$R_H = \frac{1}{pe_0} \quad (12.13a)$$

Ze vztahů (12.13) a (12.13a) je vidět, že pro dané uspořádání i velikosti  $j$  a  $B$  je Hallovo napětí větší u těch vzorků, kde je větší  $R_H$ . Protože u polovodičů je hustota volných částic s nábojem o několik řádů menší než hustota elektronů v kovech, bude Hallova konstanta pro kovy o několik řádů menší než pro polovodiče a  $U_H$  bude při jinak stejných podmínkách o několik řádů větší.

Dále je ze vztahů (12.13) a (12.13a) vidět, že znaménko Hallovy konstanty pro polovodiče je různé pro typ N a P a tedy existuje možnost, jak pomocí Hallova jevu zjistit, zda se jedná o polovodič typu P nebo N. Možnost omylu je však velká (viz také dále) a proto se často k určení typu vodivosti volí jiné metody (např. pomocí termoelektrického jevu).

Výpočet i výraz pro Hallovu konstantu se stane značně složitějším, když nelze zanedbat hustotu minoritních částic s nábojem. Při výpočtu Hallovy konstanty vyjdeme z obr. 12.4. Na obr. 12.4a jsou znázorněny složky síly ve směru



osy  $x$  a  $y$  působící na elektron a na obr. 12.4b na díry. Protože, jak je vidět z obr., vychylují se jak elektrony tak i díry na stejnou stranu polovodiče, bude proud tvořený elektrony

12.4. Znázornění složek sil působících na elektron v elektrickém a magnetickém poli

i dírami ve směru osy  $y$  dán rozdílem těchto složek proudu. Platí tedy

$$j_y = j_{yp} - j_{yn} = pe_0\mu_p E_{yp} - ne_0\mu_n E_{yn},$$

kde  $j_{yp}$  resp.  $E_{yp}$  jsou děrové složky proudu resp. intenzity elektrického pole, podobně elektronové složky. Použitím vztahů  $\tan \theta_n = \theta_n = -B\mu_n$ ,  $\tan \theta_p = \theta_p = B\mu_p$  a (12.11) je

$$j_y = (-ne_0\mu_n \theta_n E_x + pe_0\mu_p \theta_p E_x) = Be_0 E_x (-n\mu_n^2 + p\mu_p^2). \quad (12.15)$$

K vytvoření rovnovážného stavu, tj., aby vzorkem neprocházel ve směru osy  $y$  žádný proud, dojde, když se vytvoří elektrické pole o takové intenzitě, že proud vytvořený působením Lorentzovy síly kompenzuje proud vytvořený elektrickým polem o velikosti intenzity  $E_y$ , tj., když platí

$$E_y = \frac{j_y}{j} \quad (12.16)$$

Dosazením z (12.15) do (12.16) dostáváme

$$E_y = \frac{-n\mu_n^2 + p\mu_p^2}{ne_0\mu_n + pe_0\mu_p} Be_0 E_x$$

a po dosazení za  $E_x$  z (12.3) máme

$$E_y = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e_0(n\mu_n + p\mu_p)^2} Bj_x \quad (12.17)$$

Porovnáním (12.17) s (12.12) vychází

$$R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e_0(n\mu_n + p\mu_p)^2} \quad (12.18)$$

V literatuře se často označuje  $b = \mu_n/\mu_p$  a pak lze rovnici (12.18) přepsat na tvar

$$R_H = \frac{p - b^2n}{e_0(nb + p)^2} \quad (12.19)$$

Pro vlastní polovodič je  $n = p = n_i$  a pak

$$R_i = \frac{1}{n_i e_0} \frac{b - 1}{b + 1} \quad (12.20)$$

Změna znaménka Hallovy konstanty nastane pro případ  $R_H = 0 \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ , tj., když platí  $p = b^2n$  (12.19a), a protože pohyblivost děr bývá většinou menší než pohyblivost elektronů, je  $b > 1$  a  $p > n$ . Dochází tedy ke změně znaménka Hallovy konstanty pro polovodič typu P při určité hustotě děr. Z této úvahy je zřejmé, že v případě polovodiče, u kterého nelze zanedbat hustotu minoritních částic s nábojem, se můžeme dopustit chyby v experimentálním zjišťování, zda jde o polovodič typu P nebo N pomocí znaménka Hallovy konstanty.

### 13.3.2. Hallův jev - silná magnetická pole

V případě, že Hallův úhel není malý, je situace podstatně komplikovanější, protože dráhy volných částic s nábojem se značně zakřivují a dochází k tomu, že na elektron působí síla, která svírá s osou  $y$  určitý úhel, který bude závislý na velikosti magnetické indukce. Uvažujeme opět polovodič typu N a zanedbáme hustotu minoritních částic s nábojem. Ke kvantitativním vztahům dojdeme řešením pohybové rovnice pro volné částice s nábojem v elektrickém a magnetickém poli, tj. vektorové rovnice

$$m_n^* \vec{a} = -e_0 \vec{E} - e_0 (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (12.21)$$

Tuto rovnici přepíšeme na skalární rovnice (s přihlédnutím k orientaci vektoru na obr. 12.3)

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\frac{e_0}{m_n^*} E_x - \omega v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{e_0}{m_n^*} E_y + \omega v_x \end{aligned} \quad (12.22)$$

kde  $\omega = \frac{e_0 B}{m_n^*}$ .



Řešením rovnic (12.22) dostaneme pro hustoty proudů  $j_x$  a  $j_y$  vztahy ( $v_x, v_y$  jsou driftové rychlosti ve směru  $x$  resp.  $y$ )

$$j_x = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left\{ \frac{\tau \mathcal{E}_x}{1 + \omega^2 \tau^2} - \frac{\omega \tau^2 \mathcal{E}_y}{1 + \omega^2 \tau^2} \right\} \quad (12.23)$$

$$j_y = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left\{ \frac{\tau \mathcal{E}_y}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\omega \tau^2 \mathcal{E}_x}{1 + \omega^2 \tau^2} \right\}. \quad (12.24)$$

Z podmínky pro rovnovážný stav, tj.  $j_y = 0 \text{ A.m}^{-2}$  vychází z rovnice (12.24)

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = -\omega\tau$$

a protože

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \text{tg } \Theta_n,$$

platí

$$\text{tg } \Theta_n = -\omega\tau = -\frac{e_0 B}{m_n^*} \tau = -B\mu_n$$

Je to stejný vztah jako (12.11a). Dosadíme-li ze vztahu (12.11a) do rovnice (12.23), dostáváme

$$j_x = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left\{ \frac{\mathcal{E}_x \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\omega \tau^2 \omega \tau \mathcal{E}_x}{1 + \omega^2 \tau^2} \right\} = ne_0 \mu_n \mathcal{E}_x = \gamma \mathcal{E}_x. \quad (12.25)$$

Došli jsme ke stejnému výsledku jako pro vztah (12.3). Tento výsledek lze také interpretovat tak, že v případě polovodiče s jedním typem volných částic s nábojem nedochází vlivem příčného magnetického pole ke změně měrného odporu materiálu.

Situace se stává složitější pro případ smíšeného polovodiče, tj. polovodiče s oběma druhy volných částic s nábojem. Výpočtem se dá zjistit, že pro velmi slabá magnetická pole je  $R_H$  kvadratickou funkcí magnetické indukce  $B$ .

#### 12.4. Rozptylové mechanismy

V kapitole 8 jsme se seznámili s poznatkem, že srážkové mechanismy jsou velmi důležité a mají za následek návrat ke stacionárnímu stavu. Aby např. byl elektrický proud při působení elektrického pole stacionární, je nutné, aby docházelo ke srážkám (rozptylu) vodivostních elektronů s nějakými nehomogenitami mřížky nebo poruchami ve struktuře krystalu. Elektrony při těchto srážkách odevzdávají energii získanou v elektrickém poli. Důležitou vlastností nerovnovážných pochodů je to, že podstatně závisejí na mechanismu vzájemného působení, tj. v případě elektrického pole na interakci volného elektronu s kmity mřížky nebo poruchami struktury krystalu. Podle toho, o jaké nehomogenity mřížky se jedná, mluvíme o rozptylu elektronu na ionizovaných příměsích, na dislokacích a při interakci s kmity mřížky o rozptylu na kmitech mřížky nebo fononech.

Rozptyly, o kterých byla řeč, jsou charakterizovány relaxační dobou  $\tau$ , která byla zavedena v kapitole 8.

V našich předcházejících úvahách a to jak v této kapitole nebo v kapito-

le 8 jsme dosud předpokládali, že  $\tau = \text{konst.}$ , tj., že nezávisí na energii částic a na teplotě.

Podrobnějším studiem rozptylových mechanismů lze zjistit, že relaxační doba  $\tau$  na teplotě závisí. Pro většinu polovodičů je tato závislost mocninná, tj.  $\tau = a E^{-s}$ , kde  $a$  je konstanta (závislá na teplotě) a exponent  $s$  má různé hodnoty pro různé druhy rozptylu. Pro rozptyl na kmitech mřížky platí  $s = 1/2$  a pro rozptyl na ionizovaných příměsích  $s = -3/2$ . Odvození je uvedeno např. v [1] a [2]. Mřížkový rozptyl je důležitý pro rychlé elektrony a uplatňuje se při vyšších teplotách. Rozptyl na ionizovaných příměsích se uplatňuje při nízkých teplotách, kdy pomalé elektrony setrvávají dlouho v elektrickém poli ionizovaných příměsí a vychylují se proto více než rychlé elektrony.

Pokud se uplatňuje více druhů rozptylu, platí pro celkovou relaxační dobu vztah

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_{\text{disl}}}, \quad (12.26)$$

kde  $\tau_{\text{disl}}$  platí pro rozptyl na dislokacích,  $\tau_L$  na kmitech mřížky a  $\tau_I$  na ionizovaných příměsích. Rozptyl na dislokacích však nastává pouze pro velkou hustotu dislokací (nad  $10^8 \text{ cm}^{-2}$ ).

V případě, že uvažujeme závislost  $\tau$  na energii, dojde ke změně ve vztazích odvozovaných v článcích 12.1 a 12.3. Místo doby  $\tau$  je potřeba uvést ve vztazích střední hodnotu  $\langle \tau \rangle$ . Platí tedy pozměněné vztahy

$$\gamma = \frac{ne_0^2 \langle \tau \rangle}{m_n^*} \quad (12.1a), \quad \mu = \frac{e_0 \langle \tau \rangle}{m_n^*}. \quad (12.2b)$$

Rovnice (12.23) a (12.24) je nutné přepsat do tvaru (pro slabá pole, tj.  $\omega \langle \tau \rangle \ll 1$ )

$$j_x = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left\{ \langle \tau \rangle \mathcal{E}_x - \omega \langle \tau^2 \rangle \mathcal{E}_y \right\} \quad (12.27)$$

$$j_y = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left\{ \langle \tau \rangle \mathcal{E}_y + \omega \langle \tau^2 \rangle \mathcal{E}_x \right\} \quad (12.28)$$

Z rovnice (12.28) vychází pro  $j_y = 0 \text{ A.m}^{-2}$

$$\text{tg } \Theta = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = -\frac{e_0}{m_n^*} B \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle}. \quad (12.29)$$

a tedy po úpravě

$$\mathcal{E}_y = -\frac{e_0}{m_n^*} B \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \mathcal{E}_x = -\frac{e_0}{m_n^*} B \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \frac{j_x m_n^*}{ne_0^2 \langle \tau \rangle} = -\frac{1}{ne_0} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} B j_x$$

$$R_H = -\frac{1}{ne_0} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} = -\frac{1}{ne_0} r_H, \quad (12.30)$$

kde  $r_H$  se nazývá rozptylový činitel. Často se pro něj používá vztah

$$r_H = \frac{\mu_H}{\mu_n}, \quad (12.31)$$

kde  $\mu_H$  je Hallova pohyblivost. Dále platí (pro díry)

$$R_H = \frac{r_H}{pe_0} \quad (12.32)$$

Střední hodnotu počítáme podle [1] po dosazení za  $\tau = a E^{-s}$  (12.33) ze vztahu

$$\langle \tau \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau(E) E^{3/2} f_0 dE}{\int_0^\infty E^{3/2} f_0 dE}, \quad (12.34)$$

kde  $f_0$  je rovnovážná rozdělovací funkce. Protože uvažujeme nedegenerovaný polovodič, je  $f_0 = \exp(-E/k_B T)$ . Proto po dosazení z (12.33) máme

$$\langle \tau \rangle = a \int_0^\infty E^{3/2 - s} \exp(-\frac{E}{k_B T}) dE / \int_0^\infty E^{3/2} \exp(-\frac{E}{k_B T}) dE. \quad (12.35)$$

Pro výpočet integrálů tohoto tvaru se většinou využívá vlastností gamma funkce. Je zavedena následujícím vztahem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt. \quad (12.36)$$

Platí pro ní

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \Gamma(x+1) = x! \text{ pro } x \in \mathbb{Z}, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}.$$

Zavedeme-li substituci vztahem

$$t = \frac{E}{k_B T}$$

pak lze vztah (12.35) přepsat na tvar

$$\langle \tau \rangle = a (k_B T)^{-s} \Gamma(\frac{5}{2} - s) / \Gamma(\frac{5}{2}). \quad (12.37)$$

Pro rozptyl na akustických kmitech mřížky je  $s = +\frac{1}{2}$ . Výpočtem lze zjistit, že

$$r_H \doteq 1,18.$$

Pro rozptyl na ionizovaných příměsích platí  $s = -\frac{3}{2}$  a tedy

$$r_H \doteq 1,93.$$

Je vidět, že  $r_H$  nabývá hodnot v intervalu menším než od jedné do dvou. Rozptyl tedy nezpůsobuje řádovou změnu Hallovy konstanty pro jeden druh částic s nábojem.

## 12.5. Magnetorezistance

V tomto článku se jen velmi stručně zmíníme o změně odporu vzorku, jestliže je vložen do magnetického pole. Tomuto jevu se říká magnetorezistance. Budeme uvažovat magneticky neuspořádané polovodiče. Orientace magnetické indukce magnetického pole a intenzity elektrického pole nechť je podle obr. 12.3. Při tomto uspořádání mluvíme o příčném magnetickém poli a jev nazýváme příčnou magnetorezistance.

Příčné magnetické pole působí na volné elektrony i díry ve vzorku a jejich dráhu zakřivuje, jak již bylo řečeno při studiu Hallova jevu. Tím se mění podmínky rozptylu a dochází i ke změně odporu vzorku. V článku 12.3.1 bylo zjištěno, že efekt magnetorezistance pro polovodič jen s jedním typem částic s nábojem ve slabých magnetických polích pro  $\tau = \text{konst.}$  neexistuje, tj. nedochází vlivem magnetického pole ke změně odporu vzorku. Nyní si ukážeme, jak se mění elektrický odpor pro tento případ, je-li  $\tau$  na energii zá-

vislé. Z rovnice (12.23) a (12.24) dostáváme po úpravě ( $\omega\tau \ll 1$  a předpokládáme typ N)

$$j_x = \frac{ne_0^2}{m_n^*} (\langle \tau \rangle \xi_x - \omega \langle \tau^2 \rangle \xi_y) \quad (12.38)$$

$$j_y = \frac{ne_0^2}{m_n^*} (\langle \tau \rangle \xi_y + \omega \langle \tau^2 \rangle \xi_x).$$

Opět položíme  $j_y = 0 \text{ A.m}^{-2}$ , pak

$$\frac{\xi_y}{\xi_x} = -\frac{\omega \langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle}$$

a dosazením do první rovnice (12.38) dostáváme

$$j_x = \frac{ne_0^2}{m_n^*} \left[ \langle \tau \rangle + \frac{\omega^2 \langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle} \right] \xi_x. \quad (12.39)$$

Výpočtem se dá zjistit, že

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \omega^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} = \frac{e_0^2 B^2}{m_n^* 2} \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} = \xi B^2 r_0^2 R_{H_0}^2, \quad (12.40)$$

kde  $R_{H_0}$  je Hallova konstanta pro  $\tau = \text{konst.}$  a  $\xi$  je magnetorezistanční koeficient. Platí

$$\xi = \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^4}.$$

Pro rozptyl na akustických kmitech mřížky tedy platí  $\xi = 1,39$  a pro rozptyl na ionizovaných příměsích je  $\xi = 3,72$ .

## 12.6. Termoelektrické jevy

### 12.6.1. Seebeckův jev

V roce 1821 objevil německý fyzik T.J. Seebeck jev, který spočíval v následujícím: Vytvoříme-li elektrický obvod složený ze dvou (nebo i více) různých kovů, spojený konec zahříváme ( $T_1$ ) a volné konce kovů ochlazujeme ( $T_2$ ), ( $T_1 > T_2$ ), pak mezi volnými konci vzniká elektromotorické napětí o velikosti

$$U_{1,2} = \varphi_2 - \varphi_1 = \alpha_{AB} (T_1 - T_2), \quad (12.41)$$

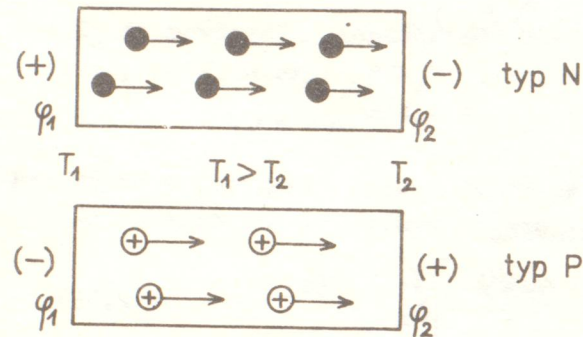
kde  $\alpha_{AB}$  je termoelektrický součinitel. Termoelektrický součinitel je závislý na zvolených materiálech A a B (proto označení  $\alpha_{AB}$ ) a jeho velikost je řádově  $10^{-4} \text{ V.K}^{-1}$  až  $10^{-5} \text{ V.K}^{-1}$ . Využívá se převážně v termočláncích. Vztah (12.41) lze přepsat na tvar, ve kterém se vyskytuje gradient teploty. Platí

$$\frac{dU}{dx} = \alpha_{AB} \frac{dT}{dx}. \quad (12.42)$$

Z podrobnější teorie vyplývá, že lze určit i tzv. absolutní termoelektrický součinitel ( $\alpha_A$  - někdy jen  $\alpha$ ) pro daný materiál A.

Seebeckův jev byl pozorován také u polovodičů. Pro většinu polovodičů je  $\alpha$  funkcí teploty a silně závisí na chemickém složení a hustotě příměsí. Mechanismus vzniku termoelektrického napětí si v polovodiči vysvětlujeme takto: Z počátku budeme uvažovat pouze jeden polovodič (drát). Jestliže jeden konec

polovodiče zahříváme a druhý ochlazujeme, pak elektrony i díry budou difundovat polovodičem z teplejší oblasti, kde mají větší kinetickou energii do míst chladnějších, kde mají menší kinetickou energii. Současně však je také pravděpodobný i opačný přechod, tj. od chladnějšího konce k teplejšímu.



Obr. 12.5. Zahřívání a pohyb elektronů a děr v polovodiči typu N a P

Z počátku je počet volných částic s nábojem přecházejících z teplejšího konce na chladnější větší než v opačném směru. Přebytek elektronů na jednom konci polovodiče vede k jejich nedostatku na druhém konci. Tím se jeden konec nabíjí záporně a druhý kladně a vzniká tedy elektromotorické napětí. Vzrůstající elektrické pole zpomaluje difúzi částic s nábojem od teplého konce k chladnému, až se po určité době ustaví rovnováha a toky částic v obou směrech budou stejné.

U polovodiče typu P se tedy teplý konec nabíjí záporně a chladný konec kladně. U polovodiče typu N se teplý konec nabíjí kladně a chladný konec záporně (viz obr. 12.5). Jak vyplývá z (12.41) a podle obr. 12.5 je termoelektrický součinitel  $\alpha$  pro polovodič typu N záporný a pro polovodič typu P kladný. V případě smíšeného polovodiče jsou znaménko i velikost  $\alpha$  určeny hlavně pohyblivostí a hustotou volných částic s nábojem. Hodnota  $\alpha$  je menší než u polovodiče s jedním typem vodivosti. Je to zřejmé, protože v daném polovodiči se elektrony i díry pohybují stejným směrem, takže prostorový náboj na koncích polovodiče je menší než v případě polovodiče s jedním typem vodivosti. V případě, že  $n = p$  a  $\alpha_n = \alpha_p$ , je náboj děr kompenzován nábojem elektronů a nevytváří se žádné vnitřní pole a tedy ani elektromotorické napětí. Protože  $\alpha_p > 0$  a  $\alpha_n < 0$  lze ze znaménka změřené hodnoty  $\alpha$  určit, zda

Polovodič	$\frac{\alpha}{V \cdot K^{-1}}$	Polovodič	$\frac{\alpha}{V \cdot K^{-1}}$
Tl <sub>2</sub> S	- 780	CdO	+ 30
CuO	- 700	Bi <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	+ 80
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	- 430	Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	+ 170
SiC (zelený)	- 300	Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	+ 385
Bi-Te-Se	- 170	SiC (černý)	+ 800
PbS	- 160	Se	+ 1000
SnO	- 140	Cu <sub>2</sub> O	+ 1200

Tab. 12.2. Hodnoty  $\alpha$  pro různé polovodiče

Pro různé polovodiče se termoelektrický součinitel vypočte (stejně jako u kovů) jako rozdíl absolutních termoelektrických součinitelů obou polovodičů uvedených v tabulce.

K odvození kvantitativních vztahů vyjdeme z Boltzmannovy transportní rovnice. Existuje-li teplotní gradient, bude rozdělovací funkce závislá též na polohovém vektoru  $\vec{r}$ . Snadnou matematickou úpravou zjistíme platnost vztahu

$$\text{grad}_{\vec{r}} F = \frac{\partial F}{\partial E} \text{grad}_{\vec{r}} E,$$

kde  $F$  je rozdělovací Fermiova-Diracova funkce pozměněná vlivem gradientu teploty,  $\vec{k}$  je vlnový vektor. Pak lze psát transportní rovnici (8.15b) ve tvaru ( $F_0$  je rozdělovací funkce v termodynamické rovnováze,  $\vec{F}$  je síla)

$$\frac{1}{\hbar} \frac{dF}{dE} (\vec{F} \text{grad}_{\vec{r}} E) + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} F = - \frac{F - F_0}{\tau}. \quad (12.43)$$

Po úpravě a pro jednorozměrný případ s elektrickým polem o intenzitě ve směru osy  $x$  a teplotním gradientem  $dT/dx$  dostáváme

$$F = F_0 + \tau e_0 \xi_x v_x \frac{\partial F_0}{\partial E} - \tau v_x \frac{\partial F_0}{\partial x}. \quad (12.44)$$

Uvedený vztah platí pro případ malých změn, kdy můžeme psát  $\text{grad}_{\vec{r}} F_0$  místo  $\text{grad}_{\vec{r}} F$  a totéž pro  $\partial F / \partial E$ . Dále platí

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = \frac{\partial F_0}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dx} \quad (12.45)$$

a

$$\frac{\partial F_0}{\partial T} = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{E - E_F}{T} \right) \frac{\partial F_0}{\partial E}. \quad (12.46)$$

Odvození rovnice (12.46) je ve cvičení 12.1.

Dosazením (12.46) do (12.45) a do (12.44) dostáváme

$$F = F_0 + \tau v_x \frac{\partial F_0}{\partial E} \left[ e_0 \xi_x + T \frac{d}{dT} \left( \frac{E - E_F}{T} \right) \frac{dT}{dx} + \frac{E}{T} \frac{dT}{dx} \right]. \quad (12.47)$$

Řešením této rovnice [3] dojdeme ke vztahu pro hustotu proudu

$$j_x = \frac{ne_0}{m_n^*} \left[ e_0 \xi_x + T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E - E_F}{T} \right) \right] \langle \tau \rangle + \frac{ne_0}{T m_n^*} \frac{dT}{dx} \langle \tau E \rangle. \quad (12.48)$$

Protože v rovnovážném stavu je  $j_x = 0 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ , dostáváme z rovnice (12.48) po úpravách vztah pro termoelektrický součinitel  $\alpha_n$  pro nedegenerovaný polovodič typu N [3]. Platí

$$\alpha_n = - \left[ \left( \frac{5}{2} - s \right) + \frac{E_C - E_F}{k_B T} \right] \frac{k_B}{e_0}, \quad (12.49)$$

( $s$  - viz vztah (12.33)), což lze pro nedegenerovaný polovodič psát ve tvaru

$$\alpha_n = - \frac{k_B}{e_0} \left[ \left( \frac{5}{2} - s \right) + \ln \frac{N_C}{n} \right]. \quad (12.50)$$

Pro polovodič typu P vychází

$$\alpha_p = \frac{k_B}{e_0} \left[ \left( \frac{5}{2} - s \right) + \ln \frac{N_V}{p} \right]. \quad (12.51)$$

Dalším termoelektrickým jevem je jev Thomsonův. Byl objeven v roce 1856.

Vytvoříme-li ve sledovaném obrazci teplotní gradient a tímto vzorkem prochází proud určitého směru, pak se ve vzorku kromě Jouleova tepla bude uvolňovat ještě další teplo (Thomsonovo). Při změně směru proudu se bude ve vzorku pohlcovat stejné teplo jako v předcházejícím případě. Pro teplo  $Q_T$  uvolněné v jednotkovém objemu za jednotku času platí vztah

$$Q_T = \tau_T j \frac{dT}{dx}, \quad (12.52)$$

kde  $\tau_T$  je Thomsonův součinitel,  $j$  je hustota proudu. Mezi součiniteli  $\tau_T$  a  $\alpha_{AB}$  platí 1. Thomsonův vztah

$$\tau_T = T \frac{\partial \alpha_{AB}}{\partial T} \quad (12.53)$$

### 12.6.2. Peltierův jev

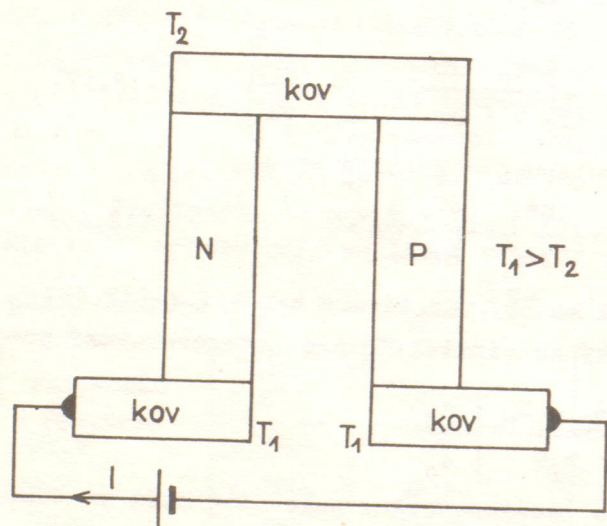
K Seebeckovu jevu popsanému vztahem (12.42) existuje opačný jev Peltierův, tj. vytvoření tepelného proudu  $dQ/dt$  následkem elektrického proudu. Platí

$$\frac{dQ}{dt} = \pi_{AB} I, \quad (12.54)$$

kde  $\pi_{AB}$  je Peltierův součinitel. Mezi  $\alpha_{AB}$  a  $\pi_{AB}$  platí 2. Thomsonův vztah

$$\pi_{AB} = \alpha_{AB} T. \quad (12.55)$$

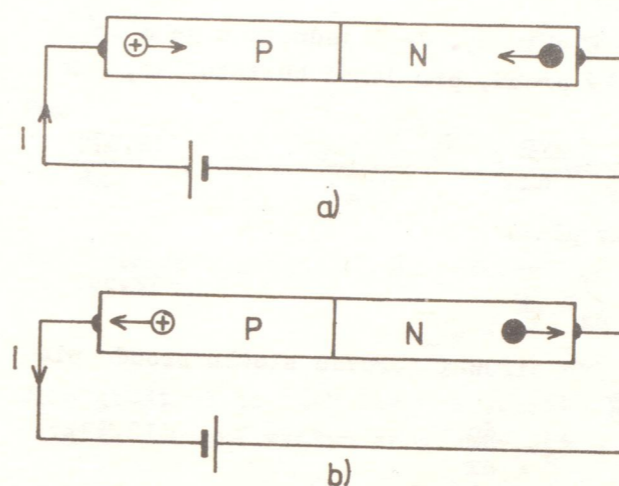
Protože mezi  $\pi$  a  $\alpha$  platí vztah (12.55) a protože u polovodičů je  $\alpha$  značně větší než u kovů, ukazuje se, že praktické užití tohoto jevu bude pro polovodičivé materiály. Efektivní termoelektrický článek bude sestaven tak, že jedna větev bude tvořena polovodičem typu N a druhá polovodičem typu P (viz obr.12.6).



Obr. 12.6. Schematické uspořádání Peltierova článku

diče typu P (nalevo) a tyče z polovodiče typu N (napravo). Je-li přiloženo napětí tak, že polovodič typu P je připojen ke kladnému pólu zdroje a polovodič typu N k zápornému (viz obr. 12.7a), pohybují se díry v polovodiči typu P a elektrony v polovodiči typu N proti sobě. V místě spojení obou kontaktů ně-

které rekombinují. V pásovém schématu si to můžeme představovat tak, že



Obr. 12.7a. Zjednodušené schéma Peltierova článku

- a) Polovodič typu P připojený na kladný pól zdroje a typu N na záporný pól zdroje  
b) Polovodič typu P připojený na záporný pól zdroje a typu N na kladný pól zdroje

elektron, který se nacházel ve vodivostním pásu polovodiče typu N, zaplnil volné místo (díru) ve valenčním pásu polovodiče typu P a uvolnila se energie, která se přeměnila v teplo. Spoj se tedy ohřívá. K tomuto procesu bylo nutno dodat energii na uvolnění elektronu (tj. jeho přechod z příměsové hladiny do vodivostního pásu), na uvolnění díry z příměsové hladiny do valenčního pásu a na kinetickou energii elektronu i díry. Celá tato energie se při rekombinaci přemění v teplo.

Je-li připojen zdroj s opačnou polaritou (viz obr.12.7b), pohybuje se díra i elektron na opačné strany. To znamená,

že elektrony, které se nacházejí v zaplněném valenčním pásu v polovodiči typu P přecházejí tunelovým jevem do vodivostního pásu polovodiče typu N a v polovodiči typu P vzniká díra. Vlivem vnějšího elektrického pole tedy vzniká pár elektron - díra. Na jejich vytvoření je potřeba energie, která se odebírá na úkor vnitřní energie v místě spoje a spoj se tedy ochlazuje.

Peltierův jev nachází značné uplatnění v technice. Byly již vyrobeny první laboratorní vzorky chladících zařízení a zkoušky na nich potvrdily teoretické předpovědi. Výsledky také prokázaly, že tento způsob je výhodnější než způsoby dosud běžně používané.

### 12.7. Difúze elektronů a děr

#### 12.7.1. Nehomogenní polovodiče

Až dosud jsme se v této i předposlední kapitole až na řídké výjimky zabývali jen homogenními polovodiči. Nyní budeme zjišťovat, k jakým změnám dojde, budeme-li uvažovat polovodič nehomogenní. V tomto polovodiči bude hustota volných elektronů a děr funkcí polohy. V rovnovážném stavu bude Fermiova energie konstantní v celém vzorku (viz kapitola 6, článek 6.5).

Mění-li se hustota částic s polohou, vzniká gradient hustoty a v důsledku tohoto gradientu dochází k difúzi částic z míst vyšší hustoty do míst nižší hustoty těchto částic. Difúzní tok jde tedy proti směru gradientu hustoty. Hustotu elektronů, které projdou za jednotku času plochou o jednotkovém obsahu ve směru osy  $x$ , označíme  $n_x^d$ . Je zřejmé, že čím větší bude gradient hustoty, tím větší bude hustota difundujících částic a tedy platí

$$n_x^d = - D_n \frac{dn}{dx}, \quad (12.56)$$

kde  $D_n$  se nazývá difuzní konstanta pro elektrony. Její jednotkou je  $m^2 \cdot s^{-1}$ . Difuzní tok elektronů vytváří elektrický proud, pro jehož hustotu lze, jak je zřejmé, psát

$$j_{nx}^d = (-e_0)n_x^d = D_n \frac{dn}{dx} e_0. \quad (12.57)$$

Podobně pro difuzní tok děr. Analogicky platí

$$p_x^d = - D_p \frac{dp}{dx}, \quad (12.58)$$

kde  $D_p$  je difuzní konstanta pro díry. Pro difuzní děrovou složku proudu platí

$$j_{px}^d = - e_0 p_x^d = - e_0 D_p \frac{dp}{dx}. \quad (12.59)$$

Obecně je možné psát pro elektrony pro trojrozměrný případ

$$\vec{j}_n^d = e_0 D_n \text{grad } n \quad (12.60)$$

a pro díry

$$\vec{j}_p^d = - e_0 D_p \text{grad } p. \quad (12.61)$$

Rovnice (12.60) a (12.61) vyjadřuje 1. Fickův zákon. Proudů tvořené difuzí nazýváme difuzní proudy nebo difuzní složky proudu.

Je-li k polovodiči připojeno i elektrické pole o intenzitě  $\vec{\mathcal{E}}$ , vytvoří se kromě difuzního proudu ještě proud vytvořený pohybujícími se nabitými částicemi vlivem elektrického pole. Mluvíme o polním proudu nebo o polní složce proudu. Pro celkovou hustotu proudu v tomto případě platí (pro elektrony)

$$\vec{j}_n = e_0 n \mu_n \vec{\mathcal{E}} + e_0 D_n \text{grad } n \quad (12.62)$$

a pro díry

$$\vec{j}_p = e_0 p \mu_p \vec{\mathcal{E}} - e_0 D_p \text{grad } p. \quad (12.63)$$

Pro celkovou hustotu proudu je tedy

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p = (e_0 \mu_n n + e_0 \mu_p p) \vec{\mathcal{E}} + e_0 (D_n \text{grad } n - D_p \text{grad } p). \quad (12.64)$$

### 12.7.2. Einsteinův vztah

Máme-li nehomogenní polovodič, který není připojen na vnější elektrické pole, je hustota proudu  $j = 0 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ . Pak z rovnice (12.64) vyplývá, že se vlivem difuze vytváří vnitřní elektrické pole. Toto elektrické pole se nazývá difuzní pole. Pro intenzitu  $\vec{\mathcal{E}}_D$  difuzního elektrického pole, vytvořeného např. pohybem elektronů, platí ze vztahu (12.64) pro jednorozměrný případ ve směru osy  $x$  následující vztah

$$e_0 n \mu_n \mathcal{E}_x = - e_0 D_n \frac{dn}{dx}. \quad (12.65)$$

Hustotu elektronů můžeme psát podle (11.47) pro nedegenerovaný polovodič

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right).$$

Pak

$$\frac{dn}{dx} = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right) \frac{d(E_F - E_C)}{dx} \frac{1}{k_B T} = \frac{n}{k_B T} \frac{d(E_F - E_C)}{dx}. \quad (12.66)$$

Dále zavedeme potenciál  $U_F$  vztahem

$$U_F = \frac{E_F - E_C}{e_0}.$$

Jeho gradient je však roven intenzitě  $\vec{\mathcal{E}}_x$  vytvořeného vnitřního elektrického pole se záporně vzatým znaménkem, tj.

$$\frac{dU_F}{dx} = - \mathcal{E}_x. \quad (12.67)$$

Dosadíme-li (12.67) do (12.66) dostáváme

$$\frac{dn}{dx} = - \frac{ne_0}{k_B T} \mathcal{E}_x$$

a po dosazení do vztahu (12.65) máme

$$e_0 n \mu_n \mathcal{E}_x = e_0 D_n \frac{ne_0}{k_B T} \mathcal{E}_x.$$

Po úpravě je

$$D_n = \mu_n \frac{k_B T}{e_0}. \quad (12.68)$$

Analogický vztah platí pro difuzní konstantu pro díry. Je

$$D_p = \mu_p \frac{k_B T}{e_0}. \quad (12.69)$$

Vztah (12.68) event. (12.69) se označuje jako Einsteinův vztah.

### 12.7.3. Nerovnovážné stavy a návrat k termodynamické rovnováze

Při všech dějích, kdy vzniká nerovnovážná hustota částic s nábojem se uplatňují dva mechanismy. Je to generace a rekombinace. Mechanismus generace spočívá v tom, že vlivem vnějšího působení dojde k vytvoření (generaci) dalších volných částic s nábojem. Generace je charakterizována veličinou  $g$ , která představuje hustotu nově vzniklých částic za jednotku času. Mechanismus rekombinace (v našem případě konkrétně elektronu a díry) představuje zánik páru elektron-díra. Počet částic, které zrekombinují v jednotce objemu za jednotku času je úměrný jak hustotě elektronů tak i děr, protože k rekombinaci jsou potřebné vždy obě částice. Pro počet rekombinačních procesů v objemové jednotce za jednotku času platí tedy

$$R = rnp, \quad (12.70)$$

kde  $r$  je koeficient rekombinace.

Rovnovážnou hustotu elektronů a děr si označíme  $n_0, p_0$ . Odchytky od rovnovážné hustoty lze dosáhnout vnějším působením, např. generací světlem. Tím

se zvýší hustota elektronů o  $\Delta n$  a děr o  $\Delta p$ , ale stále se zachovává elektrická neutralita, tj. platí  $\Delta n = \Delta p$ . V pásovém modelu to představuje přechod děr z valenčního pásu do vodivostního pásu a vytvoření stejné nadbytečné hustoty elektronů i děr. Při konstantním osvětlení se vytvoří po určité době stacionární stav charakterizovaný hustotou volných elektronů  $n$  a děr  $p$ . Tento stacionární stav však neodpovídá termodynamické rovnováze, protože při  $T = \text{konst.}$  odpovídá termodynamické rovnováze hustota  $n_0, p_0$ . Platí

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \Delta n \\ p &= p_0 + \Delta p \end{aligned} \quad (12.71)$$

Přestane-li působit nadbytečná generace (např. vypneme-li zdroj osvětlení), vrací se polovodič do termodynamické rovnováhy. Celková změna hustoty částic bude dána rozdílem mezi hustotou částic, které zrekombinují a které generují. Při návratu k termodynamické rovnováze je větší rekombinace než generace. O rychlosti návratu do stavu termodynamické rovnováhy rozhoduje, jak je zřejmé, hustota minoritních částic s nábojem, protože k rekombinaci jsou potřebné obě částice. Uvažujeme-li např. polovodič typu P, jsou minoritní částice elektrony. Platí tedy

$$-\frac{d\Delta n}{dt} = R - g = rnp - g. \quad (12.72)$$

V termodynamické rovnováze je  $R = g$ , tj. platí

$$g = rn_0p_0 \quad (12.73)$$

(za předpokladu, že počet generací  $g$  a koeficient  $r$  nezávisí na  $n$  a  $p$  a to je pro případy  $n \gg \Delta n, p \gg \Delta p$  splněno). Pak

$$-\frac{d\Delta n}{dt} = r(np - n_0p_0) = r(np - n_1^2). \quad (12.74)$$

Dále dosazením z (12.71) do (12.74) vychází

$$\begin{aligned} -\frac{d\Delta n}{dt} &= r(n_0p_0 + n_0\Delta p + p_0\Delta n + \Delta p\Delta n - n_1^2) = \\ &= r(n_0\Delta p + p_0\Delta n + \Delta n\Delta p). \end{aligned} \quad (12.75)$$

Pro polovodič typu P platí  $p_0 \gg n_0, \Delta n = \Delta p$ . Protože současně má platit  $n \gg \Delta n, p \gg \Delta p$ , zanedbáme  $n_0\Delta p$  a  $\Delta n\Delta p$  vzhledem k  $p_0\Delta n$  a je

$$-\frac{d\Delta n}{dt} = rp_0\Delta n. \quad (12.75a)$$

Řešením této diferenciální rovnice vychází

$$\Delta n = \Delta n(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right), \quad (12.76)$$

kde  $\Delta n(0)$  je hustota nadbytečných částic s nábojem v čase  $t = 0$  s a

$$\tau_n = \frac{1}{p_0 r}. \quad (12.76a)$$

$\tau_n$  se nazývá doba života nerovnovážných minoritních částic s nábojem.

Ze vztahu (12.76) je zřejmé, že návrat do stavu termodynamické rovnováhy je podle exponenciálního zákona.

Analogický případ nastává pro polovodič typu N a pro dobu života nerovnovážných děr  $\tau_p$ , pro kterou platí

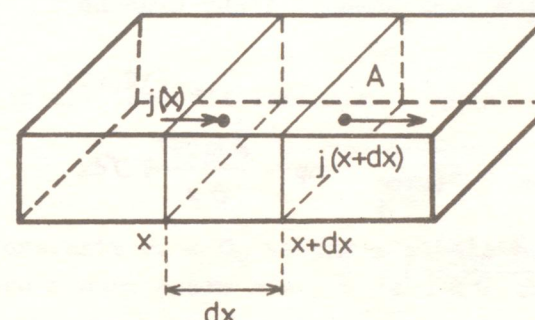
$$\tau_p = \frac{1}{n_0 r}. \quad (12.76b)$$

Doby života se mohou od sebe lišit o několik řádů. Závisí hlavně na čistotě materiálu, na hustotě minoritních částic s nábojem a na teplotě.

#### 12.7.4. Rovnice kontinuity

Případ vyšetřovaný v článku 12.7.3 si nyní zobecníme pro případ různých vlivů generace a rekombinace.

Zvolíme si oblast o objemu  $\mathcal{V}dx$  (viz obr. 12.8) a budeme sledovat změny v počtu částic v této oblasti. Změnu v počtu částic za jednotku času, kterou vypočteme jako rozdíl mezi hustotou toku částic, které vstupují malou



Obr. 12.8. Uspořádání ploch v bodech  $x$  a  $(x + dx)$  k výpočtu toku částic, který je způsoben různými mechanismy.

plochou o obsahu  $\mathcal{S}$  do místa daného souřadnicí  $x$  a těmi, které plochou o obsahu  $\mathcal{S}$  v místě  $(x + dx)$  vystupují, si označíme  $dn$ . Hustota toku částic je počet částic vztažených na objemovou jednotku, které projdou plochou o jednotkovém obsahu za jednotku času. Hustotu toku částic, které v místě  $x$  vstupují plochou o jednotkovém obsahu za 1 s do dané oblasti si označíme  $j_0(x)$  a hustotu toku částic, které plochou o jednotkovém obsahu za 1 s v místě  $(x + dx)$  vystupují

$j_0(x + dx)$ . Vlivy, které změnu  $dn$  způsobují si rozdělíme do čtyř skupin.

1. Generace světlem 2. Generace teplem 3. Rekombinace 4. V nehomogenních polovodičích se může mj. uplatňovat ještě vliv difúze i elektrického pole. Všechny tyto vlivy shrneme pod společný název - různý "přítok" a "odtok".

##### 1. Generace vzniklá absorpcí světla

Pro změnu počtu částic ve zvolené oblasti o objemu  $\mathcal{V}dx$  v důsledku generace volných částic s nábojem bude platit vztah

$$dn_1' = g_{sv} \mathcal{V} dx, \quad (12.77)$$

kde  $g_{sv}$  je rychlost generace a představuje počet částic vytvořených světlem za jednotku času v jednotkovém objemu.

##### 2. Generace vzniklá teplem

Platí podobný vztah jako (12.77)

$$dn_2' = g_{term} \mathcal{V} dx, \quad (12.78)$$

kde  $g_{term}$  je rychlost generace a představuje počet částic vytvořených teplem v jednotkovém objemu za jednotku času.

##### 3. Rekombinace

Při rekombinaci dojde ke zmenšení hustoty částic v dané oblasti. Vzhledem

ke vztahu (12.70) platí

$$dn_3' = -rnp \int dx, \quad (12.79)$$

kde  $r$  je koeficient rekombinace.

#### 4. Různý "přítok" a "odtok"

Změnu počtu částic, které projdou plochou o jednotkovém obsahu vypočteme tak, že změnu hustoty toku částic na jednotku délky vynásobíme šířkou zvolené oblasti, tj

$$\frac{dn_4'}{\mathcal{F}} = \frac{d[j_c(x) - j_c(x+dx)]}{dx} dx$$

$$\text{čili } dn_4' = \mathcal{F} dx \frac{d[j_c(x) - j_c(x+dx)]}{dx}. \quad (12.80)$$

Provedeme-li Taylorův rozvoj pro  $j_c(x+dx)$  a zanedbáme-li členy druhého a vyšších řádů, je

$$dn_4' = -\frac{\partial j_c(x)}{\partial x} \mathcal{F} dx. \quad (12.81)$$

Pro celkovou změnu počtu částic dostáváme

$$dn' = dn_1' + dn_2' + dn_3' + dn_4' = (g_{sv} + g_{term} - rnp - \frac{\partial j_c(x)}{\partial x}) \mathcal{F} dx$$

a pro celkovou změnu hustoty částic je

$$dn = (g_{sv} + g_{term} - rnp - \frac{\partial j_c(x)}{\partial x}).$$

Protože  $dn$  je změna hustoty částic za jednotku času, lze psát s použitím vztahu (12.73)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (g_{sv} - rnp - rn_0 p_0 - \frac{\partial j_c(x)}{\partial x}). \quad (12.82)$$

Pro trojrozměrný případ lze rovnicí kontinuity psát ve tvaru

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G - R - \text{div } j_c, \quad (12.83)$$

kde  $G$  zahrnuje všechny způsoby generace a  $R$  představuje celkovou rekombinaci. Protože elektronová složka hustoty proudu je  $j_n = -e_0 j_c$  a děrová  $j_p = +e_0 j_c$ , platí

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G - R + \frac{1}{e_0} \text{div } j_n \quad (12.84)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = G - R - \frac{1}{e_0} \text{div } j_p. \quad (12.85)$$

#### 12.7.5. Difuzní délka nerovnovážných minoritních částic s nábojem

Vyjdeme z případu, kdy vzorek polovodiče osvětlíme světlem, pro které platí  $h\nu > E_g$ . Jak bude ukázáno v článku 12.8 záření se silně absorbuje a proniká pouze do povrchové vrstvy polovodiče. Při absorpci mohou vznikat u povrchu další volné částice s nábojem. Difuzí se tyto částice budou dostávat do hloubky polovodiče, kde budou postupně rekombinovat. V dalších úvahách budeme uvažovat polovodič typu P a bude nás zajímat pronikání minoritních částic s nábojem do hloubky. K nalezení vztahu pro hustotu částic v závislosti na vzdálenosti  $x$  od povrchu (hloubce) vyjdeme z rovnice kontinuity, tj. vztahu (12.84). Rekombinaci si rozložíme na rekombinaci, která odpovídá stavu termodynamické rovnováhy (tj.  $R_0 = g$ ) a rekombinaci, která odpovídá nad-

bytečným částicím s nábojem. Platí (vzhledem k poznámce v článku 12.7.3)

$$R = rnp = rn_0 p_0 + rp_0 \Delta n = g + rp_0 \Delta n.$$

Vzhledem ke vztahu (12.76) lze vztah (12.84) psát pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e_0} \text{div } j_n = -\frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e_0} \frac{dj_c(x)}{dx}. \quad (12.86)$$

Pro stacionární stav platí

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

a vzhledem ke vztahu (12.59) je

$$\frac{\Delta n}{\tau_n} = D_n \frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{d^2 \Delta n}{dx^2} D_n. \quad (12.87)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici druhého řádu, která má obecné řešení

$$\Delta n = C_1 \exp \frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}} + C_2 \exp \frac{-x}{\sqrt{D_n \tau_n}}. \quad (12.88)$$

Konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek. Je zřejmé, že  $\Delta n = 0$  m<sup>-3</sup> pro  $x = \infty$  a pro  $x = 0$  m je  $\Delta n = \Delta n_0$ . Po dosazení dostáváme

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp \left( -\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}} \right). \quad (12.89)$$

Ze vztahu je vidět, že pokles  $\Delta n$  se vzdáleností je exponenciální. Vzdálenost od povrchu, kde nerovnovážná hustota klesne na  $e^{-1}$  část původní hodnoty se nazývá difuzní délka  $\mathcal{L}_n$  pro elektrony. Platí tedy

$$\mathcal{L}_n = \sqrt{D_n \tau_n}. \quad (12.90)$$

Působí-li elektrické pole o intenzitě  $\mathcal{E}$ , platí pro rychlost elektronů

$\bar{v}(x) = \mu_n \mathcal{E}$ . Za dobu  $\tau_n$  se elektrony dostanou do vzdálenosti

$$l_n = \bar{v}(x) \tau_n = \mu_n \mathcal{E} \tau_n.$$

Vzdálenosti  $l_n$  se říká difuzní vzdálenost.

Podobné vztahy budou platit pro polovodič typu N, kde jsou minoritní částice díry.

#### 12.8. Fotovodivost

##### 12.8.1. Vlastní fotovodivost

Při studiu elektrických vlastností polovodičů se ukázalo, že velká skupina polovodičů a dielektrik mění své elektrické vlastnosti vlivem osvětlení.

Jev zmenšení elektrického odporu (zvětšení vodivosti) působením osvětlení se nazývá vnitřní fotoefekt. Při tom vznikající dodatečná vodivost se nazývá fotovodivost.

Mechanismus vzniku fotovodivosti je následující: Představme si, že na povrch polovodiče bez příměsí dopadá monochromatické záření s energií foto-

nů  $h\nu$ . Dopad záření vyvolá tyto fyzikální děje: 1. Dochází k odrazu záření. Je to děj, který je z hlediska fotovodivosti zcela nežádoucí. 2. Dojde k pohlcení fotonů. Část pohlcené energie se předá mřížce a tím dojde ke zvýšení amplitudy výchylky kmitů atomů a tedy ke zvýšení teploty. Z hlediska fotovodivosti je to jev opět nežádoucí. 3. Část energie se předá valenčním elektronům. Je-li energie fotonů větší než šířka zakázaného pásu, tj.  $h\nu > E_g$ , dojde k uvolnění elektronů z vazby v atomu a elektron se stane volným a může se pohybovat v krystalu. V pásovém modelu to odpovídá uvolnění elektronu z valenčního pásu a jeho přechodu do vodivostního pásu. Tím však kromě volného elektronu vzniká i díra ve valenčním pásu. Podle zákonů kvantové mechaniky musí foton předat svoji energii celou. Stejně tak na uvolnění valenčního elektronu z vazby se může podílet pouze jeden foton.

Absorpce je sice základní předpoklad pro vznik fotoelektrického jevu, ale není to dostačující podmínka. Je známo mnoho polovodičů, které světlo silně pohlcují, ale nevznikají při tom volné elektrony.

Máme-li vlastní polovodič při nějaké teplotě  $T$ , je hustota rovnovážných elektronů a děr (tj. bez osvětlení vzorku - za tmy)  $n_0$  a  $p_0$ . Pro měrnou vodivost platí

$$\gamma_0 = \mu_n e_0 n_0 + \mu_p e_0 p_0.$$

Při osvětlení polovodiče dojde ke zvětšení hustoty částic o  $\Delta n$  a  $\Delta p$  a tím i zvětšení vodivosti. Platí

$$\gamma_1 = ne_0 \mu_n + pe_0 \mu_p + e_0 \Delta n \mu_n + e_0 \Delta p \mu_p. \quad (12.91a)$$

Po určité době od okamžiku osvětlení polovodiče dojde při nezměněné intenzitě světla k rovnováze mezi počtem vytvořených párů a párů, které zrekombinují. Pak pro stacionární hustotu elektronů platí vztah (viz (13.36))

$$\Delta n_{\text{stac}} = \eta KI \tau_n,$$

kde význam užitých symbolů je zřejmý z výkladu k článku 13.3.5. Pak lze vztah (12.91a) přepsat na tvar

$$\gamma_1 = ne_0 \mu_n + pe_0 \mu_p + e_0 \eta KI (\tau_n + \tau_p). \quad (12.91b)$$

Za předpokladu, že  $\tau_n \gg \tau_p$  platí

$$\gamma_1 = ne_0 \mu_n + pe_0 \mu_p + e_0 \Delta n \mu_n,$$

tj. ke zvětšení vodivosti přispívá pouze ten druh částic s nábojem, který má větší dobu života (bylo i experimentálně ověřeno). Doba života volných částic s nábojem se u většiny polovodičů pohybuje kolem  $10^{-3}$  s až  $10^{-7}$  s.

Jak již bylo řečeno výše, nevzniká vnitřní fotoefekt u všech polovodičů. Empiricky bylo stanoveno, že fotovodivost vzniká v těch polovodičích, u kterých je index lomu větší než dvě [4] (Guddenovo pravidlo). Verwey a De Boer [5] omezují platnost tohoto pravidla na takové organické krystaly, u nichž je elektronová slupka 3d kationtu plně obsazena elektrony, takže vzniká konfigurace vzácného plynu.

Protože pro většinu fotocitlivých polovodičů je  $E_g < 2$  eV, dochází k fotovodivosti při ozáření světlem červeným nebo infračerveným.

### 12.8.2 Příměsová fotovodivost

Ukazuje se, že i v příměsových polovodičích dochází k fotovodivosti. Studium tohoto jevu vede k poznatku, že přitom dochází ke dvěma mechanismům. První a základní z nich je charakterizován tím, že dochází vlivem fotonů k odtrhávání valenčních elektronů od atomů a jejich volnému pohybu krystalem. Druhý je způsoben uvolněními částicemi s nábojem od příměsí a jejich pohybem krystalem. Tento druhý případ odpovídá v pásovém modelu ionizaci donorových a akceptorových hladin a přechodu elektronů event. děr do vodivostního event. valenčního pásu. V prvním případě tedy vzniká efekt stejný jako při vlastní fotovodivosti a v druhém případě se jedná o příměsovou fotovodivost.

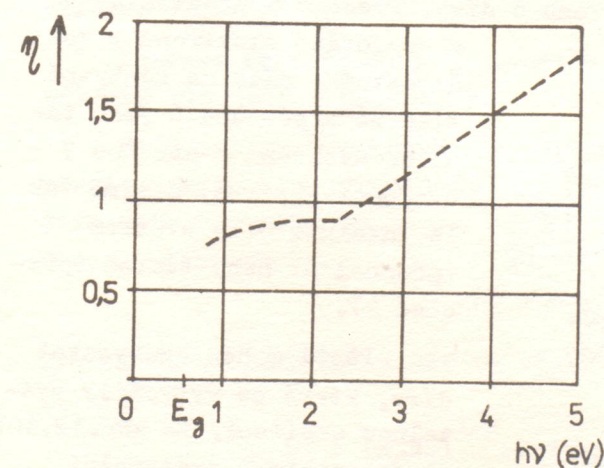
Experimentálně bylo zjištěno, že pokud  $h\nu > E_g$ , dochází k přechodu elektronu z valenčního pásu do vodivostního pásu. Pro  $h\nu < E_g$ , ale  $h\nu > E_D, E_A$  dojde ke vzniku příměsové fotovodivosti. Tento jev nebyl dosud spolehlivě objasněn.

Nerovnovážné částice s nábojem, které se vytvoří při příměsové fotovodivosti mohou mít značně odlišné doby života. Pak se uplatňuje při fotovodivosti jen ten druh částic s nábojem, který má větší dobu života. Doba života je větší u těch částic, které jsou majoritní. Pro měrnou vodivost pak platí (typ N)

$$\gamma_0 = n_0 e_0 \mu_n \quad (\text{za tmy})$$

$$\gamma_1 = n_0 e_0 \mu_n + \Delta n e_0 \mu_n. \quad (12.92)$$

K efektu zvýšení elektrické fotovodivosti nedochází jen při dopadu fotonů, ale i při dopadu jiných částic, které se pohlcují v krystalu. Jejich energie musí splňovat výše uvedené podmínky.



Obr. 12.9. Graf závislosti kvantového výtěžku na energii fotonu

ionizaci. Dojde proto ke zvětšení kvantového výtěžku a jeho lineárnímu růstu s energií fotonů.

Vypočítáme-li z naměřeného fotoelektrického proudu a absorbovaného světelného výkonu počet elektronů  $\eta$ , které připadají na jeden foton určité energie, získáme grafickou závislost  $\eta$  na energii fotonu  $h\nu$ . Na obr. 12.9 je znázorněna tato závislost pro germanium. Číslo  $\eta$  se nazývá kvantový výtěžek. Z grafu je vidět, že pro  $h\nu < E_g$  je výtěžek nulový, v okolí  $h\nu = E_g$  prudce vzroste na hodnotu 1 a zůstává konstantní, až u hodnoty 2,6 eV je kinetická energie fotoelektronů dostatečně velká k nárazové



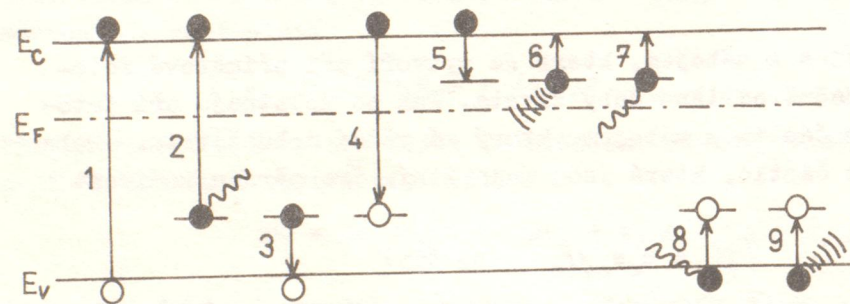
### 12.8.3. Vliv příměsí na fotoelektrickou vodivost

V tomto článku, i v kapitolách 13 a 14 budeme používat následující pojmy: Záchytné hladiny jsou vytvářeny poruchami krystalové mřížky, které mají schopnost zachytit a po určitou dobu vázat volné elektrony nebo díry, tj. omezují jejich pohyblivost.

Rekombinační hladiny jsou vytvářeny poruchami, na nichž dochází k rekombinaci elektronu a díry. Pravděpodobnost rekombinace elektronu zachyceného na těchto hladinách (centrech) je větší než pravděpodobnost jeho tepelné excitace zpět do vodivostního pásu.

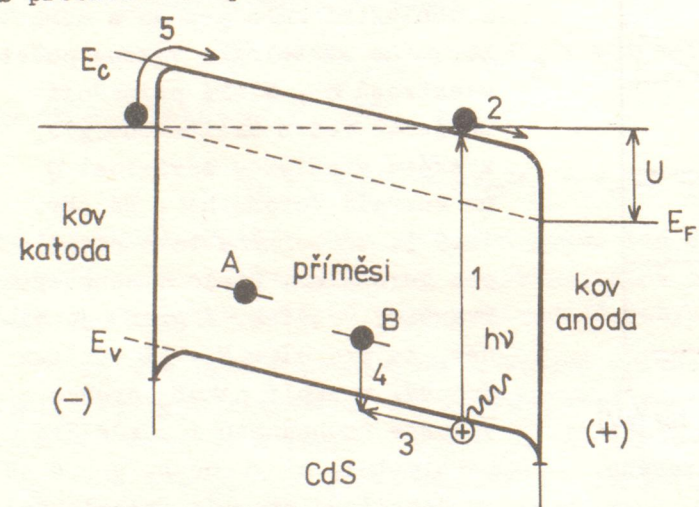
Pasti - jsou to takové poruchy, u nichž je větší pravděpodobnost zachycení částice jednoho druhu než částice druhého druhu. Pravděpodobnost zpětného uvolnění je větší než pravděpodobnost rekombinace. Z definic vyplývá, že pojem záchytné hladiny je obecnější a zahrnuje jak rekombinační hladiny, tak i pasti.

Na obr. 12.10 je znázorněno pásové schéma CdS s různými jevy generace a rekombinace. Při  $h\nu > E_g$  dochází k absorpci fotonu a uvolnění elektronu a díry (přechod 1).



Obr. 12.10a. Energiové schéma CdS s různými způsoby generace a rekombinace.

Může také dojít např. k uvolnění elektronu z příměsových hladin (přechod 2), zachycení díry na pasti (přechod 3) neboli zaplnění valenčního pásu elektronem z pasti, čili přechod díry na hladinu vytvořenou pastí. Přechod 4 znázorňuje zachycení elektronu z vodivostního pásu na záchytném centru, které současně s přechodem 3 způsobí rekombinaci elektronu a díry. Přechod 5 představuje zachycování elektronů z vodivostního pásu na záchytné hladině a přechod 6 jeho tepelné uvolnění a přechod 7 uvolnění světlem. Stejně tak lze uvolnit díry světlem (přechod 8) nebo teplem (přechod 9).



12.10b. Schematické znázornění energií částic v CdS připojeném na napětí

a díry (přechod 1). Může také dojít např. k uvolnění elektronu z příměsových hladin (přechod 2), zachycení díry na pasti (přechod 3) neboli zaplnění valenčního pásu elektronem z pas-

ti, čili přechod díry na hladinu vytvořenou pastí. Přechod 4 znázorňuje zachycení elektronu z vodivostního pásu na záchytném centru, které současně s přechodem 3 způsobí rekombinaci elektronu a díry. Přechod 5 představuje zachycování elektronů z vodivostního pásu na záchytné hladině a přechod 6 jeho tepelné uvolnění a přechod 7 uvolnění světlem. Stejně tak lze uvolnit díry světlem (přechod 8) nebo teplem (přechod 9).

Pasti mohou zachycovat díry, které se vytvořily světelnou excitací. Na obr. 12.10b je schematické znázornění energií částic fotocitlivého polovodiče připojeného k elektrickému napětí kovovými kontakty. Absorbí fotonu se vy-

tvoří pár elektron-díra (přechod 1). Elektron se ve vodivostním pásu pohybuje směrem ke kladnému pólu zdroje a díra směrem k zápornému pólu. Po určité době se díra zachytí na pasti 4. Elektron dojde až k anodě a opustí polovodič CdS. Vzhledem k zachování elektrické neutrality polovodiče přejde další elektron z katody do polovodiče a pohybuje se opět k anodě. Fotoelektrický proud bude procházet tak dlouho, až díra (4) zanikne rekombinací s elektronem. Tento popsaný mechanismus dovoluje dosáhnout u CdS až 30 000 krát větší fotoelektrický proud než odpovídá počtu absorbovaných fotonů. Tento jev v podstatě odpovídá zvětšení doby života.

Z výkladu je vidět, že pasti mohou mít podstatný vliv na zvětšení fotoproudu.

### 12.9. Některé metody určování charakteristických parametrů polovodičů

V tomto článku se zaměříme pouze na informativní sdělení, jakým způsobem lze experimentálně zjišťovat velikosti některých veličin charakterizujících polovodivé materiály. Vycházíme v podstatě ze standartního polovodiče a neuvažujeme složitou strukturu  $E = E(k)$ .

#### 12.9.1. Pásová struktura

Pro zjišťování pásové struktury, tj. znalosti průběhu  $E = E(k)$ , se v současné době využívají velice složité kvantověmechanické výpočty tvaru energiových pásů. Vypočtené průběhy pásů se porovnávají s experimentálními výsledky. Při nesouhlasu se provádějí korekce při výpočtech a další kontrola s výsledky experimentů. Výsledky ukazují, že je málo pravděpodobné, jak se dříve předpokládalo, že existují nedegenerované energiové pásy se sférickými izoenergiovými plochami poblíž bodu  $\vec{k} = \vec{0}$  v  $\vec{k}$ -prostoru.

Průběh energiových pásů je v hrubém přiblížení pro Ge a Si znázorněn na obr. 10.5.

#### 12.9.2. Určování $E_g$

Znalost hodnoty  $E_g$  u polovodiče je velmi důležitá, protože na ní závisí některé vlastnosti polovodiče.

Nejprostší a nejjednodušší metoda spočívá v změření teplotní závislosti měrné vodivosti  $\gamma$ . Tato závislost se dá vcelku jednoduše, bez nároků na složité experimentální zařízení, změřit. Ze vztahu 12.8 dostáváme po úpravě pro vlastní polovodič

$$\gamma_i = n_i e_0 (b + 1) \mu_p \quad (12.93)$$

Pro hustotu elektronů a děr ve vlastním polovodiči platí podle (11.40) a (11.42)

$$n_i = (N_C N_V)^{1/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right) = AT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right) \quad (12.94)$$

Pokud platí  $E_g \gg k_B T$ , pak exponenciální závislost hustoty elektronů na teplotě převládá nad mocninnou závislostí na teplotě ( $T^{3/2}$ ). Vyneseme-li do grafu závislost  $\ln n_i$  na  $1/T$ , dostáváme přímkou se směrnici  $(-E_g/2k_B)$ , odkud lze

již určit hodnotu  $E_g$ .

Tato metoda však naráží na dva problémy: 1. Jak u materiálu zjistit, že jde o vlastní vodivost 2. Měření  $n$  se provádí pomocí  $\gamma$  a podle vztahu např. (12.2) vyplývá, že je potřeba ještě znát teplotní závislost pohyblivosti.

Ne zcela zanedbatelná může být také závislost  $E_g$  na  $T$ . Lepší metoda spočívá ve změření teplotní závislosti Hallovy konstanty. Podle vztahu (12.20) dostáváme

$$|R_H| = \frac{r_H}{e_0 n_1} \frac{|b-1|}{b+1},$$

kde  $r_H$  je rozptylový činitel. Dosazením za  $n_1$  z (11.42) dostáváme

$$R_H = A_1 T^{-3/2} \exp \frac{E_g}{2k_B T},$$

kde  $A_1$  je konstanta. Změřením teplotní závislosti  $R_H$  (viz dále) a vnesením

do grafu  $\ln \frac{R_H}{T^{3/2}}$  v závislosti na  $\frac{1}{T}$  dostaneme, v případě nezávislosti  $E_g$

na teplotě, přímku se směrnici  $E_g/2k_B$ .

Ke zjištění, zda se jedná o vlastní vodivost, používáme např. měření na vzorcích stejného materiálu, ale s různými hodnotami  $N_d$ . Změřením teplotní závislosti  $R_H$  pro uvedené vzorky a vnesením do jednoho grafu zjistíme, že pro velké teploty se všechny křivky asymptoticky blíží k přímce, která odpovídá vlastní vodivosti. Z jejího sklonu lze určit  $E_g$ .

Dalšími metodami jsou optické metody. Nejdůležitější jsou dvě:

1. Určení dlouhové hranice fotovodivosti 2. Určení hrany absorpčního pásu. K získání hodnoty  $E_g$  z absorpčního spektra stačí nalézt takovou hodnotu  $h\nu$ , při které dochází k ostrému vzrůstu absorpční křivky. Přitom se ovšem dopouštíme nepřesnosti v určení mezní frekvence, protože k ostrému vzrůstu nedochází pro zcela jednoznačně danou hodnotu  $h\nu$ , ale přichází v úvahu určitý interval energií.

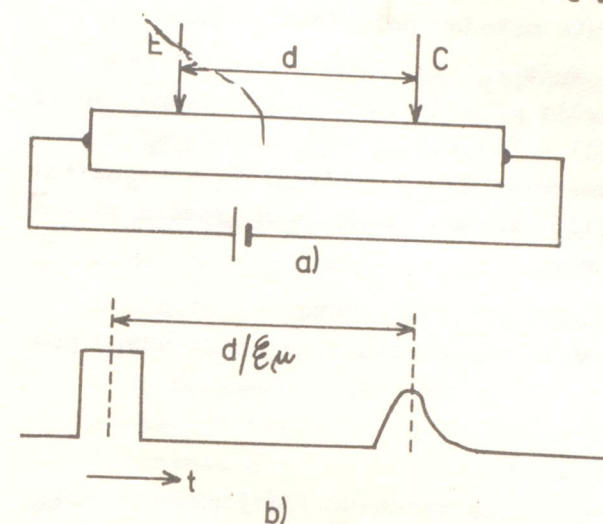
Stejně tak i při určení  $E_g$  z dlouhové (červené) hranice fotovodivosti se dopouštíme nepřesností. Slouží spíše k rychlému orientačnímu určení  $E_g$ .

Hodnoty  $E_g$  zjištěné optickými a termickými metodami se mohou od sebe lišit, jak je zřejmé z článku 10.5.

### 12.9.3. Určování pohyblivosti

Jeden ze způsobů měření pohyblivosti je znázorněn na obr. 12.11. Představme si vzorek polovodiče typu N. Kladným impulzem se do polovodiče zavedou minoritní částice s nábojem (tj. díry). Časový průběh hustoty děr je na dolním obrázku. Elektrické pole přiložené na vzorek způsobí, že se tato prostorově ohraničená změna hustoty bude pohybovat krystalem, až se dostane k další elektrodě - kolektoru. Změřením doby mezi vyslaným a přijatým impulzem a ze znalosti vzdálenosti mezi elektrodami a znalosti intenzity elektrického pole můžeme vypočítat  $\mu_p$  ze vztahu

$$\mu_p = \frac{d}{\mathcal{E}t}.$$



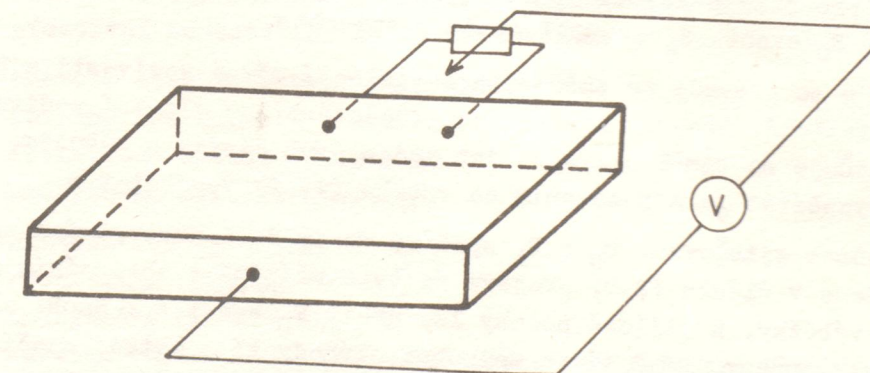
Obr. 12.11a. Schematické uspořádání k měření pohyblivosti

b) Časový průběh hustoty děr

U ostatních polovodičů se může měřit pohyblivost změřením Hallovy konstanty. Kombinací vztahů (12.31), (12.32) a (12.2) vychází

$$\mu_H = r_H \mu_n = \frac{r_H}{ne_0} e_0 n \mu_n = R_H \gamma_n,$$

a proto můžeme Hallovu pohyblivost určit změřením  $R_H$  a  $\gamma_n$ . Měření  $R_H$  není



Obr. 12.12. Uspořádání k měření Hallovy konstanty

obtížné a provádí se při uspořádání podle obr. 12.12. Potenciometr se volí proto, že je velmi obtížné vytvořit kontakty k měření  $\mathcal{E}_H$  přesně proti sobě tak, aby při  $B = 0$  T bylo  $\mathcal{E}_H = 0$  V.m<sup>-1</sup>. Proto je výhodnější toto pětibodové zapojení (dva proudové kontakty, tři napěťové). Nastavení potenciometrem se provede tak, aby při nezapojeném magnetickém poli bylo  $U_H = 0$  V s přesností určenou přesností použitých měřicích přístrojů. Při měření  $\gamma$  je nutné vyloučit vliv odporů kontaktů. Proto se používá tzv. čtyřbodové zapojení - dva kontakty na stěnách, kterými se přivádí do vzorku proud a dva napěťové na hor-

ní stěně vzorku k měření napětí. K odstranění vlivu kontaktů se napětí měří kompenzační metodou. Z údajů  $U$  a  $I$  lze ze známé geometrie vypočítat  $\gamma$ . Jak plyne z podrobného rozboru naměří se touto metodou poloviční hodnota  $U_H$ .

K výpočtu  $\mu$  je potřeba ještě také znát  $r_H$  (tj. druh převládajícího rozptylu). To znamená určit  $s$ . To lze určit měřením termoelektrického napětí v závislosti na teplotě. Z rovnic (12.50) a (11.44) je vidět, že grafem závislosti  $U_T$  na  $1/T$  je přímka, z jejíž směrnice lze  $s$  určit a tím i vypočítat  $\mu$ . Tato metoda určení  $s$  však není příliš přesná. Pokud se neprovádí měření  $s$ , uvažuje se  $r_H = 1,18$  (mřížkový rozptyl).

V případě polovodiče se smíšenou vodivostí se popsaná metoda nehodí k měření  $\mu_n$  a  $\mu_p$  (viz vztah (12.18)). Také při měření  $n$  a  $p$  je nutno použít složitější metody.

#### 12.9.4. Určování hustoty částic s nábojem

U vlastního polovodiče lze vypočítat  $n_i$  ze vztahu (11.41) při znalosti  $E_g$ ,  $m_n^*$ ,  $m_p^*$ . Experimentální určení  $E_g$  bylo popsáno výše, experimentální určení  $m^*$  se provádí pomocí cyklotronové rezonance. Princip tohoto měření je popsán v článku 7.6 a příkladu 7.8.

#### 12.9.5. Určování $E_D$ a $E_A$

Experimentální zjišťování  $E_D$  a  $E_A$  se může provádět např. z měření teplotní závislosti hustoty částic s nábojem. Při dostatečně nízkých teplotách, kdy dochází k ionizaci nepatrné části příměsových atomů, je hustota volných elektronů nebo děr dána vztahem ( $n \ll N_d$ ) - (11.68). Grafickou závislostí  $\ln n$  na  $1/T$  je pak přímka, z jejíž směrnice lze určit  $E_D$  (event.  $E_A$  pro  $p \ll N_a$ ). Pokud pro daný polovodič platí jiné vztahy, vždy se jedná o exponenciální vztahy.  $E_D$  event.  $E_A$  se určí stejným způsobem.

Zjištění  $n$  se provede ze změřených závislostí měrné vodivosti a Hallovy konstanty na teplotě. Protože při nízkých teplotách lze vlastní vodivost zanedbat a uplatňuje se téměř výhradně jen jeden druh částic s nábojem, lze ze znalosti  $R_H$  vypočítat  $\mu$  a dosazením do vztahu (12.2) vypočítat  $n$ .

Druhý způsob zjišťování  $E_D$  a  $E_A$  spočívá ve změření absorpčních spekter. Jak bylo uvedeno v článku 12.8, projeví se tyto příměsi v absorpčním spektru jako výrazné výběžky, z jejichž polohy lze určit  $E_D$  event.  $E_A$ . Mnohé příměsové hladiny byly určeny právě tímto způsobem. Výhody této metody spočívají v tom, že lze studovat současně libovolný počet příměsí. Jejich hustota však musí být tak velká, aby výběžky ve spektru byly zřetelné.

#### Literatura:

- [1] Frank H., Šnejdar V: Principy a vlastnosti polovodičových součástek, SNTL Praha 1976, str. 93, 97
- [2] Anselm A.T: Úvod do teorie polovodičů, NČSAV Praha 1967, str. 253
- [3] Smith R.A: Semiconductors, Cambridge 1959, str. 115
- [4] Gudden B., Pohl R.W: Z. Physic 5, (1921), str. 176
- [5] De Boer J.H., Verwey E.Y: Proc. Phys. Soc. 49 (1937), str. 54

#### Význam použitých symbolů

- $\vec{a}$  - zrychlení
- $b$  -  $\mu_n/\mu_p$
- $D_n$  - difuzní konstanta pro elektrony
- $D_p$  - difuzní konstanta pro díry
- $d$  - vzdálenost mezi elektrodami
- $E$  - střední energie
- $E_H$  - Hallova intenzita elektrického pole
- $E_k$  - kritická intenzita elektrického pole
- $\vec{F}_e$  - síla působící na částici s nábojem v elektrickém poli
- $\vec{F}_m$  - síla působící na částici s nábojem v magnetickém poli
- $F_0$  - rovnovážná Fermiova-Diracova rozdělovací funkce
- $G$  - celková hustota párů elektron-díra vytvořená generací za jednotku času
- $g$  - hustota párů elektron-díra vytvořená generací za jednotku času
- $g_{sv}$  - hustota párů elektron-díra vytvořená generací světlem za jednotku času
- $g_{term}$  - hustota párů elektron-díra vytvořená generací teplem za jednotku času
- $I$  - proud
- $J_c(x)$  - hustota toku částic plochou o jednotkovém obsahu za jednotku času v bodě  $x$
- $J_n$  - elektronová složka hustoty polního proudu
- $J_n^d$  - elektronová složka hustoty difuzního proudu
- $J_p$  - děrová složka hustoty polního proudu
- $J_p^d$  - děrová složka hustoty difuzního proudu
- $L_n$  - difuzní délka pro elektrony
- $l_n$  - difuzní vzdálenost pro elektrony
- $N_C$  - efektivní hustota elektronů ve vodivostním pásu
- $N_V$  - efektivní hustota děr ve valenčním pásu
- $n^d$  - hustota elektronů vytvořená difuzí
- $n_i$  - intrinzická hustota elektronů
- $n_0$  - rovnovážná hustota elektronů
- $\Delta n$  - nadbytečná hustota elektronů
- $p^d$  - hustota děr vytvořená difuzí
- $p_0$  - rovnovážná hustota děr
- $\Delta p$  - nadbytečná hustota děr
- $R$  - hustota všech rekombinačních procesů za jednotku času
- $R_H$  - Hallova konstanta
- $R_i$  - Hallova konstanta pro intrinzický polovodič
- $r$  - koeficient rekombinace
- $r_H$  - rozptylový faktor
- $\mathcal{J}$  - plošný obsah
- $s$  - exponent v mocninné závislosti pro rozptylové mechanismy
- $t$  - čas
- $U_{1,2}$  - termoelektrické napětí
- $U_H$  - Hallovo napětí
- $\bar{v}$  - velikost střední unášivé (driftové) rychlosti

- $\alpha$  - termoelektrický součinitel
- $\Gamma(x)$  - Gamma funkce
- $\gamma_n$  - elektronová měrná vodivost
- $\gamma_p$  - děrová měrná vodivost
- $\epsilon$  - permitivita
- $\eta$  - kvantový výtěžek
- $\Theta_n$  - Hallův úhel pro elektrony
- $\Theta_p$  - Hallův úhel pro díry
- $\Delta$  - střední volná dráha
- $\chi$  - magnetorezistanční koeficient
- $\Pi$  - Peltierův součinitel
- $\rho$  - objemová hustota náboje
- $\tau$  - relaxační doba
- $\tau_{disl}$  - relaxační doba pro rozptyl na dislokacích
- $\tau_I$  - relaxační doba pro rozptyl na ionizovaných příměsích
- $\tau_L$  - relaxační doba pro rozptyl na kmitech mřížky
- $\tau_n$  - relaxační doba pro elektrony; doba života elektronů
- $\tau_p$  - relaxační doba pro díry; doba života pro díry
- $\tau_T$  - Thomsonův koeficient
- $\omega = e_0 B / m_n^+$
- $\nabla$  - Hamiltoniův operátor

### 13. POLOVODIČOVÉ PRVKY

Rozvoj polovodičů a z nich vyráběných součástek je tak prudký, že v současné době existuje velké množství různých polovodičových součástek. Proto bude v této kapitole proveden pouze popis činnosti pro některé nejběžnější polovodičové součástky.

Polovodičové součástky je možné klasifikovat podle jejich složení, zda jsou homogenní nebo zda mají jeden či více přechodů PN, kolik mají elektrod. Někdy se třídění provádí na součástky aktivní a pasivní. V těchto skriptech provedeme členění podle počtu přechodů PN, které součástka obsahuje.

Dříve než přikročíme k výkladu činnosti jednotlivých součástek, probereme některé jevy, které jsou k výkladu činnosti nezbytné. Budou to elektrické jevy probíhající na rozhraní mezi dvěma různými látkami (různými z hlediska fyzikálních vlastností) a změna hustoty částic s nábojem vlivem elektrického pole.

Místo rozhraní je ve fyzice pevných látek vžitý termín přechod.

#### 13.1. Přechody

##### 13.1.1. Přechod PN

Dosud jsme se v předcházejících kapitolách zabývali polovodiči homogenními, u nichž je rozložení hustoty částic nezávislé na poloze v polovodiči nebo polovodiči, u nichž je místní změna v hustotě volných částic vyvolaná působením magnetického pole, teplotního gradientu nebo osvětlením. Nyní se budeme zabývat polovodiči nehomogenními. Nehomogenitu můžeme vytvořit např. tím způsobem, když v jedné části polovodičového materiálu bude vytvořen polovodič typu P a v druhé části polovodič typu N. Přitom je důležité, že tyto dvě oblasti (P a N) jsou vytvořeny v jednom polovodiči. Pak mluvíme o přechodu PN.

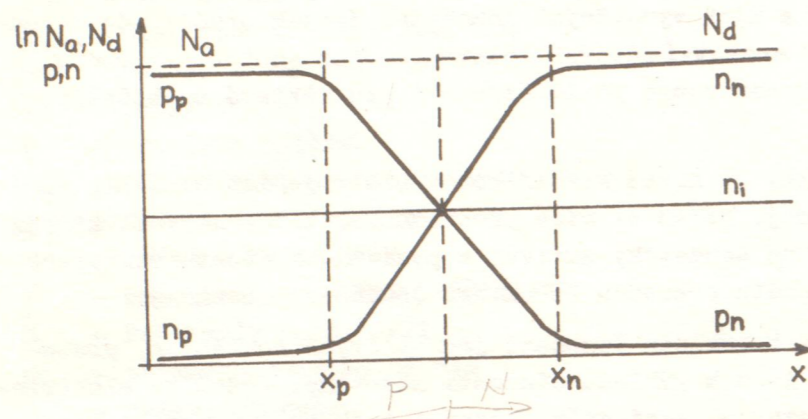
Jestliže přechází oblast typu P nespojitě v oblast typu N, mluvíme o strmém přechodu. Jestliže dochází k pozvolné změně polovodiče typu P na polovodič typu N, mluvíme o pozvolném přechodu. Změna hustoty akceptorů a donorů v závislosti na poloze v příslušném vzorku se pro pozvolný přechod aproximuje přímkou. Je-li hustota akceptorů a donorů po obou stranách přechodu číselně stejná, říkáme, že přechod je symetrický, v opačném případě mluvíme o asymetrickém přechodu.

Přechod PN teoreticky předpověděl již v roce 1938 sovětský fyzik Davydov. V té době však nebyla ještě vypracována technologie výroby extrémně čistých polovodičových materiálů a proto se přechod nerealizoval. Teorii přechodů vypracoval až v roce 1949 americký fyzik Shockley a to pro Ge a Si a tyto přechody byly brzy potom vyrobeny.

Výklad provedeme pro strmý přechod, který je symetrický. Předpokládejme průběh hustoty akceptorů a donorů, který je znázorněn na obr. 13.1 (průběh hustoty vyznačen čárkovaně). U rozhraní tedy dochází k vytvoření gradientu hustoty elektronů a děr a díry tedy budou difuzí přecházet do polovodiče ty-

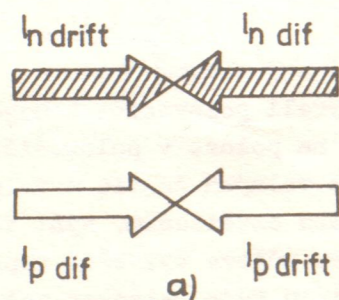
PP - křivka dle v. polov. typu P  
 PN - křivka dle v. polov. typu N

pu N. Zde jsou minoritními částicemi a proto budou postupně rekombinovat



Obr. 13.1. Průběh hustoty akceptorů a donorů v přechodu PN (vyznačen čárkovaně). Průběh hustoty elektronů a děr (vyznačen plně).

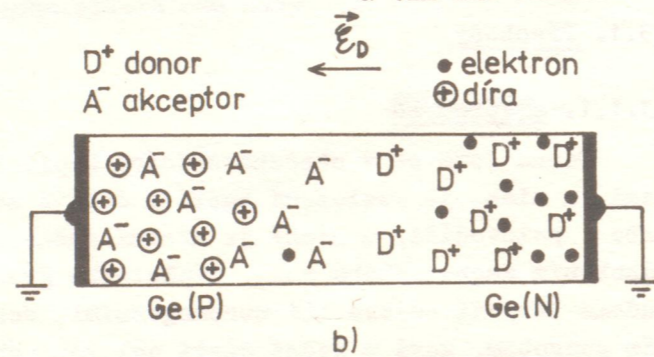
s elektrony až v určité vzdálenosti bude hustota těchto difundovaných děr nulová. V okolí přechodu se v polovodiči typu N vlivem rekombinace sníží i hustota elektronů a tím dojde k porušení elektrické neutrality v této části polovodiče. Záporné elektrony nevykompenzují kladný náboj ionizovaných donorů a tím zde vzniká



Obr. 13.2a. Znárodnění driftových a difuzních proudů na přechodu PN při rovnovážném stavu

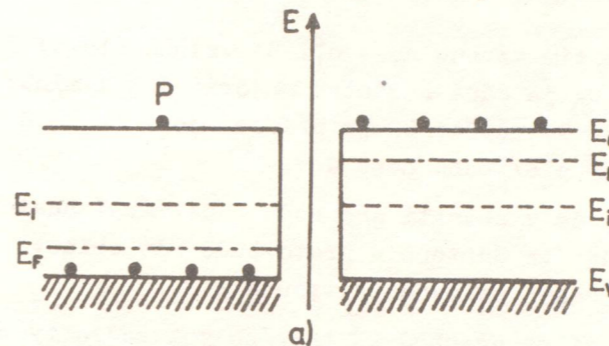
kladný prostorový náboj. Podobně elektrony difundují do polovodiče typu P, kde rekombinují s dírami a vytváří se nevykompenzovaný záporný prostorový náboj. V okolí přechodu se tedy vlivem prostorového náboje vytvoří elektrické pole, jehož intenzita  $\mathcal{E}_D$  má směr z polovodiče typu N do polovodiče typu P. V důsledku takto vytvořeného elektrického pole dochází k opačnému pohybu elektronů (tj. z polovodiče typu P do polovodiče typu N) a děr z polovodiče typu N do typu P (driftový proud). Rovnovážný stav se vytvoří, když bude difuzní proud elektronů stejně velký jako opačný driftový proud (viz obr. 13.2a). Na přechodu se vytvoří napětí  $U_D$ . Na obr. 13.2b je ukázáno rozložení příměsí  $A^-$ ,  $D^+$ , elektronů  $\bullet$  a děr  $\oplus$  po vytvoření rovnováhy a směr intenzity elektrického pole  $\mathcal{E}_D$ . Takto vytvořené vnitřní elektrické pole se nazývá difuzní, protože bylo způsobeno difuzí. Je potřeba si uvědomit, že toto difuzní pole se vytvořilo bez připojení přechodu PN na vnější napětí jen jako důsledek nehomogenity materiálu.

Na energiové schéma přechodu PN můžeme usoudit z následujících úvah. Na obr. 13.3a jsou znázorněna energiová schémata polovodiče typu P a N.

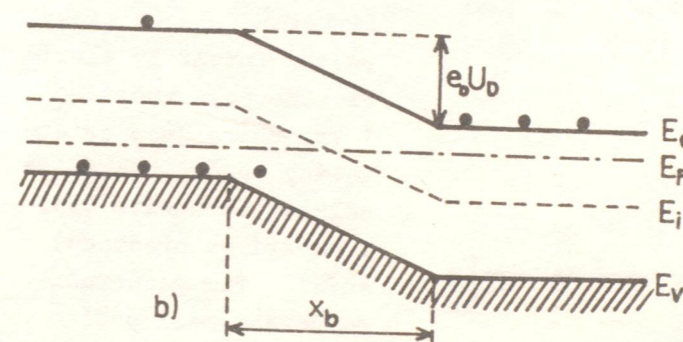


Obr. 13.2b. Rozložení akceptorů, donorů, elektronů a děr v přechodu PN po vytvoření termodynamické rovnováhy

Po vytvoření termodynamické rovnováhy je poloha Fermiovy energie ve stejné výši v obou typech polovodičů. Při difuzi elektronů a děr dochází vlivem rekombinace k vytváření záporného prostorového náboje a tím je potřeba k přechodu dalších elektronů



Obr. 13.3a. Energiové schéma přechodu PN v okamžiku vytvoření přechodu



Obr. 13.3b. Energiové schéma přechodu PN po ustavení termodynamické rovnováhy

do polovodiče typu P větší energie na překonání postupně se zvyšující potenciálové bariéry vznikající na přechodu (obr. 13.3b). V rovnovážném stavu se vytvoří energiový val o velikosti  $e_0 U_D$ . Analogické úvahy platí i pro díry.

Velikost  $U_D$  lze vypočítat následující úvahou. Předpokládejme, že se nejedná o příliš nízké teploty a že jsou všechny příměsi ionizovány (plná ionizace). Označme  $p_p$  hustotu děr v hloubce polovodiče (mimo přechod) v polovodiči typu P a  $p_n$  hustotu děr v polovodiči typu N. Analogicky pro elektrony  $n_p$ ,  $n_n$  (viz obr. 13.1).

Pro hustotu elektronů a děr platí podle (11.47) a (11.48)

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right) \quad (13.1)$$

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right) \quad (13.2)$$

Položíme-li  $E_C(+\infty) = 0 \text{ eV} = E_C(x_n)$   
 $E_C(-\infty) = E_C(x_p) = e_0 U_D$  , (13.3)

dostáváme

$$n_p = N_C \exp\left(\frac{-e_0 U_D + E_F}{k_B T}\right) \quad (13.4)$$

$$n_n = N_C \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \quad (13.5)$$

Dělením rovnic (13.4) a (13.5) je po úpravě

$$U_D = \frac{k_B T}{e_0} \ln \frac{n_n}{n_p} \quad (13.6)$$

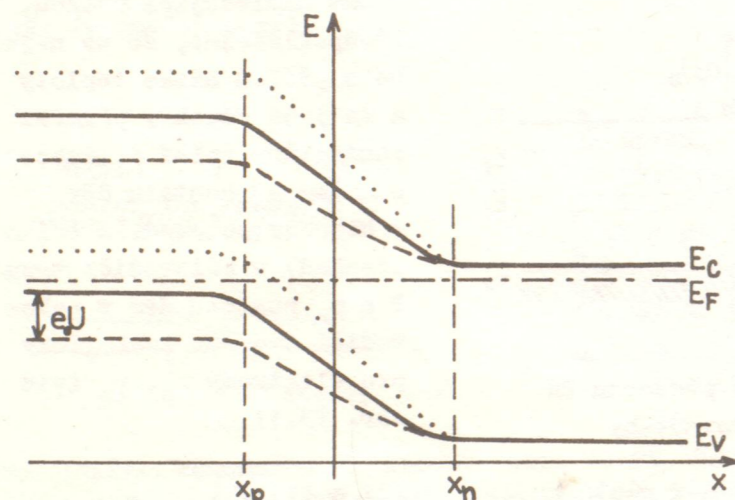
Analogickými vztahy pro  $p_p$  a  $p_n$  a podobnou úvahou dostáváme

$$U_D = -\frac{k_B T}{e_0} \ln \frac{p_p}{p_n} \quad (13.6a)$$

Ke vztahu (13.6a) lze dojít také užitím vztahu  $n_p = n_1^2$ . Ze vztahů (13.6) nebo (13.6a) je vidět, že velikost  $U_D$  je dána hustotou majoritních i minoritních částic. Výpočtem se dá zjistit, že napětí  $U_D$  je při pokojové teplotě 60 mV na každou dekádu změny hustoty elektronů nebo děr.

Z výše uvedených úvah vyplývá, že v oblasti přechodu bude menší hustota volných částic s nábojem než ve vnějších částech a proto bude oblast přechodu PN větší odpor než vnější části polovodiče typu N a P.

Přiložíme-li vnější zdroj napětí na přechod PN tak, že polovodič typu P připojíme na kladný pól zdroje a polovodič typu N na záporný pól zdroje, změní se energiové schéma jak je zřejmé z obr. 13.4. Plně jsou vytaženy ener-



Obr. 13.4. Energiové schéma přechodu PN bez vnějšího napětí (vznačeno plně), s napětím v propustném směru (vznačeno čárkovaně) a s napětím v závěrném směru (vznačeno tečkovaně).

objeví volné částice s nábojem a tím se odpor přechodové vrstvy sníží. Podobně bude více elektronů přecházet z polovodiče typu N do polovodiče typu P než ve směru opačném. Opět můžeme mluvit o vstřikování elektronů do polovodiče typu P. Je tedy zřejmé, že přes přechod bude procházet proud. Říkáme, že přechod je zapojen v propustném směru (v technické praxi se často používá pojem přímý směr). Je potřeba si uvědomit, že v polovodiči typu P mimo přechod je proud zprostředkován převážně dírami a v polovodiči typu N elektrony. Díry, které se dostávají do oblasti přechodu, jsou v oblasti polovodiče typu N minoritními částicemi s nábojem a proto tam nemohou trvale existovat a budou postupně rekombinovat s elektrony. Proud, který má v polovodiči typu P převážně děrový charakter, přechází postupně v elektronový v polovodiči typu N. Přitom však musí platit, že v libovolném místě přechodu platí

čárkovaně s elektrickým polem. Intenzity elektrického pole vnějšího i vnitřního jsou orientovány opačně, takže se celková intenzita (tj. i napětí na přechodu) sníží. Tím se poruší rovnováha mezi počtem částic, které procházejí přechodem v obou směrech. Protože se potenciálová bariéra sníží, bude procházet přechodem zleva doprava více děr než směrem opačným. Mluvíme o vstřikování (injekci) děr do polovodiče typu N. V oblasti přechodu se

$j_p + j_n = \text{konst.}$  Doba, po kterou existují díry v polovodiči typu N, je dána jejich dobou života  $\tau_p$ . Vzdálenost, na kterou pronikají do polovodiče typu N, je charakterizována difuzní délkou  $\mathcal{L}_p$ . To tedy znamená, že přechod PN zapojený v propustném směru vstřikuje minoritní částice s nábojem. Mluvíme o injekci minoritních částic s nábojem. Minoritních proto, že v oblasti, do které se vstřikují, to jsou minoritní částice.

K posouzení kvality přechodu PN z hlediska injekce se zavádí veličina injekční účinnost přechodu. Zavádí se vztahem

$$\gamma = \frac{j_p}{j_p + j_n} \quad (13.7)$$

tzn. udává nám, jaká část z celkové hustoty proudu procházejícího přes přechod PN je tvořena dírami.

Kvantitativní výpočty provedeme pro malou rychlost rekombinace minoritních částic, tj. jejich hlubokého pronikání do polovodiče. Znamená to, že přechodová oblast, v níž se mění proud děr o hustotě  $j_p$  na proud elektronů o hustotě  $j_n$  je podstatně větší než šířka přechodu PN ( $x_n - x_p$ ), tj. že platí

$$j_n(x_p) = j_n(x_n) \quad \text{a} \quad j_p(x_n) = j_p(x_p) \quad (13.8)$$

Ze vztahů (13.4) a (13.5) platí

$$n_p = n_n \exp\left(-\frac{e_0 U_D}{k_B T}\right) \quad (13.9)$$

a podobně pro díry

$$p_p = p_n \exp\left(\frac{e_0 U_D}{k_B T}\right) \quad (13.9a)$$

Vztahy (13.9) a (13.9a) platí bez vnějšího elektrického pole. Po připojení vnějšího elektrického pole uvedené polarity se zvětší počet elektronů, které přejdou přes přechod do polovodiče typu P. Hustotu elektronů v bodě  $x_p$  lze vyjádřit (podle (13.9)) ve tvaru

$$n(x_p) = n_n \exp\left(\frac{-e_0 U_D + e_0 U}{k_B T}\right) \quad (13.10)$$

a s přihlédnutím k (13.9)

$$n(x_p) = n_p \exp\left(\frac{e_0 U}{k_B T}\right) \quad (13.10a)$$

V našich dalších výpočtech chceme dospět ke kvantitativnímu vyjádření VA charakteristiky a proto je potřeba nalézt vztahy pro celkovou hustotu proudu. Protože musíme uvažovat jak polní tak i difuzní složku proudu, platí pro elektronovou složku proudu

$$j_n(x_p) = e_0 \left[ \mathcal{E}_x (\mu_n n(x_p)) + D_n \frac{dn}{dx} \right] \quad (13.11)$$

$$j_n(x_n) = e_0 \left[ \mathcal{E}_x (\mu_n n_n) + D_n \frac{dn}{dx} \right] \quad (13.12)$$

Ve vztahu (13.12) píšeme  $n_n$  místo  $n(x_n)$ , ale protože se jedná v bodě  $x_n$  o majoritní částice s nábojem, nedojde přiložením elektrického pole k jejich

změně a proto  $n(x_n) = n_n$ . Protože v oblasti polovodiče typu N je velká hustota elektronů, stačí i slabé pole k vyvolání velké hustoty proudu a naopak  $dn/dx$  je malé a proto bude v bodě  $x_n$  převládat polní proud nad proudem difuzním. Platí tedy

$$j_n(x_n) = e_0 n_n \mu_n \mathcal{E}_x \quad (13.13)$$

Protože při konstrukci přechodů je splněna podmínka  $U_D > U$ , platí

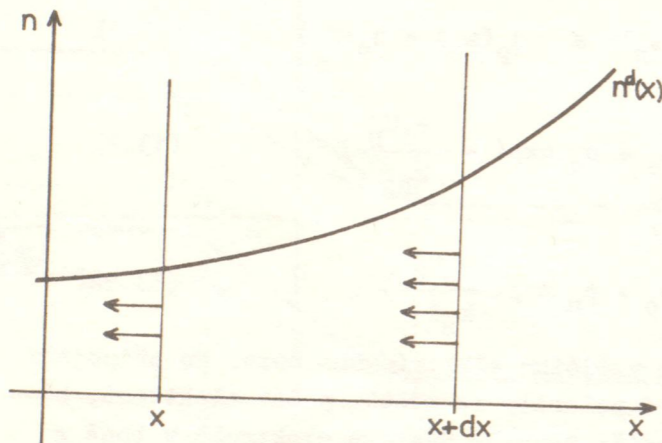
$$\exp \frac{-e_0 U_D + e_0 U}{k_B T} \ll 1$$

a ze vztahu (13.10) platí  $n(x_p) \ll n_n$ . Proto můžeme předpokládat, že zde naopak bude platit

$$j_n(x_p) = e_0 D_n \frac{dn}{dx} \quad (13.14)$$

Vzhledem ke vztahu (13.8) platí

$$n_n \mu_n \mathcal{E}_x = D_n \frac{dn}{dx} \quad (13.15)$$



Obr. 13.5. Průběh funkce  $n^d = f(x)$

Pro hustotu částic, které vystupují v bodě  $x_n$  plochou o jednotkovém obsahu za jednotku času, platí vztah

$$n_x^d = D_n \frac{dn(x)}{dx} \quad (13.16a)$$

V ustáleném případě platí (viz též článek 12.7.3.)

$$n_{x+dx}^d - n_x^d = (rnp - g)dx$$

a po dosazení z (13.16) a (13.16a) dostáváme

$$D_n \frac{dn(x+dx)}{dx} - D_n \frac{dn(x)}{dx} = (rnp - g)dx$$

V oblasti polovodiče typu P je rekombinace s generací v rovnováze (nedochází ke zvyšování nebo ke snižování hustoty částic s nábojem s časem) a proto platí  $rnp = g$ . Předpokládáme, že  $g$  a  $r$  nezávisí na hustotě částic. Použijme Taylorova rozvoje na výraz

Ve vztahu (13.14) potřebujeme nalézt vztah pro  $dn/dx$ . K výpočtu vyjdeme z obr. 13.5., který představuje grafickou závislost  $n^d = f(x)$ . Vypočteme si hustotu elektronů, které vstoupí plochou o jednotkovém obsahu do vrstvy v bodě  $(x + dx)$  za 1 s. Platí

$$n_{x+dx}^d = D_n \frac{dn(x+dx)}{dx} \quad (13.16)$$

$$\frac{dn(x+dx)}{dx}$$

a zanedbáním členů vyšších řádů než prvního dostáváme po úpravě

$$D_n \frac{d^2 n(x)}{dx^2} = r(np - n_p p_p)$$

a vzhledem k tomu, že se zajímáme o situaci v místě  $x_p$ , máme

$$D_n \frac{d^2 n(x)}{dx^2} = r [n(x_p) p_p - n_p p_p] \quad (13.17)$$

Užitím vztahů (12.90) a (12.76a) přepíšeme vztah (13.17) na tvar

$$\frac{d^2 n(x)}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{L}_n^2} [n(x_p) - n_p] \quad (13.18)$$

Řešením této diferenciální rovnice s užitím hraniční podmínky  $n(-\infty) = n_p$  dostaneme

$$n(x) = n_p + C \exp \frac{x}{\mathcal{L}_n} \quad (13.19)$$

Dosazením do rovnice (13.14) vychází

$$j_n(x_p) = e_0 D_n \frac{C}{\mathcal{L}_n} \exp \frac{x_p}{\mathcal{L}_n} \quad (13.20)$$

a užitím (13.19) je

$$j_n(x_p) = \frac{e_0 D_n}{\mathcal{L}_n} [n(x_p) - n_p] \quad (13.21)$$

Ze vztahu (13.21) vychází, že pro  $U = 0$  V, tj. když  $n(x_p) = n_p$ ,  $j = 0$  A.m<sup>-2</sup>, což je zřejmé.

Dosazením z (13.10) do (13.21) máme

$$j_n(x_p) = \frac{e_0 D_n}{\mathcal{L}_n} n_p \left[ \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right] \quad (13.22)$$

Analogické úvahy lze provést i pro díry a vychází

$$j_p(x_n) = \frac{e_0 D_p}{\mathcal{L}_p} p_n \left[ \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right] \quad (13.22a)$$

a protože  $j_p(x_n) = j_p(x_p)$ , platí pro celkovou hustotu proudu v bodě  $x_p$  vztah

$$j(x_p) = j_n(x_p) + j_p(x_p) = \left[ \frac{e_0 D_n n_p}{\mathcal{L}_n} + \frac{e_0 D_p p_n}{\mathcal{L}_p} \right] \left( \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right)$$

Z rovnice kontinuity vyplývá, že hustota proudu v bodě  $x_p$  je stejná jako v kterémkoliv jiném místě a tedy

$$j = \left[ \frac{e_0 D_n n_p}{\mathcal{L}_n} + \frac{e_0 D_p p_n}{\mathcal{L}_p} \right] \left( \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right) \quad (13.23)$$

Vztah (13.23) nám udává souvislost mezi hustotou proudu a napětím na přechodu

PN, tedy je to hledané matematické vyjádření pro VA charakteristiku přechodu PN v propustném směru.

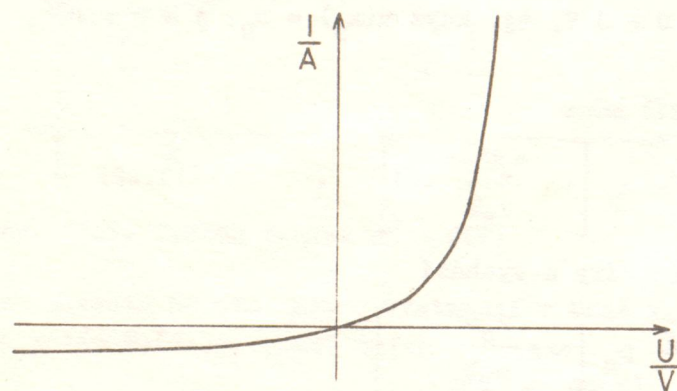
Protože uvažujeme slabé injekce, tj.  $n(x_p) < n_n$ , bude oblast přechodu mít stále ještě větší odpor než je odpor vnější části polovodiče typu N event. P. Pak bude napětí přivedené na celý přechod (včetně vnějších částí polovodiče P a N) prakticky napětím na oblasti přechodu mezi  $x_p$  a  $x_n$ .

Přiložíme-li vnější zdroj napětí na přechod PN tak, že polovodič typu P je připojen na záporný pól zdroje a polovodič typu N na kladný pól zdroje, mají obě intenzity elektrického pole stejný směr a potenciálová bariéra se ještě zvýší. Energiové schéma se tedy změní podle obr. 13.4 (vyznačeno tečkovaně). Volné částice se vlivem přiloženého vnějšího pole pohybují tak, že se pohybují od přechodu na opačnou stranu. Tím se přechod PN ještě více rozšíří, tj. zvětší se oblast téměř bez volných částic s nábojem a tedy značně vzroste odpor přechodu PN. Obvodem neprochází prakticky žádný proud. Mluvíme o směru závěrném nebo zpětném. Proud, který přes přechod prochází, se nazývá zbytkový a je tvořen minoritními částicemi s nábojem, pro které je přechod zapojen v propustném směru.

Kvantitativní výpočet je stejný jako v případě přímého směru. Platí stejný vztah (13.23), ale  $U < 0$  V. Pro  $U = -\infty$  platí

$$j = j_0 = \frac{e_0 D_n n_p}{L_n} + \frac{e_0 D_p p_n}{L_p}. \quad (13.24)$$

Veličina  $j_0$  představuje maximální hustotu proudu v závěrném směru, tj. hustotu



Obr. 13.6. VA charakteristika přechodu PN

$$j = j_0 \exp \frac{e_0 U}{k_B T}.$$

Voltampérová charakteristika přechodu je znázorněna na obr. 13.6.

Jak je zřejmé ze vztahů (13.10) a (13.10a), neplatí při připojení napětí na přechod PN vztahy (11.47) a (11.48) a proto nelze definovat Fermiovu energii  $E_F$ . Proto se v případě průchodu proudu přes přechod zavádí tzv. zdánlivé Fermiovy energie  $E_{Fn}$  a  $E_{Fp}$  pro elektrony nebo pro díry. Pro hustotu elektronů  $n = n_0 + \Delta n$  je definována vztahem

zbytkového proudu. Ze vztahu (13.24) je vidět, že  $j_0$  bude tím menší (tj. přechod bude tím kvalitnější), čím bude menší difuzní konstanta a hustota minoritních částic s nábojem. Jeví tedy proud v závěrném směru nasycení. V propustném směru lze pro větší napětí na přechodu psát

$$n = N_C \exp \left( - \frac{E_C - E_{Fn}}{k_B T} \right) \quad (13.25)$$

a pro díry o hustotě  $p = p_0 + \Delta p$  vztahem

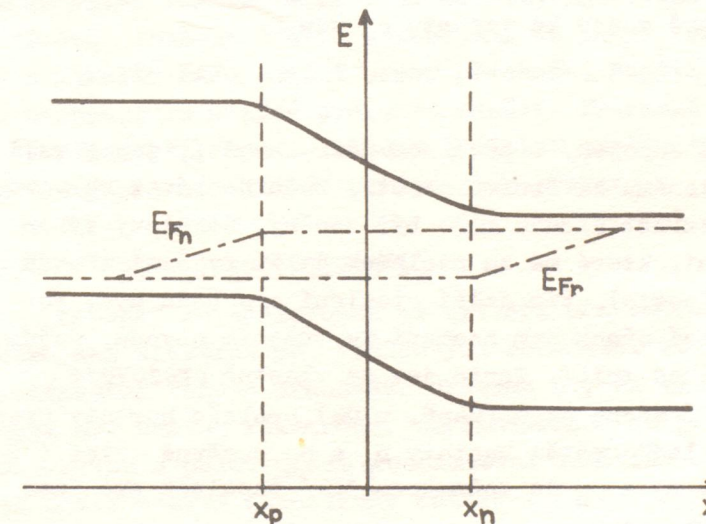
$$p = N_V \exp \left( - \frac{E_{Fp} - E_V}{k_B T} \right). \quad (13.25a)$$

Tím se formálně dosáhne stejného tvaru jako pro rovnovážné hustoty, jen místo  $E_F$  se píše  $E_{Fn}$  nebo  $E_{Fp}$ . Užitím vztahů (13.1) a (13.2), kde místo  $n$  a  $p$  píšeme rovnovážné hustoty  $n_0, p_0$  a vztahů (13.25) a (13.25a) dostáváme

$$E_{Fn} - E_F = k_B T \ln \left( 1 + \frac{\Delta n}{n_0} \right) \quad (13.26)$$

$$E_F - E_{Fp} = k_B T \ln \left( 1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right). \quad (13.26a)$$

Z těchto vztahů je vidět, že zdánlivé Fermiovy energie jsou rozloženy symetricky vzhledem k  $E_F$  a jejich vzdálenost od  $E_F$  je tím větší, čím je větší hustota nadbytečných elektronů a děr. Průběh zdánlivých energií je na obr. 13.7.



Obr. 13.7. Zdánlivé Fermiovy energie

na vztahem

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\mathcal{V}}{x_b},$$

kde  $\epsilon_r$  je relativní permitivita oblasti mezi prostorovým nábojem. Dále platí

$$C = \frac{dQ}{dU}. \quad (13.27)$$

Pro strmý přechod platí pro náboj  $Q$  (např. kladný náboj tvořený ionizovanými donory)

$$Q = e_0 N_d \mathcal{V} x_b,$$

kde

$$x_b = x_n - x_p \quad (13.27a)$$

je šířka přechodu. Pro napětí  $U$  na přechodu platí [1]

Při výkladu přechodu PN v tomto článku jsme si říkali, že se v okolí přechodu vytvářejí oblasti prostorového náboje. Prostorové náboje jsou odděleny od sebe oblastmi prakticky bez volných částic s nábojem. Proto se toto rozložení nábojů v závěrném směru chová jako kondenzátor. Předpokládáme-li, že přechod PN je rovinný, mluvíme o deskovém kondenzátoru. Kapacita přechodu o plošném obsahu  $\mathcal{V}$  je dána



$$U_D + U = \frac{e_0 N_d}{2 \epsilon_r \epsilon_0} x_b^2 \quad (13.27b)$$

Pak s použitím (13.27b) po úpravě dostáváme

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \gamma}{x_b} = \gamma \left[ \frac{e_0 \epsilon_r \epsilon_0 N_d}{2(U_D + U)} \right]^{1/2} \quad (13.27c)$$

Pro kapacitu strmého přechodu tedy platí  $C \sim U^{-1/2}$ .

Pro kapacitu pozvolného přechodu zapojeného v závěrném směru platí

$$C \sim U^{-1/3}$$

Znalost kapacity přechodu je velmi důležitá pro rozhodování o užití přechodů ve vysokofrekvenční technice.

#### Průraz přechodu

Dosud jsme se při výkladu činnosti přechodu PN nezabývali omezením pro velikost napětí v závěrném směru. Při velkém napětí na přechodu dojde k prudkému vzrůstu proudu přechodem a přechod se může zničit. Seznámíme se velmi stručně s třemi mechanismy, které vedou ke vzrůstu proudu.

#### Tepelný průraz

Přiložíme-li na přechod PN zapojený v závěrném směru napětí, jehož velikost se blíží maximálnímu povolenému závěrnému napětí, bude docházet ke vzrůstu proudu nárazovou ionizací. Vzrůst proudu může být značný. Ztrátový výkon v přechodu způsobí jeho oteplení, které má za následek další zvýšení proudu (zvětšení hustoty minoritních částic), tím další oteplení přechodu atd. Pokud se závěrný proud procházející přechodem neomezí ve vnějším obvodu, dojde k tepelnému průrazu, který přechod zničí. Tento jev se vlastně projevuje u polovodičů s menší šířkou zakázaného pásu (např. u Ge), protože hustoty proudu jsou v závěrném směru, v důsledku větší hustoty  $n_p$  a  $p_n$ , poměrně velké (až  $10 \text{ mA} \cdot \text{cm}^{-2}$ ). Zvětšování hustoty  $n_p$  a  $p_n$  je způsobeno také tepelnou excitací z valenčního pásu do vodivostního pásu.

#### Zenerův průraz

Jak se dá ukázat teoretickými výpočty, platí pro šířku přechodu (tj. šířku potenciálové bariéry) vztah

$$x_b = \left[ \frac{2 \epsilon_r \epsilon_0}{e_0} \left( \frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right) (U_D + U) \right]^{1/2} \quad (13.28)$$

Je-li oboustranná dotace příměsími velká, stává se šířka přechodu velmi malá. Šířka se může zmenšit natolik, že dochází k vytrhávání elektronů z valenčního pásu a přechodu do vodivostního pásu (polní emise) a tedy k tunelovému jevu. Přesáhne-li velikost intenzity elektrického pole hodnotu  $10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  (hodnota kritická), lze v Ge a Si pozorovat tunelový proud vzniklý přestupem elektronů přes zakázaný pás. Aby se toto pole dalo vytvořit, aniž by předtím docházelo k nárazové ionizaci, je potřeba, aby oboustranná dotace přechodu byla velká.

Podrobným rozбором teoretických úvah lze zjistit, že tunelový jev nastane při  $U \leq 4E_g/e_0$ . Pro  $4E_g/e_0 < U < 6E_g/e_0$  se vyskytují oba mechanismy a pro  $U \geq 6E_g/e_0$  dochází k lavinovému průrazu.

U materiálů Ge a Si, které se běžně používají k výrobě stabilizačních diod, se šířka zakázaného pásu  $E_g$  s rostoucí teplotou zmenšuje a proto má průrazné napětí záporný teplotní součinitel.

#### Nárazová ionizace

Při výkladu přechodu PN jsme si ukázali, že v závěrném směru při zvětšujícím se napětí na přechodu se šířka přechodu zvětšuje. Ze vztahu (13.28) pro strmý přechod je zřejmé, že  $U \sim x_b^2$  a za zjednodušeného předpokladu, že se vytvoří homogenní elektrické pole, je  $\mathcal{E} \sim x_b$ . To tedy znamená, že s rostoucí šířkou přechodu se zvětšuje i intenzita elektrického pole na přechodu. Při určité intenzitě elektrického pole (menší než je intenzita kritická) a při dostatečné šířce přechodu, nabývají minoritní částice s nábojem, které se v přechodu vždy nacházejí, takové energie, že jsou schopny srážkami vyrážet valenční elektrony dalších atomů. Tím vzniká další volná částice, která se opět může urychlovat elektrickým polem a vyrážet další valenční elektrony, takže počet volných elektronů se zvětšuje velmi značně. Tomuto jevu říkáme lavinové násobení částic s nábojem. Je jasné, že při tomto mechanismu se může o několik řádů snížit odpor přechodu. Napětí potřebné ke vzniku lavinového násobení se nazývá průrazné napětí. Průrazné napětí s rostoucí teplotou přechodu roste, tj. má kladný teplotní součinitel. Tím lze experimentálně lavinový průraz odlišit od Zenerova průrazu.

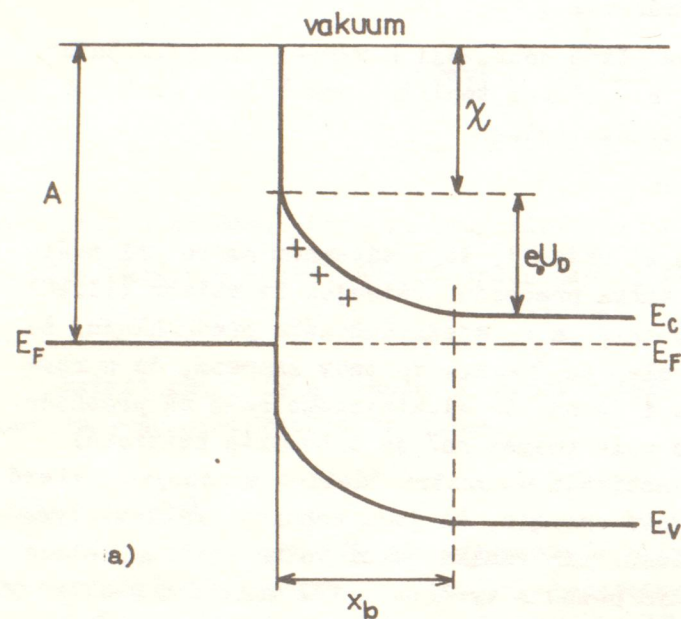
#### 13.1.2. Kontakt kov-polovodič

Kontakt kov-polovodič se vytvoří při každém měření na polovodiči, při vytváření elektrod polovodičových součástek atd. Proto se budeme zabývat vlastnostmi tohoto přechodu. Ukážeme si, že vlastnosti přechodu kov-polovodič mohou být velice různorodé, od lineárních až po usměrňující. Teorii kontaktu mezi kovem a polovodičem rozpracoval Schottky a proto se kontakt kov-polovodič často nazývá Schottkyův kontakt.

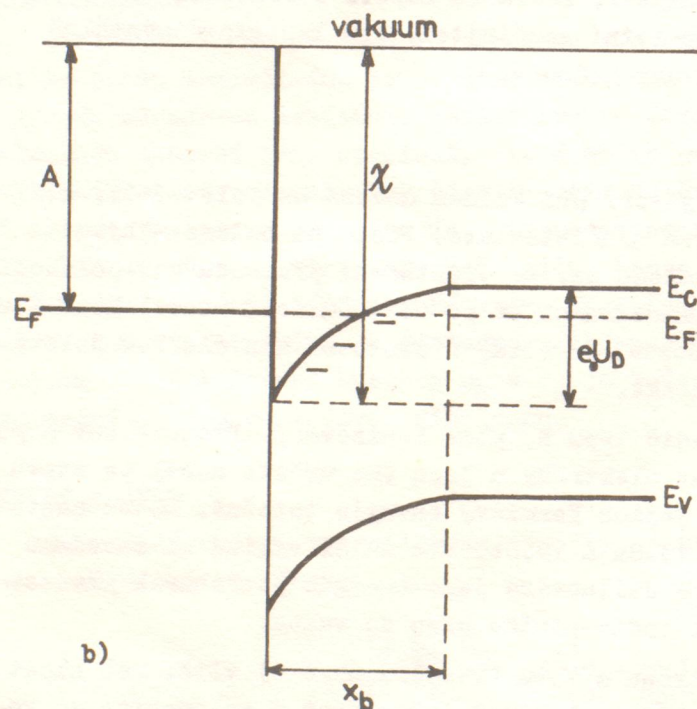
Budeme předpokládat polovodič typu N, plně ionizovaný. Protože kov a polovodič si mohou volně vyměňovat elektrony a jsou (po určité době) ve stavu termodynamické rovnováhy, jsou jejich Fermiovy energie totožné. Mohou nastat dva případy znázorněné na obr. 13.8a a 13.8b. Pro další výklad si zavedeme pojem elektronová afinita  $\chi$ . Je definována jako energie potřebná k přenesení elektronu ze spodního okraje vodivostního pásu do vakua.

Je-li výstupní práce elektronu z kovu (viz článek 6.3) větší než elektronová afinita  $\chi$ , (tj.  $A > \chi$ ), budou elektrony přecházet z polovodiče do kovu tak dlouho, až Fermiova energie v kovu i polovodiči bude stejná. Pak bude hustota elektronů uvnitř polovodiče větší než na povrchu polovodiče a na styku se vytvoří hradlová vrstva (obr. 13.8a), tj. vrstva, která bude zabránovat dalšímu přechodu elektronů do kovu. U povrchu se objeví potenciálová bariéra a proto této vrstvě říkáme hradlová vrstva. Tato vrstva bude mít podstatně větší odpor než vnitřní část polovodiče. Výška potenciálové bariéry je

$$e_0 U_D = A - (\chi + E_C - E_F).$$



Obr. 13.8a. Energiové schéma kontaktu kov-polovodič pro  $A > \chi$



Obr. 13.8b. Energiové schéma kontaktu kov-polovodič pro  $A < \chi$

Z obou teorií vyplývá, že je-li kov kladný a polovodič záporný, zmenší se potenciálový val o  $e_0 U_D$ , takže elektrony přecházejí z polovodiče do kovu. Pro hustotu proudu vychází vztah podobný vztahu pro VA charakteristiku pře-

Jestliže platí  $A < \chi$  (viz obr. 13.8b), pak budou elektrony z kovu přecházet do povrchové vrstvy polovodiče a hustota elektronů uvnitř polovodiče bude menší než na povrchu. Vytvoří se tedy antihradlová vrstva, která bude mít menší odpor než vnitřní část polovodiče a proto není zajímavá pro další studium.

U kontaktu kovu s polovodičem typu P bude situace opačná. Hradlová vrstva se vytvoří, platí-li  $A < \chi$ , a antihradlová vrstva, když platí  $A > \chi$ .

Zajímavější jevy vzniknou při studiu hradlových vrstev, na které je přiloženo napětí  $U$ . Přitom je třeba rozlišovat dva případy:

- střední volná dráha elektronu je mnohem větší než tloušťka  $x_b$  hradlové vrstvy
  - případ opačný.
- Vzhledem k tomu, že vrstva ochuzená o volné částice s nábojem má velký odpor, bude prakticky celé napětí  $U$  na hradlové vrstvě. V prvním případě popisuje chování kontaktu diodová teorie usměrňování vypracovaná Bethem v roce 1942. V druhém případě jde o difuzní teorii usměrňování, která byla vypracována Schottkym v roce 1938.

ohodu PN. Je

$$j = j_0 \left( \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right), \quad (13.29)$$

kde  $j_0$  se liší pro diodové a difuzní usměrňování. V tomto případě mluvíme o propustném směru.

Je-li přiloženo na kontakt opačné napětí, tj.  $U < 0$  V, pak mluvíme o závěrném směru. VA charakteristika kontaktu kov-polovodič je podobná VA charakteristice polovodičové diody.

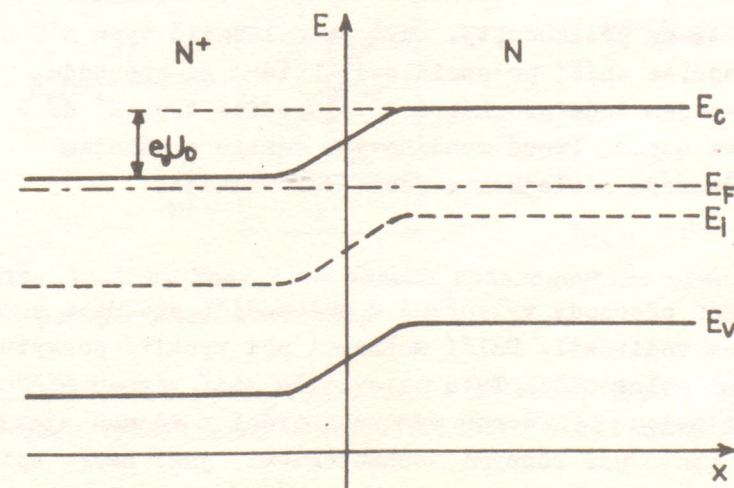
Vznik hradlové vrstvy poblíž povrchu polovodiče nesouvisí vždy s existencí různé výstupní práce elektronu z kovu a různé elektronové afinity. Často se tato vrstva vytvoří následkem nabití povrchu polovodiče elektrony, které jsou lokalizované na povrchových hladinách. Pak hodnota  $U_D$  nezávisí na tom, z jakého materiálu kovový kontakt je.

Jestliže je kovový kontakt spojen se silně dotovaným polovodičem ( $N^+$ ), může být šířka přechodu natolik malá, že elektrony mohou pronikat přímo bariérou tunelovým jevem. K tomu dojde při hustotě příměsí  $10^{25} \text{ m}^{-3}$  a větší. Pak nezáleží na kovu, který je použit. Kontakty jsou pak lineární a mají malý odpor. Někdy se jim také říká ohmické, protože pro přechodovou oblast platí Ohmův zákon. Současně jsou i neusměrňující. Zhotovují se většinou kombinací polovodič-degenerovaný polovodič-kov. Oba polovodiče však musí mít stejný typ vodivosti.

Rozdíl mezi přechodem PN a Schottkyovým kontaktem je následující. Proud u Schottkyova kontaktu je tvořen majoritními částicemi s nábojem, kdežto činnost přechodu PN je založena na injekci minoritních částic s nábojem. Tento rozdíl vede např. k tomu, že v přímém směru u Schottkyova kontaktu prochází při stejném napětí jako na přechodu PN větší proud a je menší úbytek napětí. Dále také ve značné závislosti proudu v závěrném směru na velikosti výstupní práce elektronů z kovu.

### 13.1.3. Přechody $P^+P$ , $N^+N$

Jsou tvořeny přechodem mezi polovodiči stejného typu s výrazným rozdílem hustoty volných částic s nábojem. Schematické znázornění energi-  
vých hladin tohoto přechodu je na obr. 13.9.



Obr. 13.9. Energiové schéma přechodu  $N^+N$

Schema-  
tické znázornění energi-  
vých hladin tohoto pře-  
chodu je na obr. 13.9.  
Rozdíl mezi přechodem  
 $P^+P$  a přechodem PN je  
např. v tom, že u přechodu  
 $P^+P$  neexistuje oblast  
s vysokým odporem a hustota  
majoritních částic se pozvolna  
mění. Napětí přiložené na tento  
přechod není převážně sou-  
středěno na úzkou oblast

jako u přechodu PN. Přiloženým vnějším napětím se potenciálová bariéra buď zvyšuje nebo snižuje.

Velikost potenciálové bariéry se vypočte jako v případě přechodu PN. Platí

$$U_D = -\frac{k_B T}{e_0} \ln \frac{N_{d_a}}{N_{d_b}}, \quad (13.30)$$

kde index a znamená polovodič typu  $N^+$  a index b polovodič typu N.

Je-li polovodič typu  $N^+$  připojen na kladný pól zdroje, dojde ke zvýšení potenciálové bariéry a tedy k přechodu většího počtu elektronů z polovodiče typu N do  $N^+$  než opačně. Tento jev se nijak neprojeví na změnách vlastností přechodu. Pokud jde o pohyb děr, je situace zajímavější. Protože s rostoucí hustotou elektronů klesá hustota děr (také i vzhledem ke zvýšené rekombinaci), bude v polovodiči  $N^+$  menší hustota děr než v polovodiči typu N (vytvořil se gradient) a bude tedy docházet k difuzi děr. Bude se převážně jednat o difuzní proud, protože úbytek napětí na nízkohmovém polovodiči  $N^+$  bude velmi malý. Hustotu difuzního proudu vypočítáme ze vztahu (13.22a). Děrovou složku proudu  $j_p$  vezmeme proto, že pro díry je přechod zapojen ve zpětném směru a proud jeví již pro malé hodnoty U nasycení. S použitím vztahu (12.90) dostáváme

$$j_p = -\frac{e_0 \mathcal{L}_{p_a}}{\tau_{p_a}} p_a$$

a protože  $n_p = n_i^2$  a vzhledem k předpokladům je

$$j_p = -\frac{e_0 \mathcal{L}_{p_a}}{N_{d_a} \tau_{p_a}} n_i^2. \quad (13.31)$$

Protože v polovodiči typu  $N^+$  je  $N_{d_a}$  velmi velké, bude hustota děrového proudu přes přechod velmi malá a nebude docházet prakticky k injekci děr do polovodiče typu N. Přechody tohoto typu se velmi často používají (tzv. neinjekující přechody).

Při opačné polaritě napětí na přechodu, tj. když je polovodič typu  $N^+$  připojený na záporný pól zdroje, se sníží potenciálová bariéra na přechodu. Proud majoritních částic s nábojem bude procházet z polovodiče typu  $N^+$  do N a v oblasti přechodu se zmenší odpor. Proud menšinových částic s nábojem z oblasti N se zmenšuje na přechodu následkem zvýšené rekombinace.

#### 13.1.4. Heterogenní přechody

Homogenní přechody PN jsou přechody vytvořené v polovodiči stejného chemického složení s různým typem vodivosti. Další možnosti při využití poskytují přechody mezi dvěma různými polovodiči. Tyto polovodiče mají různou šířku zakázaného pásu, různou permitivitu  $\epsilon$ , různou výstupní práci a různou elektronovou afinitu. Přechody se zhotovují různými technologiemi, jako např. epitaxním růstem (viz články 1.5.5 a 13.5.2) z plynné nebo kapalně fáze. K vytvo-

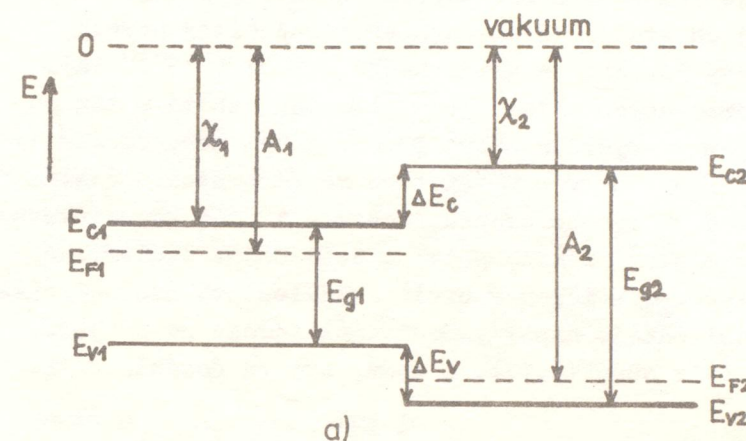
ření dobrého heterogenního přechodu z hlediska jeho fyzikálních vlastností je nutné najít dvojici polovodičových sloučenin takových parametrů, aby byla zajištěna slučitelnost jejich mechanických, krystalografických, tepelných a jiných vlastností. Nejdůležitější je spojitelnost krystalografických a elektronových struktur obou sloučenin. Je např. nutné, aby mřížkové konstanty byly stejné. Protože to prakticky nelze přesně splnit, vytváří se na styčné ploše mezi oběma polovodiči různé poruchy, které tvoří rekombinační centra nebo pastí. Z toho je tedy zřejmé, že dvojice polovodičových sloučenin, které odpovídají těmto požadavkům, je velmi málo. Jsou to např. GaAs-ALAs a Ge-GaAs.

Energiové schéma ideálního strmého přechodu heterogenního je na obr. 13.10a, b. Jedná se o přechod NP (první písmeno vždy představuje polovodič s menší šířkou zakázaného pásu). Na obr. a. je schéma přechodu v okamžiku vytvoření

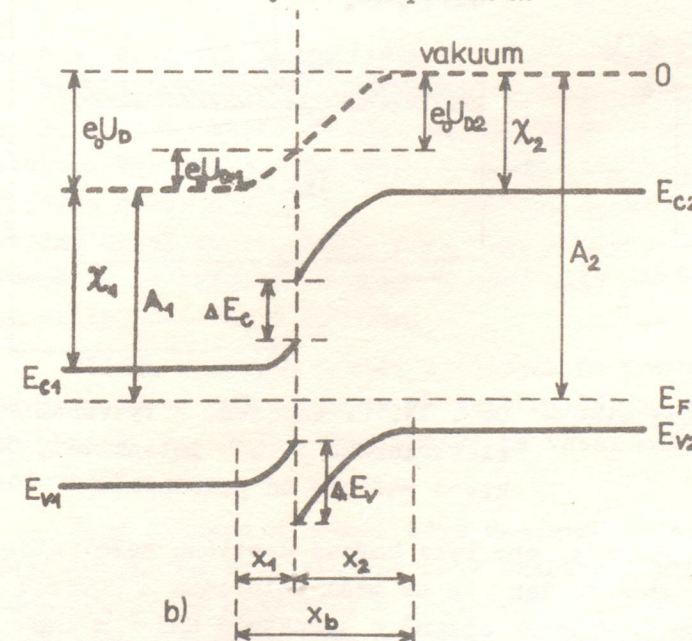
a na obr. b. po ustavení rovnovážného stavu. V případě termodynamické rovnováhy je Fermiova energie všude stejná. Rozdíly mezi vodivostními pásy se značí  $\Delta E_C$  a mezi valenčními pásy  $\Delta E_V$ .

Jak lze podrobnějším rozбором ukázat, je stejné zakřivení pásů u přechodu NP jako u přechodu PP. Přechody NN a PN mají zakřivení pásů opačné.

Na využití heterogenních přechodů je založeno několik typů polovodičových prvků, jako např. injekční lasery, vysoce citlivé fotodiody. Jejich využitím se odкрývají značné další možnosti v polovodičové elektronice.



Obr. 13.10a. Energiové schéma heterogenního přechodu NP v okamžiku vytvoření přechodu

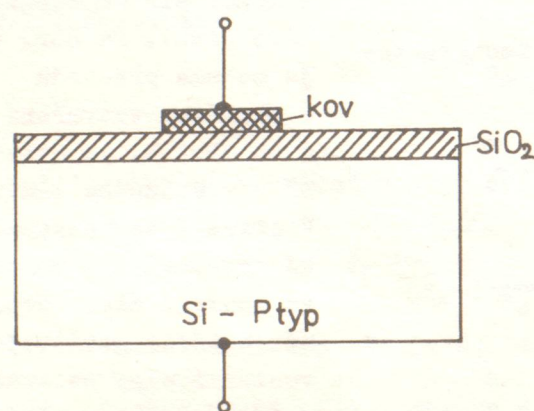


Obr. 13.10b. Energiové schéma heterogenního přechodu po vytvoření rovnováhy

Jejich využitím se odкрývají značné další možnosti v polovodičové elektronice.

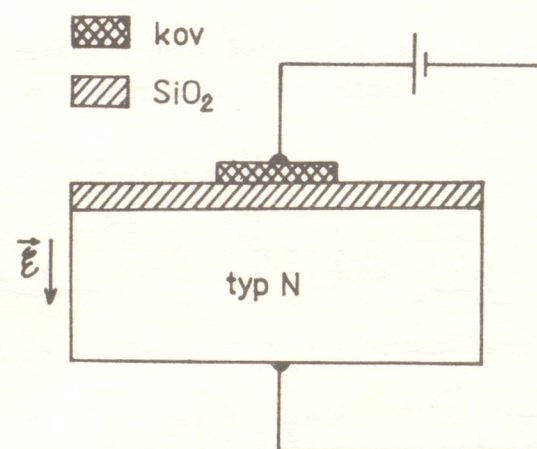
### 13.2. Vliv elektrického pole na rozložení volných částic s nábojem v polovodiči

Povrch polovodiče představuje z hlediska periodického uspořádání poruchu. Atomy na povrchu nevytvářejí úplnou kovalentní vazbu, protože nemají sobě odpovídající atomy v prostředí vně pevné látky. Tyto poruchy se v pásovém modelu projeví jako energetické hladiny v zakázaném pásu a to jako hladiny akceptorové. Nazývají se Tammovy hladiny, podle sovětského fyzika, který již v roce 1932 ukazoval na jejich existenci. Experimentálně byly zjištěny teprve nedávno, protože k jejich studiu je potřeba extrémně čistý povrch, tj. je potřeba speciální úpravy povrchů a ultravysoké vakuum ( $10^{-10}$  Pa). Povrchové vrstvy oxidů a adsorbovaných plynů jsou většinou nabitě a tak působí na volné částice s nábojem v krystalu a buď je přitahují nebo odpuzují. Tím vznikají u povrchu polovodiče vrstvy s větší nebo menší hustotou částic s nábojem než uvnitř polovodiče. Stejného efektu, dokonce i lépe reprodukovatelného, lze docílit přiložením elektrického pole na polovodič. Elektrické pole se dá vytvořit např. kovovou destičkou v určité vzdálenosti nad povrchem, která je připojena na jeden pól zdroje napětí. Druhý pól zdroje se připojí na protější konec polovodiče (viz obr. 13.11). K tomu, aby se dosáhlo velké



Obr. 13.11. Uspořádání k vytvoření elektrického pole v polovodiči

intenzity elektrického pole, je potřeba, aby byla kovová destička velmi blízko povrchu. Proto se většinou postupuje tak, že se mezi polovodič a kovovou elektrodu vloží tenké dielektrikum. Mluvíme obecně o struktuře MIS (z anglického Metal-Insulant-Semiconductor). V současné době se jako izolační vrstva nejčastěji používá u křemíku oxid křemičitý  $SiO_2$ , který se na povrchu křemíku vytvoří tepelnou oxidací při  $1200^\circ C$ . Na tuto vrstvu se pak napařuje ve vakuu kovová vrstva. V tomto případě mluvíme o struktuře MOS (Metal-Oxid-Semiconductor). Je tedy struktura MOS speciálním případem struktury MIS. Obě popsané struktury jsou vhodné i k výrobě tranzistorů řízených polem (podrobněji viz článek 13.5).



Obr. 13.12. Zapojení k vytvoření elektrického pole s intenzitou, která směřuje do polovodiče

Nyní si všimneme, jak přiložené elektrické pole ovlivňuje povrchové vlastnosti polovodiče. Jak již bylo řečeno, bude docházet ke změně vodivosti povrchové vrstvy. Všimneme si, jaké změny nastanou, když např. na polovodič typu N přiložíme elektrické pole, jehož intenzita bude směřovat do polovodiče (viz obr. 13.12). Toto pole bude přitahovat elektrony k povrchu a odpuzovat díry. Potenciální energie elektronů bude tedy u povrchu menší než uvnitř polovodiče. Energie děr je naopak u povrchu větší než v objemu. Změnám energie bude podle vztahů (11.47) a (11.48) odpovídat změněná rovnovážná hustota částic s nábojem. Platí

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right), \quad p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right).$$

Jak bylo řečeno výše, je  $E_{Cs} < E_{Cb}$ ,  $E_{Vs} < E_{Vb}$ , kde indexy s a b jsou odvozeny z počátečních písmen anglických slov surface - povrch a bulk - objem (vnitřní část). Je potřeba si uvědomit, že energetické zobrazení znázorňuje energii elektronu. Proto podle vztahů (11.47) a (11.48) je

$$\frac{n_s}{n_b} = \exp\frac{-E_{Cs} + E_{Cb}}{k_B T} > 1$$

a proto  $n_s > n_b$ . Pro díry je

$$\frac{p_s}{p_b} = \exp\frac{E_{Vs} - E_{Vb}}{k_B T} < 1$$

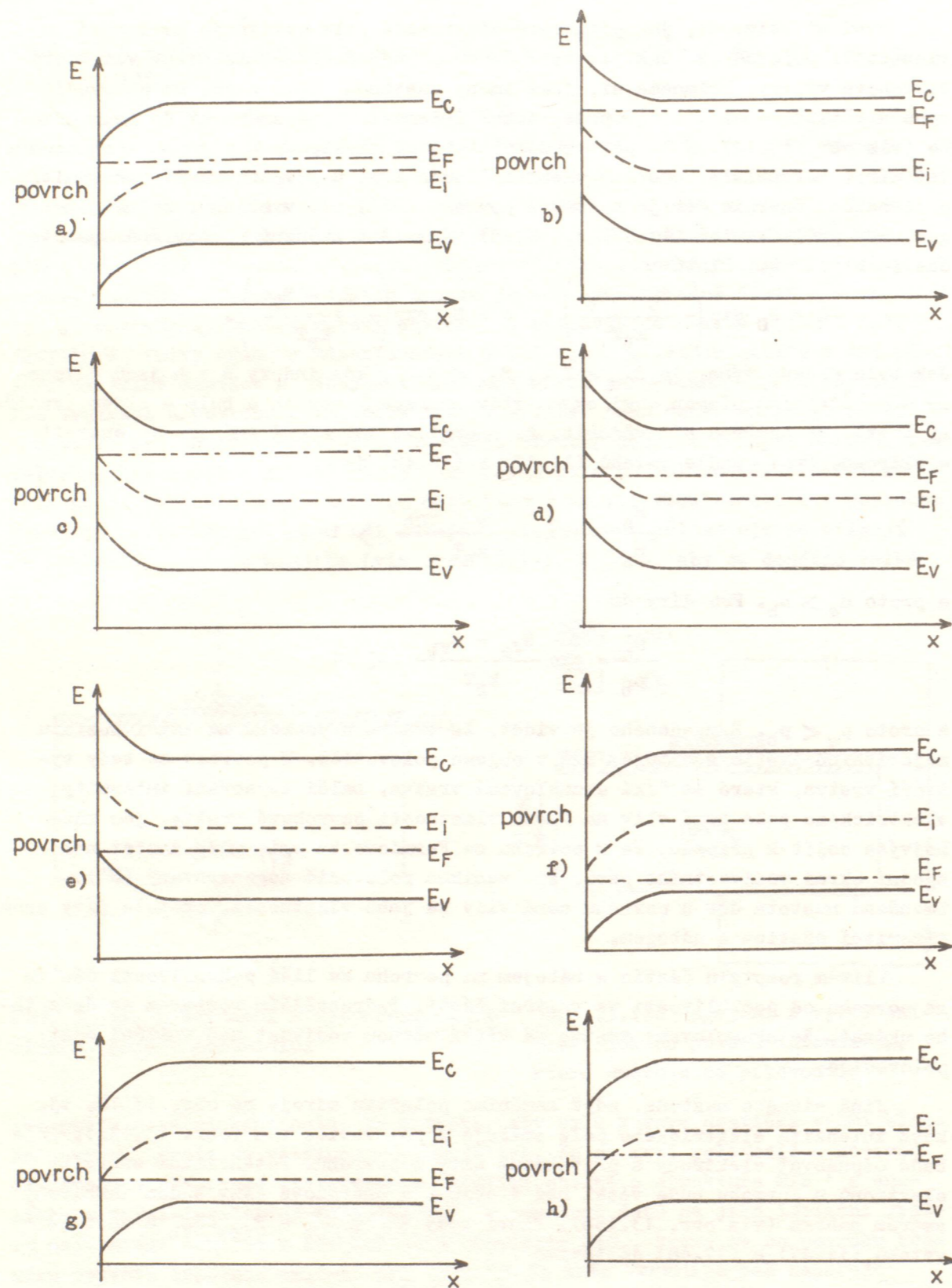
a proto  $p_s < p_b$ . Z uvedeného je vidět, že vrstva u povrchu má větší hustotu majoritních částic s nábojem než v objemu polovodiče. U povrchu se tedy vytváří vrstva, které se říká akumulovaná vrstva. Další zvyšování intenzity elektrického pole nemá vliv na změnu vlastností povrchové vrstvy, jen může nejvýše dojít k případu, že u povrchu se Fermiova energie může dostat nad spodní okraj vodivostního pásu, tj. vznikne polovodič degenerovaný ( $N^+$ ). Zmenšená hustota děr u povrchu nemá vliv na jeho vlastnosti, protože díry jsou minoritní částice s nábojem.

Vlivem rozptylu částic s nábojem na povrchu se liší pohyblivost částic na povrchu od pohyblivosti ve vnitřní části. Podrobnějším rozбором se dá z toho ukázat, že akumulovaná vrstva má větší měrnou vodivost než vnitřní část polovodiče.

Jiná situace nastane, když zaměníme polaritu zdroje na obr. 13.12, tj. když intenzita elektrického pole směřuje z polovodiče ven (obr. 13.13a). Pole bude odpuzovat elektrony a přitahovat díry k povrchu. Potenciální energie elektronů u povrchu bude větší než v objemu a energetické pásy budou zakřiveny směrem nahoru (viz obr. 13.13b). Platí tedy  $E_{Cs} > E_{Cb}$  a  $E_{Vs} > E_{Vb}$  a opět ze vztahů (11.47) a (11.48) dostáváme

$$\frac{n_s}{n_b} = \exp\frac{-E_{Cs} + E_{Cb}}{k_B T} < 1$$

a tedy  $n_s < n_b$ . Pro díry platí



Obr. 13.13. Energiové schéma kontaktu kov-polovodič pro polovodič typu N ( a - d ) a pro polovodič typu P ( e - h )

$$\frac{p_s}{p_b} = \exp \frac{E_{Vs} - E_{Vb}}{k_B T} > 1$$

a tedy  $p_s > p_b$ . V tomto případě má vrstva u povrchu menší hustotu elektronů než uvnitř a tuto vrstvu označujeme jako ochuzenou. Stále ještě platí  $n_s > p_s$ . Ochuzená vrstva bude mít sníženou měrnou vodivost. Zvyšujeme-li dále intenzitu elektrického pole, dojde k případu, že Fermiova energie u povrchu bude stejná jako hodnota  $E_i$ , tj.  $E_{Fs} = E_{is}$  (viz obr. 13.13c). Pak mluvíme o maximálně ochuzené vrstvě. Platí  $n_s = p_s$ . Vrstva se chová jako intrinzický polovodič.

Při dalším zvyšování intenzity elektrického pole převýší u povrchu polovodiče hustota děr nad hustotou elektronů, tj. platí  $n_s < p_s$ . V tomto případě je  $E_{Fs} < E_{is}$  (viz obr. 13.13d). Mluvíme o inverzní vrstvě.

Pro polovodič typu P je energiové schéma znázorněno na obr. 13.13e-h. Akumulovaná vrstva se vytvoří, bude-li intenzita elektrického pole směřovat ven z polovodiče, ostatní vrstvy tehdy, bude-li směřovat do polovodiče.

### 13.3. Polovodičové prvky bez přechodu PN

Polovodičové součástky využívají změn elektrických, magnetických, tepelných a mechanických vlastností polovodičových součástek, které jsou způsobeny nějakým vnějším činitelem jako např. tlak, teplota, magnetické pole.

#### 13.3.1. Termistor

Termistor je polovodičová součástka, u které se k činnosti využívá velké teplotní závislosti polovodičových materiálů. Název součástky pochází z anglického názvu Thermal sensitive resistor (tj. teplotně závislý odpor). Podle způsobu činnosti rozeznáváme dva druhy termistorů. Termistory, u nichž dochází ke zvětšování hustoty částic tepelným vybuzováním. Takové termistory mají záporný teplotní součinitel odporu. Označují se NTC (Negative Thermal Coefficient). Nyní byly vyrobeny i termistory s kladným teplotním součinitelem odporu. Označují se PTC (Positive Thermal Coefficient). Vyrábí se z takového materiálu, u něhož jsou v užívaném teplotním oboru příměsi ionizovány a využívá se teplotní závislosti pohyblivosti, která s rostoucí teplotou klesá. K rozptylu dochází převážně na kmitech mřížky. Tyto termistory se často vyrábějí z ferroelektrik, např.  $BaTiO_3$ .

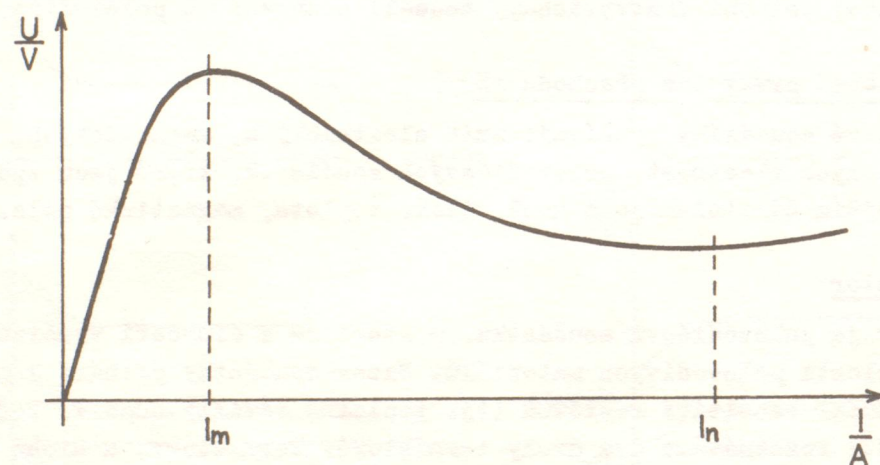
V dalším se budeme zabývat pouze termistory NTC. Nevyrábějí se z monokrystalických materiálů a proto jejich změnu odporu s teplotou nutno vyjádřit složitějším výrazem než pro monokrystaly. Pro teplotní závislost odporu platí vztah

$$R_T = R_{T_a} \exp \left[ -B \left( \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right) \right], \quad (13.32)$$

kde  $R_{T_a}$  značí odpor termistoru při teplotě  $T_a$ ,  $R_T$  odpor termistoru při požadované teplotě  $T$ ,  $B$  je konstanta, která závisí na složení a technologickém zpracování termistoru.

Termistory se vyrábějí z polykrytalického materiálu. Jedná se většinou o oxidy niklu, kobaltu, železa, manganu a titanu. Změnou složení (směsi v různém poměru) se získávají termistory s různým odporem a různým teplotním součinitelem odporu. Směs oxidů se mísí s pojídlem a pod tlakem se lisuje do požadovaných tvarů a při vysoké teplotě dojde k vzájemné difuzi jednotlivých oxidových složek a ke zpečení. Proces probíhá v ochranné atmosféře, aby se dosáhlo reprodukovatelných vlastností. Tvary termistorů jsou různé podle způsobů použití. Nejběžnější jsou termistory perličkové, tyčinkové a destičkové. Přířivody se provádí buď kovovými drátky vloženými do termistoru před vypálením nebo jsou částí termistoru po vypálení postříbřeny a k nim se pak připájejí přířivody. Je-li potřeba, jsou termistory chráněny před vlivem atmosféry skleněnou vrstvou nebo jsou vloženy do skleněných baněk.

Voltampérová charakteristika termistoru je znázorněna na obr. 13.14. Na křivce je zpočátku vidět lineární oblast odpovídající platnosti Ohmova zá-



Obr. 13.14. VA charakteristika termistoru

kona. Jouleovo teplo, které se při průchodu proudu vyvine, je tak malé, že prakticky nedochází k ohřátí termistoru. Při dalším zvýšení proudu dochází k ohřívání termistoru, jeho odpor se snižuje a tím je i úbytek napětí menší než odpovídá Ohmovu zákonu. Strmost křivky se zmenšuje. Při určitém proudu  $I_m$  dosahuje úbytek napětí maximální hodnoty a pak začne s dalším zvyšováním proudu klesat až do proudu  $I_n$ . Mezi těmito hodnotami je diferenciální odpor termistoru záporný. To je většinou i pracovní obor termistoru.

Základní využití je např. při měření event. řízení neelektrických veličin, které ovlivňují přímo či nepřímo odpor termistoru, jako při měření teploty kapalin, plynů a tuhých látek, měření rychlosti a průtokového množství kapalin nebo plynů, měření tlaku plynů, tepelného záření. Dále se používají k měření teploty na dálku i v systémech protipožární ochrany. Odpor termistoru se měří převážně v můstkovém zapojení. Při použití velmi citlivých galvanometrů je možné měřit teplotu s přesností  $5 \cdot 10^{-4}$  K, což není možné žádnými kovovými teploměry.

Schematická značka termistoru je na obr. 13.41a.

### 13.3.2. Hallovy součástky

Hallova součástka je polovodičová součástka, která využívá ke své činnosti Hallova jevu. Základní součástkou je Hallův generátor (někdy nazývaný i jako Hallova sonda). Jak bylo ukázáno v kapitole 12, prochází-li polovodičovou destičkou proud a je-li vložena do magnetického pole o indukci  $\vec{B}$ , vytvoří se na protilehlých stěnách destičky Hallovo napětí  $U_H$ . Platí vztah

$$U_H = K_1 I B$$

kde  $U_H$  je Hallovo napětí,  $I$  je proud procházející destičkou. Konstanta  $K_1$  je závislá na materiálu destičky a jejích geometrických rozměrech.

Hallovy generátory se zhotovují buď ve tvaru destiček vyříznutých z monokrystalu polovodičů s velkou pohyblivostí částic s nábojem nebo z polykrytalických destiček nebo z vrstev napařených ve vakuu na izolační podložku. Z krystalických polovodičů se nejčastěji používá InSb, InAs, HgSe, HgTe. Pro napařované generátory pak InSb a InAs.

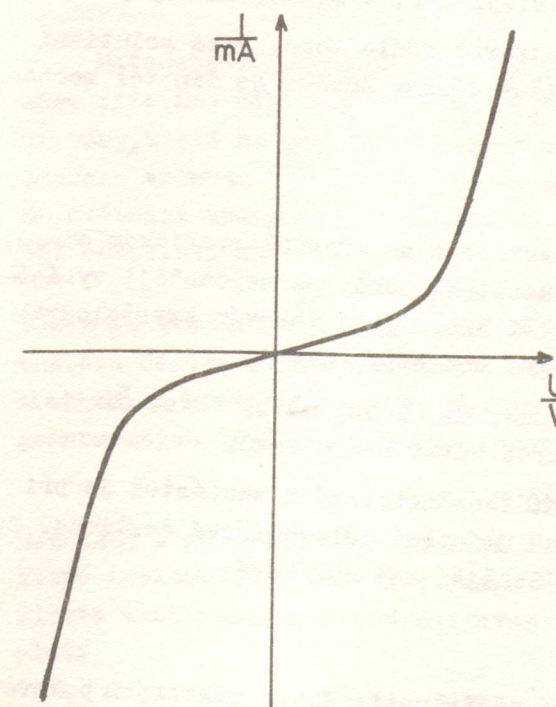
Materiál, který se používá pro Hallovy součástky, má mít co největší Hallovu konstantu a největší měrný odpor.

Nejběžnější využití Hallova generátoru je k měření magnetické indukce (jak velikosti tak i směru), to znamená k mapování magnetických polí. Dále je lze využít jako ampérmetry k měření stejnosměrných a střídavých proudů měřením jejich magnetických polí. Možné využití je také ke studiu vlastností magnetických materiálů.

Schematická značka Hallova generátoru je na obr. 13.41b.

### 13.3.3. Varistory

Na využití vlivu silného elektrického pole jsou založeny polovodičové součástky nazývané varistory. Velikost odporu varistoru závisí na přiloženém napětí na varistoru. S rostoucím napětím se odpor zmenšuje, jak je vidět z VA charakteristiky na obr. 13.15.



Obr. 13.15. VA charakteristika varistoru.

Varistory se vyrábějí z práškového karbidu křemíku SiC. Další materiály k výrobě jsou oxidy  $ZnO-TiO_2-Bi_2O_3$  nebo  $ZnO-MnO_2-Bi_2O_3$ . Prášek se smísí s pojídlem a vytvoří se polotovar ve tvaru tenkých destiček a po proběhnutí předepsaného technologického cyklu destička ztvrdne. Po opatření vývody je varistor hotov.

Nelinearity VA charakteristik se dosahují tím, že jsou u nich využívány nelineární jevy na hranicích

mezi zrna a na povrchu krystalků. Dochází přitom k těmto jevům:

1. Hranice zrn mají větší odpor než jejich vnitřní část. Protože krystalky mohou mít ostré hrany, stačí již malé napětí k tomu, aby se vyvolalo elektrické pole o velké intenzitě a tak došlo k emisi elektronů z těchto hrotů.
2. Když zvyšujeme použité napětí, zvětší se proud a průchodem přes přechod o velkém odporu vzniká teplo a dochází k zahřívání styčných ploch mezi zrna a tak dochází k dalšímu snižování odporu polovodiče.
3. Již při výrobě varistoru vznikají na hranicích zrn malé přechody PN. Pravděpodobnost, že bude přechod zapojen v propustném směru nebo v závěrném směru, je stejná. Proto je i VA charakteristika nezávislá na směru přiloženého napětí.

Nejběžněji se varistory používají jako ochranné prvky v obvodu, v němž se objevuje přepětí, i jako ochrana kontaktů vypínačů. Časté jejich užití je např. v bleskojistkách jako ochrana velmi vysokého napětí proti přepětí vzniklému atmosférickými výboji.

#### 13.3.4. Tenzoelektrické prvky

Způsobujeme-li mechanickou deformací polovodiče, dochází ke změně vzdáleností mezi atomy v krystalu. Tyto změny vzdáleností způsobují změnu v hustotě částic a jejich pohyblivosti a tím dochází ke změně měrného odporu namáhaného materiálu. U většiny polovodičů je hlavní změna hustoty atomů, protože při deformaci dochází vlivem změněných vzdáleností mezi atomy ke změně šířky zakázaného pásu. S rostoucí deformací se může šířka zakázaného pásu u některých polovodičů zmenšovat a u některých zvětšovat - může tedy docházet vlivem deformace buď ke zvětšování nebo zmenšování odporu. Součástky uzpůsobené k měření mechanických deformací se nazývají tenzometrické sondy. Změna jejich elektrického odporu se nejčastěji měří v můstkovém zapojení.

Kvalitu tenzometrických sond lze posuzovat podle toho, jaká relativní změna odporu odpovídá určité relativní změně délky. Zavádí se činitel mechanické citlivosti  $\alpha_m$  definovaný vztahem

$$\alpha_m = \frac{\Delta \rho / \rho}{\Delta l / l} .$$

Tento činitel je závislý na použitém materiálu a na krystalografickém směru, ve kterém působí deformující síla. Tenzometrické sondy se nejčastěji vyrábějí ve tvaru tenkých tyček, jejichž nejdelší hrana je v takovém krystalografickém směru, v němž  $\alpha_m$  dosahuje maximální hodnoty.

Jako materiál se nejčastěji používá Ge, Si, GaSb, InSb, PbTe. Činitel mechanické citlivosti je u nich až 100 krát větší než u kovů.

Jedno z dalších zajímavých uplatnění tenzometrických součástek je při výrobě mikrofonů. Pod membránou je vhodně umístěná polovodičová destička. Tyto polovodičové mikrofony jsou mnohem účinnější než uhlíkové.

#### 13.3.5. Fotorezistory

Ve fotorezistorech se využívá silné závislosti odporu některých polovodičů na osvětlení. Jejich činnost je založena na vnitřním fotoefektu, který

byl popsán v článku 12.8.1. Vzhledem k tomu, že aktivační energie částic s nábojem z příměsových hladin může být mnohem menší než šířka zakázaného pásu, mohou fotorezistory s příměsovou fotoelektrickou vodivostí pracovat daleko do oblasti infračerveného záření.

Když umístíme fotorezistor do obvodu se zdrojem napětí a zacloníme jej, prochází obvodem proud, který se označuje jako proud za tmy (temný proud). Při osvětlení fotorezistoru proud vzroste a mluvíme o proudu při osvětlení.

Elektrické vlastnosti fotorezistorů jsou posuzovány z jejich VA charakteristik. Při osvětlení fotorezistoru platí Ohmův zákon jen do určitého napětí. Jeho velikost závisí na materiálu polovodiče a na konstrukci fotorezistoru. Pro větší napětí dochází k odchylkám a proud roste méně než by odpovídalo Ohmovu zákonu. Od určité hodnoty napětí dochází k nasycení fotoproudu. Vysvětlení vyplývá z následující úvahy. Elektrony jsou vybuzeny světlem a pohybují se k anodě a díry se zachytí na záchytných centrech. Když intenzita elektrického pole vzroste tak, že vzdálenost, kterou proběhnou elektrony od okamžiku jejich generace až k jejich rekombinaci, je větší, než vzdálenost mezi elektrodami, bude se fotoelektrický proud snižovat o elektrony emitované z katody a potřebné na kompenzaci kladného náboje děr zachycených na záchytných centrech. Při větších napětích může dojít k tomu, že všechny elektrony emitované z katody jsou potřebné pro kompenzaci a nastává nasycení fotoproudu.

Pro praktické využití fotorezistorů má velký význam znalost frekvenční charakteristiky, protože fotoelektrické procesy, ke kterým ve fotorezistoru dochází, jeví jistou setrvačnost, tzn., že fotoproud při zaclonění neklesne ihned na hodnotu temného fotoproudu, ale až po určité době. Stejně tak nevzroste při osvětlení proud ihned na maximální hodnotu, ale také až po určité době.

Matematicky vyjádřenou závislost mezi vzrůstem a poklesem fotoproudu na čase zjistíme následující úvahou. Uvažujeme polovodič typu P. Intenzita světelné vlny, která se pohltí ve vrstvě o plošném obsahu  $1 \text{ m}^2$  a tloušťce  $dx$  je vyjádřena vztahem (10.1). Pak je za jednotku času v jednotkovém objemu pohlcena světelná energie o velikosti  $KI$ . Pro hustotu elektronů, které vzniknou při osvětlení za 1 s, platí

$$\Delta n' = \eta KI, \quad (13.33)$$

kde  $\eta$  je kvantová účinnost (viz článek 12.8.2). Vztah (13.33) představuje hustotu částic s nábojem generovaných světlem za 1 s. Předpokládáme-li, že v okamžiku osvětlení fotorezistoru je  $t = 0 \text{ s}$ , pak za  $t$  sekund je hustota generovaných částic s nábojem (např. elektronů) dána vztahem

$$\Delta n = \eta KI t . \quad (13.34)$$

Současně s generací však dochází i k rekombinaci a počet elektronů a děr, které zrekombinují za 1 s v jednotkovém objemu, je  $\Delta n / \tau_n$ , kde  $\tau_n$  je doba života elektronů. Pak pro celkovou časovou změnu hustoty částic s nábojem platí

$$\frac{d\Delta n}{dt} = \eta KI - \frac{\Delta n}{\tau_n} . \quad (13.35)$$

Řešení rovnice (13.35) je ve tvaru

$$\Delta n = \eta K I \tau_n (1 - \exp \frac{-t}{\tau_n}) .$$

Protože pro  $t = \infty$  je  $\Delta n = \Delta n_{stac}$ , lze psát

$$\Delta n = \Delta n_{stac} (1 - \exp \frac{-t}{\tau_n}) . \quad (13.36)$$

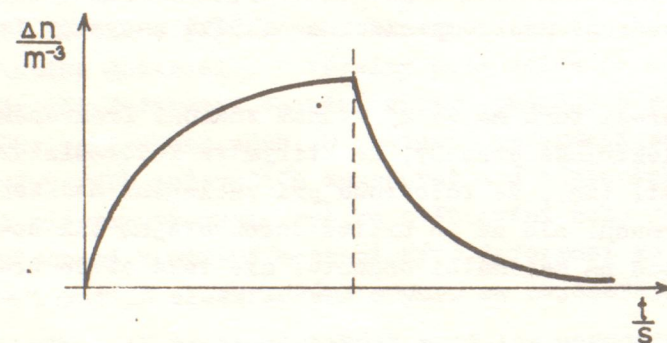
Vypneme-li osvětlení, pak pro úbytek  $\Delta n$  dostáváme rovnici

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau_n}$$

a jejím řešením je

$$\Delta n = \Delta n_{stac} \exp \frac{-t}{\tau_n} . \quad (13.37)$$

Grafické znázornění funkcí (13.36) a (13.37) se nazývá relaxační křivka (viz obr. 13.16). Protože  $\Delta n \sim j$ , platí, za předpokladu, že  $\mu$  se s osvětlením nemění, pro  $j$  podobné vztahy jako (13.36) a (13.37).



Obr. 13.16. Relaxační křivka fotorezistoru

Z uvedených vztahů je zřejmé, že bude-li na povrch fotorezistoru dopadat proměnné záření s větší frekvencí  $\nu$  než je  $1/\tau_n$ , pak maximální fotoproud bude menší než  $I_{stac}$ . Je tedy zřejmé, že pro užití fotorezistoru při proměnném osvětlení je nutná znalost relaxačních křivek.

Výběr polovodičových materiálů, ze kterých se fotorezistory zhotovují, závisí na tom, k jakým účelům se používají. Jedná se o tyto polovodiče: CdS, CdSe, CdTe, PbS, Bi<sub>2</sub>S<sub>3</sub>, SeTe, PbTe, SiC, Se, Ge, Tl<sub>2</sub>S. Velké využití má InSb, protože má úzký zakázaný pás ( $E_g = 0,17$  eV) a lze ho proto použít k detekci záření až do  $\lambda = 7,5 \mu m$ . Protože doba života nosičů je velmi krátká (řádově  $10^{-7}$  s), lze je použít pro provoz s přerušovaným světlem s kmitočtem až do několika MHz. Podobně i pro InAs.

Schematická značka fotorezistoru je na obr. 13.41c.

#### 13.4. Součástky s jedním přechodem PN

V tomto článku se budeme zabývat součástkami, které ke své činnosti využívají nelineárních jevů při vložení napětí na přechod PN, termoelektrických jevů a součástek pracujících s řízenou emisí záření vzniklého rekombinací částic s nábojem vstříkovaných přechodem PN do polovodiče.

#### 13.4.1. Polovodičové diody

##### Hrotové diody

U hrotových diod se využívá miniaturních přechodů PN, které vzniknou pod hrotovým kontaktem, který je přitlačen k polovodičové destičce. K vytvoření přechodu dojde sice již při mechanickém tlaku, ale elektrické vlastnosti nejsou dobré. Proto se proudovým impulzem vytvoří pod hrotem oblast polovodiče s opačným typem vodivosti. Tomuto procesu se říká elektrické formování hrotu. Jako kov pro drát se většinou používá wolfram a polovodičová destička má vodivost typu N. K výrobě diod se nejčastěji používá germanium dotované As nebo Sb. Podle požadovaných vlastností se volí různý měrný odpor polovodiče. Pak se systém opatří elektrodami a hermeticky uzavře nejčastěji do skleněných pouzder.

Nedokonalosti při vytváření přechodu PN způsobují, že VA charakteristika se značně liší od ideální charakteristiky přechodu PN. Při zvyšování teploty se zvyšuje hlavně proud v závěrném směru a závěrné špičkové napětí se snižuje.

Protože přechody PN jsou velmi malé, je i velmi malá jejich kapacita (viz např. vztah (13.27)), řádově 1 pF až 0,1 pF. Pak mají tyto diody i pro vysoké frekvence malou kapacitní reaktanci (kapacitanci). V běžném provedení se používají jako usměrňující (detekční diody) až do frekvencí asi 150 MHz (např. demodulace vf. signálů v radiopřijímačích a televizních přijímačích).

##### Výkonové usměrňovací diody

U germaniových diod se vychází z polovodiče typu N. Polovodič typu P se vytvoří legováním indiem. Vyrábějí se převážně slitinovou technologií (viz článek 13.5.1). Zhotovují se pro proudy do 20 A a napětí v závěrném směru do 250 V. Úbytek napětí na diodě je v porovnání s podobnými diodami křemíkovými poloviční. Mají však aspoň o řád větší proudy v závěrném směru.

V současné době se téměř výhradně používají křemíkové diody. U křemíkových diod se používá difuzní technologie (viz též článek 13.5.1.). Používá se křemík vodivosti typu N. Polovodič typu P se vytvoří difuzí bóru. U většiny typů (tj. pro větší usměrňované proudy) se destička typu N, která je na jedné straně pocínována, připájí na měděnou desku, která současně slouží k odvodu tepla. Na druhou stranu destičky, tj. na polovodič typu P, se připájí přívodní měděný drát. Celý systém se uloží do pouzdra, odkud se vyčerpá vzduch nebo se naplní suchým vzduchem a pouzdro se hermeticky uzavře. Někdy se usměrňovací systém chrání silikonovým kaučukem.

Speciální úpravou křemíkových diod lze získat křemíkové lavinové diody. Ke své činnosti využívají lavinového průrazu (viz článek 13.1.1), který však nemá destruktivní účinky. Na rozdíl od běžných diod je zde zajištěno, aby nemohly vznikat místní průrazy přechodu PN. Závěrný proud tedy prochází celou plochou přechodu PN. Diodou mohou procházet velké proudy v závěrném směru, protože teplo při tom vznikající se snadno odvádí. Pokud se nepřekročí maximální ztrátový výkon, mohou tyto diody pracovat i při napětí větším než je napětí průrazné.



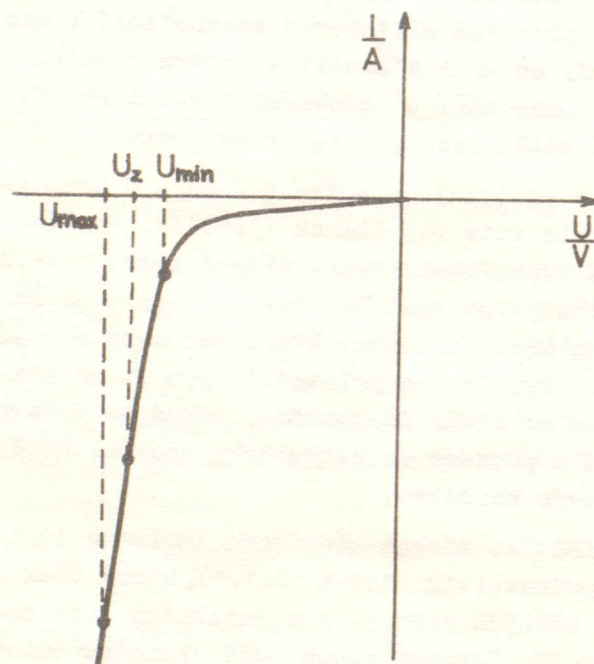
Křemíkové diody mohou pracovat až do teplot  $150^{\circ}\text{C}$ . Při použití materiálu s ještě větší šířkou zakázaného pásu by mohly takové diody pracovat ještě při vyšších teplotách. Jestliže se použil karbid křemíku  $\text{SiC}$ , diody mohly pracovat až do teplot  $500^{\circ}\text{C}$ . Dosáhlo se proudové hustoty až  $90 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}$  a závěrné proudy při 20 V byly 1 mA.

Z dalších polovodičových usměrňovačů, v současné době téměř nepoužívaných, je potřeba připomenout usměrňovače, které se souhrnně označují jako polykrystalické polovodičové usměrňovače. Patří sem usměrňovače selenové a kuproxové ( $\text{Cu}_2\text{O}$ ). Princip činnosti u obou těchto typů usměrňovačů je založen opět na činnosti přechodu PN, který se při používaných technologiích výroby vytvoří. Jejich hlavní nevýhodou (hlavně selenových) je, že se jejich elektrické parametry mění s časem (proces stárnutí). Selenové usměrňovače se používaly k usměrňování střídavých napětí. Byly prakticky vytlačeny germaniovými a křemíkovými diodami. Kuproxové usměrňovače pro své stálé parametry a dobré usměrňovací vlastnosti při malých napětích se používaly např. k usměrňování střídavých proudů a napětí v deprezských měřicích přístrojích.

Schematická značka polovodičové diody je na obr. 13.41d. Písmena nejsou součástí značky.

### 13.4.2. Stabilizační diody

Stabilizační diody se dříve označovaly jako Zenerovy diody. V současné době se k jejich výrobě používá výhradně křemík. V propustném směru se stabilizační dioda chová stejně jako usměrňovací dioda, tj. má stejnou VA charakteristiku. V závěrném směru až do určité hodnoty napětí prochází stabilizační diodou (stejně jako i usměrňovací diodou) malý závěrný proud (VA charakteristika opět stejná).



Obr. 13.17. Závěrná část VA charakteristiky stabilizační diody

asi do 5 V, pro větší napětí se uplatňuje lavinový průraz.

Od určité hodnoty napětí dochází k tomu, že se odpor diody změní z hodnot řádově  $10^7 \Omega$  až  $10^9 \Omega$  na hodnoty řádově  $1 \Omega$  až  $10 \Omega$  a diodou začne procházet značný proud. Při tom se napětí na diodě mění velmi nepatrně. Je to zřejmé i ze závěrné části VA charakteristiky (viz obr. 13.17).

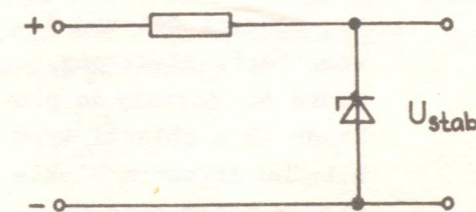
Činnost stabilizačních diod je založena na Zenerově jevu nebo lavinovém průrazu přechodu (viz článek 13.1.1). K Zenerově průrazu dochází pro diody se stabilizačním napětím

Hlavní charakteristikou stabilizačních diod je stabilizační napětí  $U_z$ . Je definováno jako střední hodnota maximálního a minimálního napětí v pracovním režimu diody. Z teorie vyplývá, že průrazné napětí přechodu závisí na hustotě volných částic s nábojem a tedy na měrném odporu použitého polovodiče. Pro diody s malým stabilizačním napětím se používá křemík s velkou měrnou vodivostí a pro větší napětí s menší měrnou vodivostí.

Výroba stabilizačních diod je podobná jako výroba usměrňovacích diod, je však přísnější výběr na polovodičový materiál z hlediska jeho měrného odporu. Po výrobě se diody třídí do napěťových skupin podle velikosti stabilizačního napětí s tolerancí  $\pm 0,5 \text{ V}$ .

Dalším důležitým parametrem je diferenciální odpor. Je roven převrácené hodnotě směrnice charakteristiky v pracovní oblasti. Čím je diferenciální odpor menší, tím je dioda kvalitnější.

Stabilizační diody dělíme podle způsobu užití na napěťové regulační diody a na napěťové referenční diody. Hlavní využití stabilizačních diod je ke stabilizaci napětí. Nejjednodušší zapojení ke stabilizaci napětí je na obr. 13.18. Lepších výsledků se dosáhne se stabilizátory, kde se stabilizačních diod využívá např. k řízení tranzistorů.



Obr. 13.18. Jednoduché zapojení ke stabilizaci stejnosměrného napětí

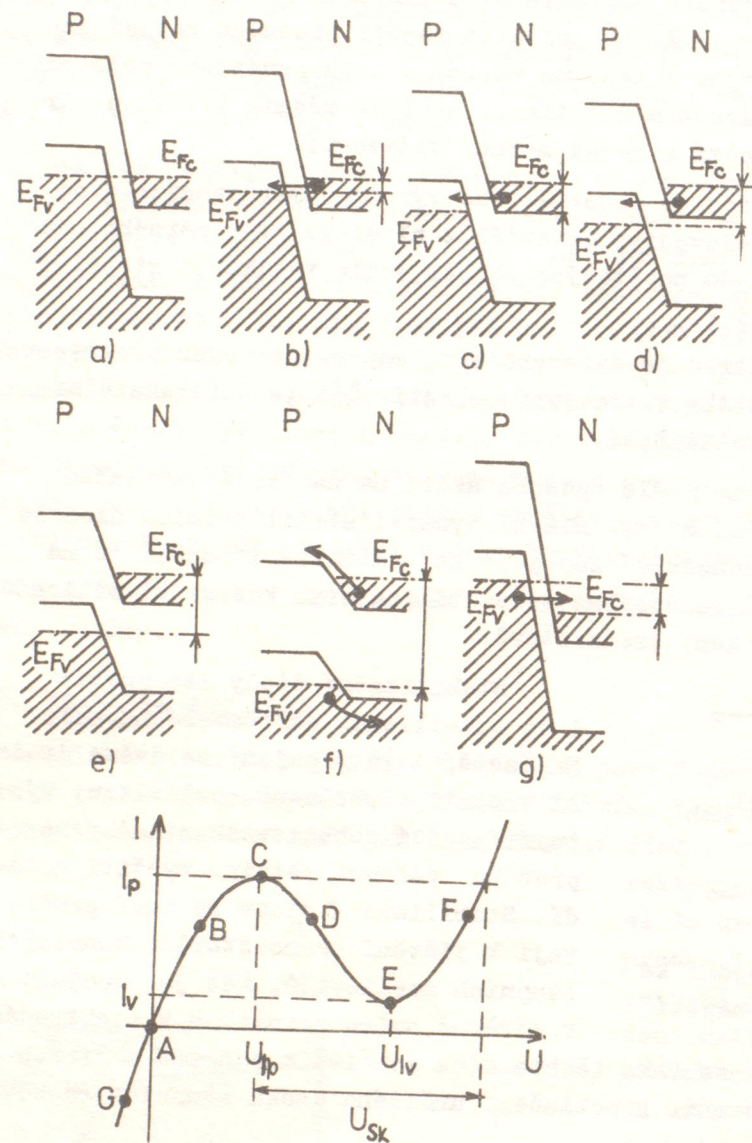
kolektor, emitor. S výhodou se také těchto diod používá k ochraně měřicích přístrojů proti přetížení event. k potlačení určitého úseku stupnice ručkového měřicího přístroje.

Schematická značka stabilizační diody je na obr. 13.41e. Písmena nejsou součástí schematické značky.

### 13.4.3. Tunelové a inverzní diody

U běžných polovodičových diod se k jejich činnosti využívá difuzních proudů. U tunelových diod i inverzních diod se využívá i proudů, které jsou vytvořeny částicemi s nábojem, které se přes přechod PN dostávají tunelovým efektem. Někdy se tunelové diody nazývají podle svého objevitele Esakiovy diody. K výrobě se používá materiál s velkou měrnou vodivostí (hustota příměsí  $10^{24} \text{ m}^{-3}$  až  $10^{26} \text{ m}^{-3}$ ) a speciální technologií se zajistí, aby šířka přechodu byla velmi malá. Může tedy dojít k tomu, že v rovnovážném stavu bude část valenčního pásu v polovodiči typu P nezaplňená a část vodivostního pásu v polovodiči typu N zaplněná (viz obr. 13.19a). Princip činnosti lze objasnit na obr. 13.19. Na obr. a - g je energiové schéma příslušného přechodu

du a ve spodní části je VA charakteristika tunelové diody.



Obr. 13.19. Energiové schéma tunelové diody.

nů z oblasti N do oblasti P. Stejně tak budou z valenčního pásu polovodiče typu P tunelovat elektrony do vodivostního pásu polovodiče typu N. Oba proudy však budou stejně velké a přes přechod tedy neprochází žádný výsledný proud.

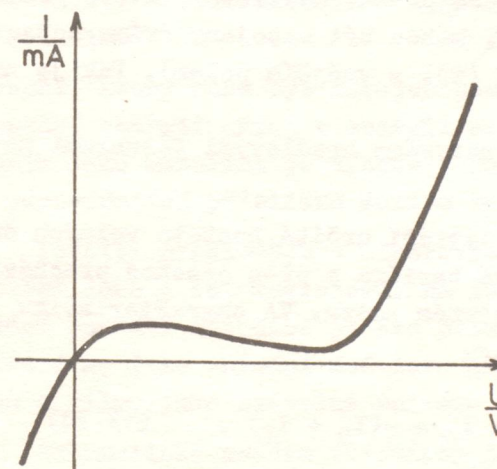
Přiložíme-li na přechod PN malé napětí v propustném směru, zaplní se spodní část vodivostního pásu polovodiče typu N ještě více elektrony než v případě a) a zmenší se zaplnění valenčního pásu polovodiče typu P. Začne tedy převládat proud elektronů z vodivostního pásu polovodiče typu N do valenčního pásu polovodiče typu P (tunelový jev) nad proudem elektronů z valenčního pásu polovodiče typu P do vodivostního pásu polovodiče typu N, protože přiložené elektrické pole bude podporovat pohyb elektronů zprava doleva (viz obr. b). Proud diodou se začne zvětšovat (tunelový proud). Na charakteristice to odpovídá bodu B. Proud se bude s rostoucím napětím na přechodu zvyšovat

Velikost difuzního napětí je závislá na poměru hustot majoritních a minoritních částic. Proto při velkém poměru je  $U_D$  velké a sklon energiových pásů značný. Tím dojde ke zmenšení šířky zakázaného pásu v oblasti přechodu.

Není-li na přechod přiloženo žádné napětí, existuje v polovodiči pouze difuzní napětí  $U_D$  (bod A na charakteristice a obr. a). Volné částice s nábojem budou přes přechod procházet pouze tunelovým jevem. Např. elektrony, které se dostaly do přechodu PN z oblasti typu N, budou difuzním elektrickým polem brzděny a budou se pohybovat zpět do polovodiče typu N. Určitý počet elektronů se však dostane tunelovým jevem přes zakázaný pás na energiovou hladinu ve valenčním pásu. Dochází k vytvoření tunelového proudu elektro-

až do bodu C, kde bude maximální. Je to případ, kdy proud elektronů zleva doprava bude nulový (viz obr. c). Při dalším zvyšování napětí se energiové pásy posunou tak, že se hustota hladin ve valenčním pásu polovodiče typu P, na které mohou tunelovat elektrony z vodivostního pásu polovodiče typu N, začne zmenšovat (obr. d). Tím začne docházet k poklesu tunelového proudu (bod D charakteristiky). Na charakteristice je to oblast záporného diferenciálního odporu. Při určitém napětí na diodě v propustném směru tunelový proud zaniká (obr. e). Na charakteristice to odpovídá bodu E. Proud, který zde prochází, je tvořen difuzním proudem. Při dalším zvyšování napětí na přechodu je veškerý proud diodou dán jen difuzním proudem (bod F na charakteristice a obr. f v pásovém schématu). Tato část charakteristiky odpovídá charakteristice usměrňovací diody. Přesně vzato, proud diodou za bodem E na charakteristice je tvořen kromě difuzního proudu i tunelovým proudem vzniklým tunelováním elektronů z vodivostního pásu polovodiče typu N na příměsové hladiny v zakázaném pásu polovodiče typu P. Tento proud je však značně menší než proud difuzní.

Je-li dioda připojena v závěrném směru, vytvoří se v přechodu elektrické pole, které podporuje tunelování elektronů z valenčního pásu polovodiče typu P do vodivostního pásu polovodiče typu N a celkový proud diodou poroste (viz bod G na charakteristice a obr. g). Vodivost tunelové diody v závěrném směru je velká.



Obr. 13.20. VA charakteristika inverzní diody

Změnou v dotaci příměsí v obou oblastech lze změnit tvar VA charakteristiky. Lze dosáhnout i tvaru znázorněného na obr. 13.20. Proud v závěrném směru je zde mnohem větší než proud v propustném směru. Takové diody se pak nazývají inverzní diody.

K výrobě tunelových diod se používá Ge, Si a GaAs. Tunelové diody se využívají hlavně u zesilovačů a v oscilátorech. Lze je však použít i u rychlých logických a paměťových obvodů.

Schematická značka tunelové diody je na obr. 13.41f, inverzní diody na obr. 13.41g. Písmena nejsou součástí schematické značky.

#### 13.4.4. Varikap a varaktory

Při výkladu přechodu PN jsme si ukázali, že má určitou kapacitu, která je závislá na přiloženém napětí na přechodu v závěrném směru. Této napěťové závislosti kapacity se využívá u součástek nazývaných často kapacitní diody nebo varikap nebo varaktory. Varikap pracuje jako kondenzátor, jehož kapacita se mění se změnou stejnosměrného napětí na varikapu. Ke změně kapacity varaktoru dochází střídavým signálem. Často se mezi pojmy varikap a varaktor

nerozlišuje a pro obě součástky se používá název varikap.

Název vznikl z anglického VARIABLE CAPACITOR.

V článku 13.1. jsme si ukázali, že závislost kapacity na napětí může být různá a závisí na druhu přechodu.

Varikapy se používají např. při samočinném dolaďování kmitočtů vysokofrekvenčních obvodů nebo pro plynulé ladění rezonančních obvodů v přijímačích VKV a televizních přijímačích.

Pro výrobu kapacitních diod se používá Ge, Si, GaAs, SiC.

Schematická značka kapacitní diody je na obr. 13.41h.

### 13.4.5. Fotodiody

Při výkladu přechodu PN jsme si vysvětlili, že se v přechodu vytváří difuzní elektrické napětí  $U_D$ . Osvětíme-li přechod PN světlem vhodné vlnové délky, vytvoří se v přechodu pár elektron-díra. Tyto volné částice s nábojem se vlivem difuzního napětí na přechodu pohybují tak, že elektrony se pohybují do polovodiče typu N a díry do polovodiče typu P. Tím se vytváří v okolí přechodu oblasti prostorového náboje a tím i další elektrické pole. Vzniklé napětí má velikost  $U_F$ . Tento efekt se nazývá hradlový fotoefekt. Elektrické pole vzniklé osvětlením, je tvořeno volnými částicemi s nábojem a proto při uzavření elektrického obvodu prochází obvodem proud. Součástky, které pracují na uvedeném jevu, se nazývají fotodiody. Mohou být zapojeny dvěma způsoby:

1. Do elektrického obvodu v závěrném směru (tj. s vnějším polem). Pak je nazýváme odporovými fotodiodami.
2. Bez vnějšího elektrického pole. Pak je nazýváme hradlovými fotonkami nebo fotodiodami.

V prvním případě se změnou osvětlení vytváří určitá hustota volných částic s nábojem a tím se snižuje potenciálová bariéra a přes přechod prochází proud. Tím se snižuje odpor přechodu v závěrném směru. VA charakteristiku lze vyjádřit pro odporové fotodiody ve tvaru

$$I = I_0 \left( \exp \frac{e_0 U}{k_B T} - 1 \right) - I_L = -(I_D + I_L), \quad (13.38)$$

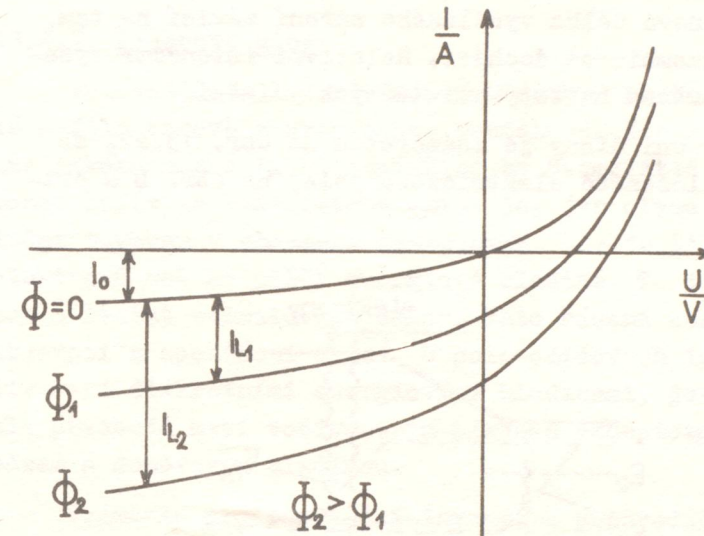
kde  $I_0$  je zbytkový proud přechodu PN,  $I_D$  proud diodou za tmy a  $I_L$  proud způsobený volnými částicemi s nábojem, které jsou vybuzeny dopadajícím světlem.

Na obr. 13.21 jsou takové VA charakteristiky pro různá osvětlení. Pro  $I_L = 0$  A ( $\phi = 0$  lm,  $\phi$  znamená světelný tok) jde o charakteristiku usměrňovací diody. Při zvětšování osvětlení se charakteristiky v závěrné části posouvají směrem dolů o příslušnou hodnotu  $I_L$ . Protože při režimu odporové fotodiody je dioda zapojena v závěrném směru, je  $U < 0$  V a  $I < 0$  A a tedy části charakteristik ve 3. kvadrantu odpovídají pracovnímu režimu odporové fotodiody. Pracuje-li fotodioda jako hradlová, je  $U > 0$  V a  $I < 0$  A (proud prochází ve vnější části od polovodiče typu P k N), odpovídají tomuto režimu části charakteristik ve 4. kvadrantu. Průsečíky VA charakteristiky s osou I odpovídají chodu nakrátko, tj. určují zkratový proud, průsečíky s osou napětí určují chod naprázdno - tj. elektromotorické napětí. Jeho velikost lze určit z rovnice

ce (13.38) pro  $I = 0$  A. Platí

$$U_F = -\frac{k_B T}{e_0} \left[ \ln \frac{I_L}{I_0} - 1 \right].$$

Jako fotodioda může sloužit každá plošná dioda, která je zhotovena z vhodného polovodiče a vhodnou konstrukcí je zajištěn dopad světla na přechod PN nebo do jeho blízkosti. Jako materiálu se k výrobě fotodiody používá převážně Ge, Si, InSb a InAs. Sloučeniny InSb a InAs se používají pro detektory infračerveného záření. Germaniové fotodiody se užívají převážně jako odporové fotodiody. Křemíkové fotodiody se staly velmi důležité jako hradlové fotodiody v kosmickém výzkumu. Z jednotlivých hradlových fotodiody lze seriovým a paralelním řazením jednotlivých fotodiody získat



Obr. 13.21. VA charakteristika fotodiody pro různá osvětlení

agregát, který může být zdrojem dostatečné energie. Agregát, který přeměňuje sluneční energii přímo v energii elektrickou, se nazývá sluneční baterie. Křemík jako materiál je výhodný proto, že jeho citlivost je největší v oblasti odpovídající přibližně maximu spektra slunečního světla.

Použití hradlových a odporových fotodiody při modulovaném světle závisí podobně jako u fotorezistorů, na jejich frekvenčních charakteristikách. Základní použití fotodiody je pro přeměnu světelné energie na elektrickou. Používají se i ke snímání modulovaného světla, např. při snímání zvukového záznamu z filmu, jako světelné snimače v měřicí a regulační technice.

Schematická značka fotodiody je na obr. 13.41i.

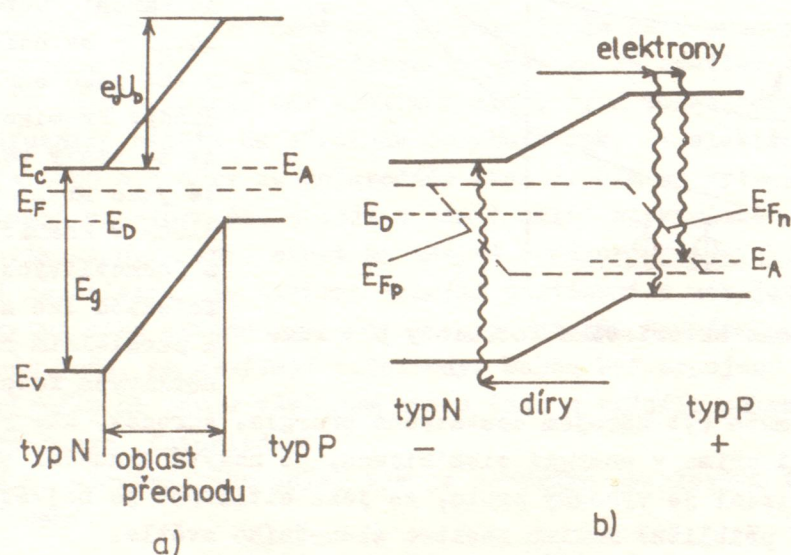
### 13.4.6. Luminiscenční diody

Činnost luminiscenčních diody je založena na vlastnostech přechodu PN. Při výkladu činnosti přechodu PN jsme si ukázali, že při zapojení přechodu v propustném směru dochází k injekci minoritních částic s nábojem tj. elektronů z polovodiče typu N přes přechod do polovodiče typu P a děr z polovodiče typu P přes přechod do polovodiče typu N. Hloubka, do které pronikají elektrony a díry za přechod, je dána difuzní délkou  $\mathcal{L}_n$  a  $\mathcal{L}_p$ . Díry a elektrony v této oblasti rekombinují s majoritními částicemi s nábojem. K této rekombinaci dochází buď v přechodu PN nebo v jeho blízkosti. Při rekombinaci elektronu s dírou se uvolňuje energie. U některých polovodičů se tato energie předá mřížce a to znamená, že se zvyšuje její teplota. Rekombinace se pak nazývá rekombinace nezářivá a příslušný přechod v energiovém schématu

se nazývá také přechod nezářivý.

U některých polovodičů jako např. GaAs, GaP, InSb, InAs, SiC, ZnS dochází k tomu, že se energie uvolněná při rekombinaci přemění v energii světelnou. Přitom může docházet k rekombinaci elektronu a díry přímo nebo prostřednictvím rekombinačních center. Při rekombinaci se tedy uvolní foton o energii  $h\nu$ . Takové přechody se nazývají přechody zářivé a o rekombinaci říkáme, že je to zářivá rekombinace. Vlnová délka vysílaného záření závisí na tom, na které energiové hladině k rekombinaci dochází. Relativní intenzita vyzařovaného světla se může řídit změnou hustoty příslušných příměsí.

Energiové schéma luminiscenční diody je znázorněno na obr. 13.22. Na obr. a je pásové schéma bez přiloženého elektrického pole, na obr. b s při-



Obr. 13.22a. Energiové schéma luminiscenční diody bez přiloženého elektrického pole

b. Energiové schéma luminiscenční diody s přiloženým elektrickým polem v propustném směru

loženým elektrickým polem v propustném směru. Elektrony a díry vlivem elektrického pole postupují proti sobě a rekombinují po obou stranách přechodu. Experimentálně se zjistilo, že zářivá rekombinace je účinnější v polovodiči typu P a prakticky nevzniká v oblasti přechodu (vzhledem k hustotě elektronů a děr ve vnějších částech se vlastně jedná o ochuzenou oblast). Je-li  $E_g > 1,8$  eV, může dioda vyzařovat viditelné světlo. Pokud nemůže vyzařovat viditelné světlo přímo, může se pokrýt část fotodiody vhodným luminoforem (viz kapitola 14).

Luminiscenční diody se vyrábějí z GaAs. Jejich záření je však v infračervené oblasti spektra. V oblasti viditelného světla se jedná o diody z GaP nebo  $\text{GaAs}_{1-x}\text{P}_x$ .

Vzhledem k tomu, že u luminiscenčních diod se nejedná o řízenou emisi, dochází ke spontánnímu vyzařování. Diody se používají ke konstrukci displejů

nebo paměti. Perspektivní využití je v těch oblastech, kde je nutné odstranit zpětnou vazbu mezi výstupem a vstupem. Elektrický signál na vstupu vybudí luminiscenční diodu a její záření je detekováno fotodiodou a na výstupním rezistoru se objeví signál úměrný vstupnímu signálu.

Schematická značka luminiscenční diody je na obr. 13.41j.

#### 13.4.7. Laserové diody

Polovodičové lasery jsou součástky, které vyzařují řízené monochromatické světlo časově i prostorově soufázové. Název vznikl z počátečních písmen anglického názvu Light Amplifier by Stimulated Emission of Radiation. Aby mohlo dojít ke stimulované emisi je, jak plyne z teorie, potřeba tzv. populační inverze v obsazení energiových hladin, tj. na vyšší hladině bude více elektronů než na nižší energiové hladině. To je nutná podmínka pro to, aby mohla nastat stimulovaná emise. Tato řízená emise musí tedy převládat nad absorpcí a spontánní emisí. U polovodičových laserů se využívá přechodů nikoliv mezi diskrétními energiovými hladinami, jako např. u rubínových laserů, ale přechodů mezi vodivostním pásem a akceptorovou hladinou nebo valenčním pásem a donorovou hladinou.

Podmínka pro populační inverzi u polovodičových laserů je [2]

$$E_{F_n} - E_{F_p} \geq h\nu, \quad (13.39)$$

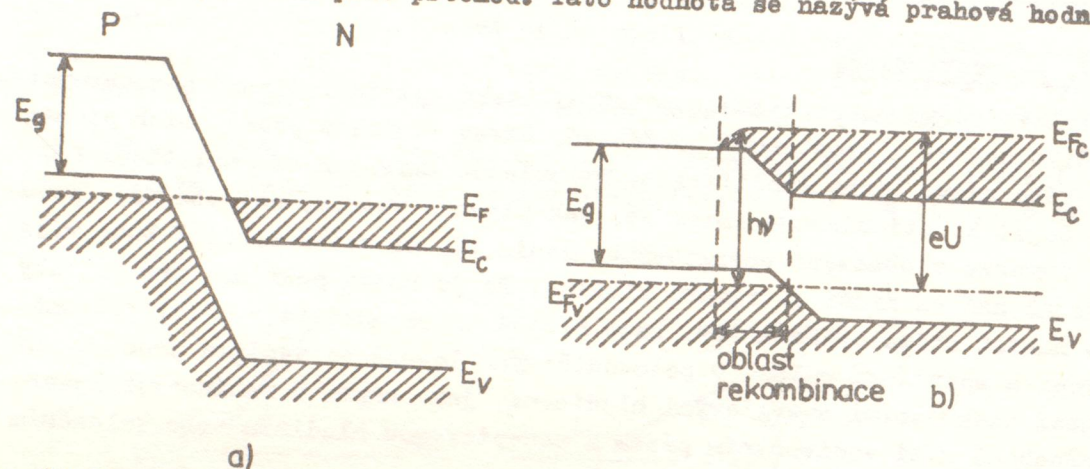
kde  $E_{F_n}$  a  $E_{F_p}$  jsou zdánlivé Fermiovy energie. U homogenních laserů se populační inverze dosahuje vybuzením elektronů buď užitím světla o vhodné vlnové délce (opticky) nebo lavinovým násobením částic s nábojem. U polovodičových laserů s přechodem PN se populační inverze dosahuje injekcí minoritních částic s nábojem.

Zde se nebudeme zabývat popisem celého zařízení k činnosti polovodičového laseru, ale jen způsobem, jakým se u tohoto laseru dosahuje populační inverze.

Ze vztahů pro Fermiovy zdánlivé energie je vidět, že čím bude  $E_{F_n}$  větší, tím bude větší hustota volných elektronů a čím bude nižší  $E_{F_p}$ , tím bude větší hustota děr. Čili obráceně, ke splnění rovnice (13.39) je potřeba, aby  $E_{F_n}$  bylo co největší a  $E_{F_p}$  co nejmenší, čili, aby ve vodivostním pásmu byla velká hustota elektronů a ve valenčním pásmu velká hustota děr. To lze splnit, když bude docházet k velké injekci minoritních částic s nábojem.

Laserové diody mohou pracovat na stejném principu jako luminiscenční diody. Dvě protější stěny krystalu jsou opticky vyleštěny, aby se vytvořil Fabryův-Perotův rezonátor. Energiové schéma polovodičové diody je na obr. 13.23. Na obr. 13.23a je energiové schéma bez připojeného vnějšího napětí a na obr. 13.23b energiové schéma s připojeným napětím v propustném směru. Energiové schéma je velmi podobné schématu tunelové diody, u které je vhodnou dotací příměsí v polovodiči typu P a N zajištěno, aby u její VA charakteristiky nebyl záporný diferenciální odpor. Při zapojení diody v propustném směru dojde k přechodu elektronů z polovodiče typu N do polovodiče typu P a děr obráceně.

Přítom dochází k rekombinaci elektronů a děr (jako u luminiscenční diody) a ke vzniku záření. Při malých proudech je toto záření spontánní, pro velké proudy procházející přes přechod (injekce) začne převládat stimulovaná emise. Proto se těmto laserům často také říká injekční lasery. Ke vzniku stimulované emise (větší než spontánní) je potřeba alespoň jisté minimální hustoty proudu, který prochází přes přechod. Tato hodnota se nazývá prahová hodnota



Obr. 13.23a. Energiové schéma polovodičové diody bez připojeného napětí  
b. Energiové schéma polovodičové diody s přiloženým napětím v propustném směru

hustoty proudu. Závisí na vlastnostech volných částic s nábojem a kvantové účinnosti a na geometrii krystalu. Značně také závisí na teplotě. U diody z GaAs je prahová hustota proudu při 4,2 K (helium)  $700 \text{ A.cm}^{-2}$  a při 77 K (kapalný dusík)  $10^4 \text{ A.cm}^{-2}$ . Pro konkrétní diodu jsou to proudy 6 A a 90 A, které musí procházet přes přechod, aby došlo ke stimulované emisi. Při pokojových teplotách je prahový proud natolik velký, že v diodě nastává ohřátí přechodu a tím se opět zvýší prahová hodnota atd. To znamená, že většina diod za pokojové teploty nedává stimulovanou emisi.

Přehled polovodičových materiálů vhodných k použití jako injekční lasery je v tabulce 13.1.

Materiál	Prahová hodnota $\text{A.cm}^{-2}$	Energie fotonů eV	$\lambda$ $\mu\text{m}$	Způsob vybuzení
InP	$5,8 \cdot 10^3$	1,37	0,90	vstříkávání
$\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$	$3 \cdot 10^4$	1,5	0,82	vstříkávání
$\text{InP}_x\text{As}_{1-x}$	$10^4$	0,77	3,1	vstříkávání
InSb	$1,4 \cdot 10^3$	0,23	5,2	vstříkávání

Tab.13.1. Přehled materiálů k použití jako injekčních laserů

### 13.5. Prvky s dvěma přechody

Do této skupiny jsou zařazeny bipolární a unipolární tranzistory. Objev tranzistoru způsobil obrovský převrat v elektronice a tranzistor se stal základem součástkou většiny polovodičových prvků a to jak diskretních tak i jako součást integrovaných obvodů.

Princip tranzistoru objevili v roce 1948 američtí fyzikové Bardeen, Brattain a Shockley. Za tento objev jim byla v roce 1956 udělena Nobelova cena.

#### 13.5.1. Bipolární tranzistor

Bipolární tranzistor se v praxi často nazývá jen tranzistor. Jeho název pochází z anglických slov TRANSfer rezISTOR. Tranzistory se nazývají bipolární proto, že se na jejich činnosti podílejí oba druhy částic s nábojem, tj. elektrony a díry.

Vzhledem k tomu, že součástka obsahuje dva přechody PN, rozlišujeme tranzistor typu PNP nebo NPN. Jednotlivé oblasti s různým typem vodivosti jsou opatřeny ohmickými kontakty, ke kterým jsou připojeny elektrody ve formě tenkých drátků. Polovodiče daného typu spolu s příslušnou elektrodou se nazývají emitor (E), báze (B) a kolektor (C). Emitor a kolektor jsou stejného typu vodivosti, báze má opačný typ vodivosti než emitor a kolektor. Tranzistor má přechod emitorový (přechod, který obsahuje emitor) a přechod kolektorový (obsahuje kolektor). Protože každý u obou přechodů může být zapojen buď v propustném směru nebo ve směru závěrném, jsou možná čtyři zapojení (teoreticky).

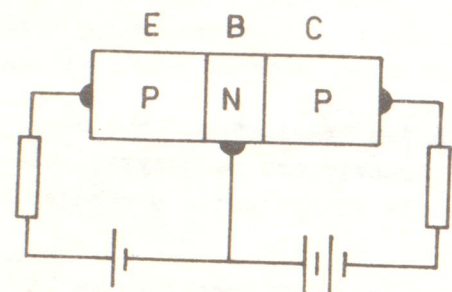
1. Oba přechody jsou zapojeny v závěrném směru. Tranzistorem pak prochází velmi malý proud tvořený zbytkovým proudem. Tento proud se dá jen velmi málo ovlivňovat napětím na emitorovém přechodu. Z hlediska praktického využití nemá toto zapojení význam.
2. Oba přechody jsou zapojeny v propustném směru. Pak prochází tranzistorem velký proud. Změnou napětí lze sice jeho velikost ovlivňovat, ale ani toto zapojení nemá praktický význam.
3. Přechod emitorový je zapojen v závěrném směru a přechod kolektorový v propustném směru. Tranzistor pracuje v inverzním zapojení. Toto zapojení se používá vyjimečně a proto se jím zde nebudeme zabývat.
4. Přechod emitorový je zapojen v propustném směru a přechod kolektorový v závěrném směru. Toto je vlastní režim tranzistoru.

Emitorový přechod většinou tvoří vstup, kolektorový přechod výstup tranzistoru.

Protože tranzistor obsahuje tři elektrody a k zapojení vstupního a výstupního obvodu jsou zapotřebí čtyři elektrody, bude při zapojení tranzistoru jedna elektroda společná. Mluvíme o zapojení se společnou bází, zapojení se společným emitorem a zapojení se společným kolektorem.

Je zřejmé, že princip činnosti obou typů tranzistorů, tj. PNP i NPN je stejný, liší se jen v polaritě připojených zdrojů. Většinovými částicemi s nábojem jsou v polovodiči typu P díry a v polovodiči typu N elektrony. Podstatou činnosti obou typů tranzistorů je řízené vstříkávání menšinových částic s nábojem do oblasti báze. Princip činnosti si vysvětlíme na typu PNP a na zapojení se společnou bází (viz obr. 13.24). Přechod emitorový je zapojen v propustném směru a proto dochází k injekci děr přes přechod do polovodiče typu N. Díry jsou zde minoritními a proto některé rekombinují s elektrony ( $I_C < I_E$ ) a některé se dostanou až ke kolektorovému přechodu. Ten je zapojen v závěr-

ném směru. To je však směr propustný pro minoritní částice s nábojem a proto se díry dostanou přes kolektorový přechod. Tím se zvýší v oblasti kolektorového přechodu hustota volných částic s nábojem a tedy sníží odpor a kolektorovým obvodem prochází větší proud. Je tedy zřejmé, že změna proudu emitorového  $\Delta I_E$  bude větší než změna proudu kolektorového  $\Delta I_C$ . Proto nedojde v tomto zapojení k zesílení proudu. Základním parametrem, který popisuje činnost tranzistoru, je proudový zesilovací činitel  $\alpha$ . Je pro toto zapojení definován

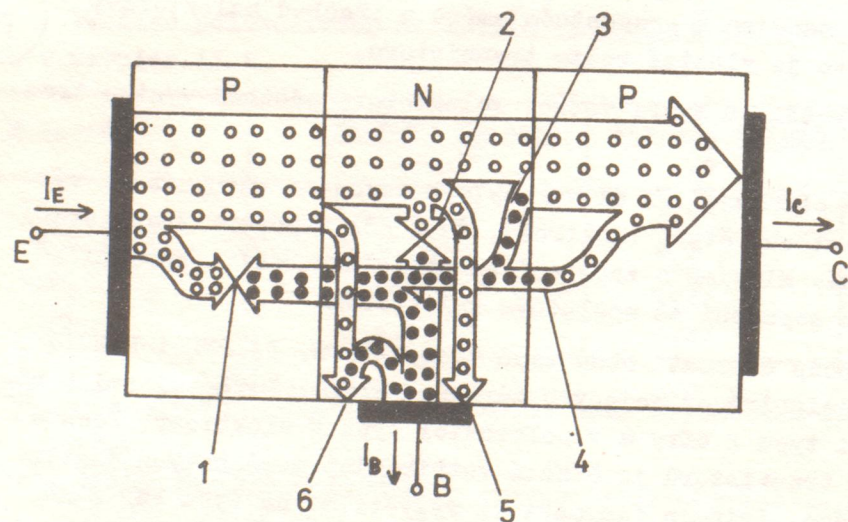


Obr. 13.24. Schematické zapojení tranzistoru PNP se společnou bází

$$\alpha = \left( \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E} \right)_{U_{CB} = \text{konst.}} \quad (13.40)$$

Jak vyplývá z předchozího výkladu, je  $\alpha < 1$ . Protože díry, které v bázi zrekombinují, jsou pro další činnost tranzistoru "ztracené", je snahou výrobců zajistit, aby rekombinací bylo co nejméně. Při výrobě tranzistorů se báze vyrábí co nejtenší, aby se díry nacházely v bázi co nejkratší dobu. Tím se snižuje pravděpodobnost "setkání" díry s elektronem, tj. pravděpodobnost rekombinace. Dále se báze volí s malou měrnou vodivostí, tzn. s malou hustotou elektronů. Protože počet rekombinací je úměrný jak  $n$  tak  $i$ , bude při malém  $n$  snížena pravděpodobnost rekombinace. Při rekombinaci dojde současně k úbytku elektronů v bázi, tj. k porušení elektrické neutrality báze. K obnovení rovnováhy se z emitorového zdroje pohybují elektrony do oblasti báze. Konvenční směr proudu je z báze ven. Tomuto proudu říkáme proud báze nebo bázevý proud. Je tedy zřejmé, že platí

$$I_E = I_B + I_C \quad (13.41)$$



Obr. 13.25. Schematické znázornění dějů v tranzistoru

(6) a na elektrodě báze (5). Dále dochází k tepelné generaci elektronů a děr

(4). Z obr. je také vidět, že celkový proud je tvořen složkou elektronovou i děrovou. Bude tedy platit

$$I_E = I_{E_p} + I_{E_n} \quad (13.42)$$

$$I_C = I_{C_p} + I_{C_n} \quad (13.43)$$

Dosadíme-li z rovnic (13.41), (13.42) a (13.43) do (13.40), dostáváme

$$\alpha = \frac{\Delta I_{C_p} + \Delta I_{C_n}}{\Delta I_{E_p} + \Delta I_{E_n}} = \frac{\Delta I_{C_p} + \Delta I_{C_n}}{\Delta I_{E_p} + \Delta I_{E_n}} \frac{\Delta I_{E_p}}{\Delta I_{E_p}} = \frac{\Delta I_{E_p} \Delta I_{C_p}}{(\Delta I_{E_p} + \Delta I_{E_n}) \Delta I_{E_p}} \left( 1 + \frac{\Delta I_{C_n}}{\Delta I_{C_p}} \right) = \gamma_E \alpha_p \alpha_c \quad (13.44)$$

Výraz

$$\gamma_E = \frac{\Delta I_{E_p}}{\Delta I_{E_p} + \Delta I_{E_n}} \quad (13.45)$$

se nazývá injekční účinnost emitoru. Protože, jak je vidět z obr. 13.25, přenos proudu tranzistorem je v podstatě zprostředkován dírami, představuje  $\gamma_E$  přímo relativní velikost této složky. K dobré činnosti tranzistoru je potřeba, aby  $\gamma_E$  se co nejvíce blížilo jedné, tj., aby bylo  $\Delta I_{E_n}$  minimální. To lze splnit v případě asymetrického přechodu, kdy bude měrná vodivost typu P mnohem větší než typu N. Výraz

$$\alpha_p = \frac{\Delta I_{C_p}}{\Delta I_{E_p}} \quad (13.46)$$

udává, jaká část proudu děr vycházejících z emitoru se dostane do kolektoru. Jak je vidět z obr. 13.25, nedojdou všechny díry z emitoru ke kolektoru, protože bude docházet k rekombinaci děr s elektrony procházejícími od kolektoru i s elektrony z kontaktu i povrchu báze.  $\alpha_p$  se nazývá bázevý přenosový činitel. Výraz

$$\alpha_c = \left( 1 + \frac{\Delta I_{C_n}}{\Delta I_{C_p}} \right) = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_{C_p}} \quad (13.47)$$

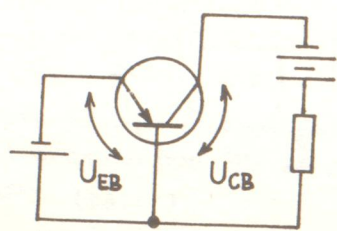
vyjadřuje poměr přírůstku celkového proudu kolektorem k přírůstku jeho děrové složky. Nazývá se kolektorovým proudovým zesilovacím činitelem. Protože, jak již bylo řečeno, je  $\Delta I_{C_p} \gg \Delta I_{C_n}$ , je  $\alpha_c \approx 1$ .

Není-li mezi bází a emitor připojeno napětí, prochází kolektorovým přechodem proud  $I_C$ , který se nazývá zbytkovým proudem. Je tvořen minoritními částicemi s nábojem v kolektorovém přechodu.

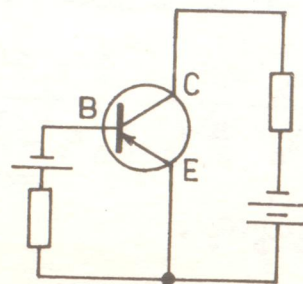
Nyní si vysvětlíme, proč tranzistor zesiluje napěťově. Napěťové zesílení budeme definovat jako

$$A_u = \frac{U_{CB}}{U_{EB}}, \quad (13.48)$$

kde  $U_{CB}$  je napětí mezi bází a kolektorem a  $U_{EB}$  napětí mezi bází a emitorem. Schema zapojení tranzistoru je na obr. 13.26. Z VA charakteristiky přechodu PN je vidět, že stačí malá změna napětí  $U_{EB}$  řádově desetiny voltů, aby došlo



Obr. 13.26. Schema zapojení tranzistoru se společnou bází



Obr. 13.27. Zapojení tranzistoru se společným emitorem

k velké změně proudu  $I_E$  procházejícího přes přechod. Protože  $I_C < I_E$ , ale  $I_C \approx I_E$ , bude téměř stejný proud procházet i kolektorem. Kolektorový přechod je však zapojen v závěrném směru a jeho odpor je proto značně větší než odpor emitorového přechodu zapojeného v propustném směru. Proto

bude i napětí  $U_{CB}$  značně větší než  $U_{BE}$ , tj.  $A_u > 1$ . Protože  $\alpha \approx 1$  a  $A_u > 1$ , zesiluje tranzistor v zapojení se společnou bází i výkon.

Nejběžnější zapojení tranzistoru je však zapojení se společným emitorem. Zapojení je zřejmé z obr. 13.27. Je vidět, že v tomto případě je vstupním proudem proud  $I_B$ . Ten je vzhledem k rovnici (13.41) a vzhledem k tomu, že  $I_C \approx I_E$ , velmi malý. Proudový zesilovací činitel je pro toto zapojení definován

$$\beta = \left( \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \right)_{U_{CE} = \text{konst.}} \quad (13.49)$$

Protože  $I_C \gg I_B$ , je i  $\Delta I_C \gg \Delta I_B$  a tedy je proudový zesilovací činitel značně větší než jedna. Dále platí (vzhledem k rovnici (13.41))

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{\frac{\Delta I_C}{\Delta I_E}}{\frac{\Delta I_E - \Delta I_C}{\Delta I_E}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (13.50)$$

Protože  $\alpha \approx 1$ , plyne i z rovnice (13.50), že  $\beta \gg 1$ . U běžně vyráběných tranzistorů je  $\beta$  několik set až tisíc.

Dále si povšimneme napěťového zesílení. Je definováno jako

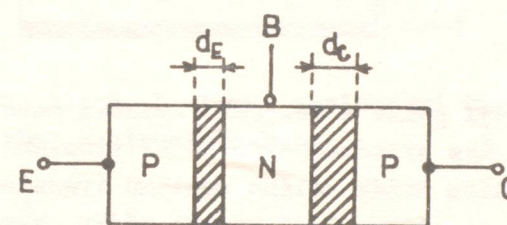
$$A_u = \frac{U_{CE}}{U_{BE}}$$

Malá změna napětí ( $\sim 0,1$  V) v emitorovém obvodu stačí, aby vyvolala velké změny proudu v kolektorovém obvodu. Platí  $I_B \ll I_E \approx I_C$ . Dále víme, že v kolektorovém obvodu je v tomto zapojení přechod emitorový v propustném směru a přechod kolektorový v závěrném směru a odpor tranzistoru je tedy dán souč-

tem jejich odporů. Protože však odpor kolektorového přechodu je značně větší než emitorového, nemusíme odpor emitorového přechodu v dalším uvažovat. Vzhledem k tomu bude  $U_{CE} \gg U_{CB}$  a  $A_u \gg 1$ . Současně také dochází k výkonovému zesílení. Tranzistor v zapojení se společným emitorem tedy zesiluje proud, napětí i výkon.

Podobné úvahy platí i pro tranzistor typu NPN, jen je potřeba v uvedených výrazech zaměnit vzájemně elektronové a děrové složky proudu.

Je potřeba si také uvědomit, že emitorový přechod je zapojen v propustném směru a šířka přechodu je tedy malá. I tato část má však stále větší odpor než je odpor vnější části emitoru i báze a proto prakticky celé napětí přivedené na emitorový přechod bude soustředěno na přechodu PN. Dále kolektorový přechod je zapojen v závěrném směru a proto bude jeho odpor velký. Šířka přechodu se také zvětší. Bude tedy tím spíše větší než vnější části polovodiče typu N a P. Proto bude prakticky celé napětí přiložené na kolektorový přechod na přechodu PN. Situaci znázorňuje obr. 13.28. Vyšrafované části jsou



Obr. 13.28. Schematické vyznačení oblastí přechodu

oblasti přechodu. V nevyšrafovaných částech je prakticky intenzita elektrického pole rovna nule. Díry injektované do báze se bází pohybují jen vlivem difuze. Takové tranzistory se nazývají tranzistory s homogenní bází nebo bezdriftové tranzistory. Lze však vhodným nehomogenním rozložením příměsí v bází v ní vytvořit elektrické pole, jehož intenzita má takový směr, že bude minoritní částice s nábojem

urychlovat. Tranzistory se pak nazývají tranzistory s nehomogenní bází nebo tranzistory driftové.

Schematická značka tranzistoru PNP i NPN je na obr. 13.41k. Písmena ani nápis nejsou součástí značky.

### 13.5.2. Technologie výroby tranzistorů

Bezdriftové tranzistory se vyrábějí slitinovou technologií. Postupuje se tak, že se na základní destičce polovodiče typu P nebo N na protilehlých stranách destičky nanese kapka In nebo slitiny Pb-Sb. Takto připravený polotovar se vloží do pece s vodíkovou atmosférou a při teplotě tání se v místech příměsí vytvoří tavenina Ge-In nebo Ge-Pb-Sb. Po ochlazení dochází k rekrytalizaci a Ge se opět zabuduje do krystalické mřížky spolu s In jako substituční poruchou. Podobně pro slitinu Ge-Pb-Sb. Tím se vytvoří emitor a kolektor a současně dva přechody PN. Přechody musí ležet blízko sebe, aby se dosáhlo malé tloušťky báze.

Slitinové tranzistory se vyrábějí pouze z Ge, protože u Si se ukázala tato technologie jako zcela nevhodná.

Slitinové tranzistory mají velkou kapacitu kolektorového přechodu, velké elektrické pole v oblasti kolektorového přechodu a velkou účinnost emitoru.

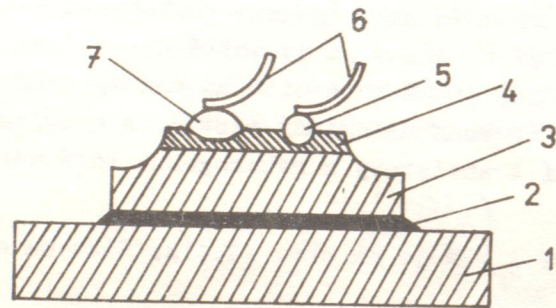
Vytvoření elektrického pole v bázi driftových tranzistorů lze dosáhnout různým způsobem. Nejjednodušší způsob vytvoření nerovnoměrného rozložení příměsí je difuze příměsí ze strany emitoru nebo kolektoru.

#### Difundované tranzistory

Vyrábějí se dvojitou difuzí. Využívá se toho, že např. u Si jsou difuzní konstanty trojmocných prvků mnohonásobně větší než u pětimoocných. Křemíková destička vodivosti typu N se podrobí dvojí difuzi Al a Sb. Po určité době difuze pronikne hliník hlouběji než antimon, takže se vytvoří od povrchu dovnitř struktura - polovodič typu N- (příměs Sb), polovodič typu P- (příměs Al) a polovodič typu N- (základní destička). Přívod k bázi (typ P) je hliníkovým drátkem, který se propájí horní vrstvou typu N až dojde k vytvoření ohmického kontaktu s bází. Přitom však hliníkový drát vytvoří s emitorovou vrstvou typu N polovodič typu P a vytvoří se přechod PN, který izoluje přívod báze od emitoru. K emitoru a kolektoru se připojí ohmické kontakty a elektrody. Tato technologie je velmi náročná.

#### Difuzně slitinové tranzistory

Difuzně slitinové tranzistory se vyrábějí pouze z Ge. Jako výchozí materiál se používá destička polovodiče typu P. Řez systémem difuzně slitinového tranzistoru je na obr. 13.29. Jako 1 je označen držák celého systému tranzistoru, 2 je vrstva pájky, kterou je připájena základní destička typu P. Tato destička (3) tvoří kolektor. Do ní se nadifunduje antimon a vytvoří se oblast báze (4).



Obr. 13.29. Řez systémem difuzně slitinového tranzistoru

Na tuto vrstvu vodivosti typu N se umístí kulička ze slitiny Bi-Ga-Sb, která bude tvořit emitor (5) a kulička ze slitiny Sn-As pro vytvoření ohmického kontaktu k vrstvě typu N (7), která tvoří bázi tranzistoru. Pak proběhne za zvýšené teploty slitinový proces a tím se vytvoří celý systém tranzistoru. Báze a emitor se opatří kovovými vývody (6).

Výhodou těchto tranzistorů je malý emitorový odpor, velká hustota emitorového proudu, velké průrazné napětí kolektoru, malá kapacita kolektoru a malý zbytkový proud  $I_{CO}$ . Nevýhodou je nerovinný přechod emitoru a velký odpor kolektoru.

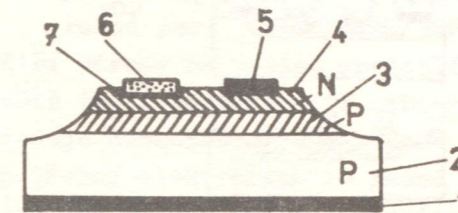
#### Epitaxní a planární tranzistory

Podstatou epitaxe je vytváření (růst) vrstvy na polovodivé podložce se zachováním její krystalografické orientace. K růstu dochází postupným usazováním atomů polovodiče, které se uvolňují z plynných sloučenin, na povrch podložky. Do proudu reagenčních plynů se přimíchávají dotační prvky, takže

se dá libovolně měnit v průběhu epitaxe jak typ vodivosti tak i hustota příměsí.

Nedostatkem difuzních tranzistorů je velký odpor kolektoru. Jeho zmenšení změnou měrného odporu oblasti kolektoru způsobí snížení průrazného napětí a zvýšení kapacity kolektorového přechodu. Tyto nedostatky se dají odstranit vytvořením dvou vrstev v blízkosti kolektoru a to jedné s velkým měrným odporem a jedné s malým měrným odporem.

Struktura typu mesa i postup při výrobě je zřejmý z obr. 13.30. Na základní destičce původního polovodivého materiálu s malým odporem (destička 2)



Obr. 13.30. Epitaxní a planární tranzistor - struktura mesa

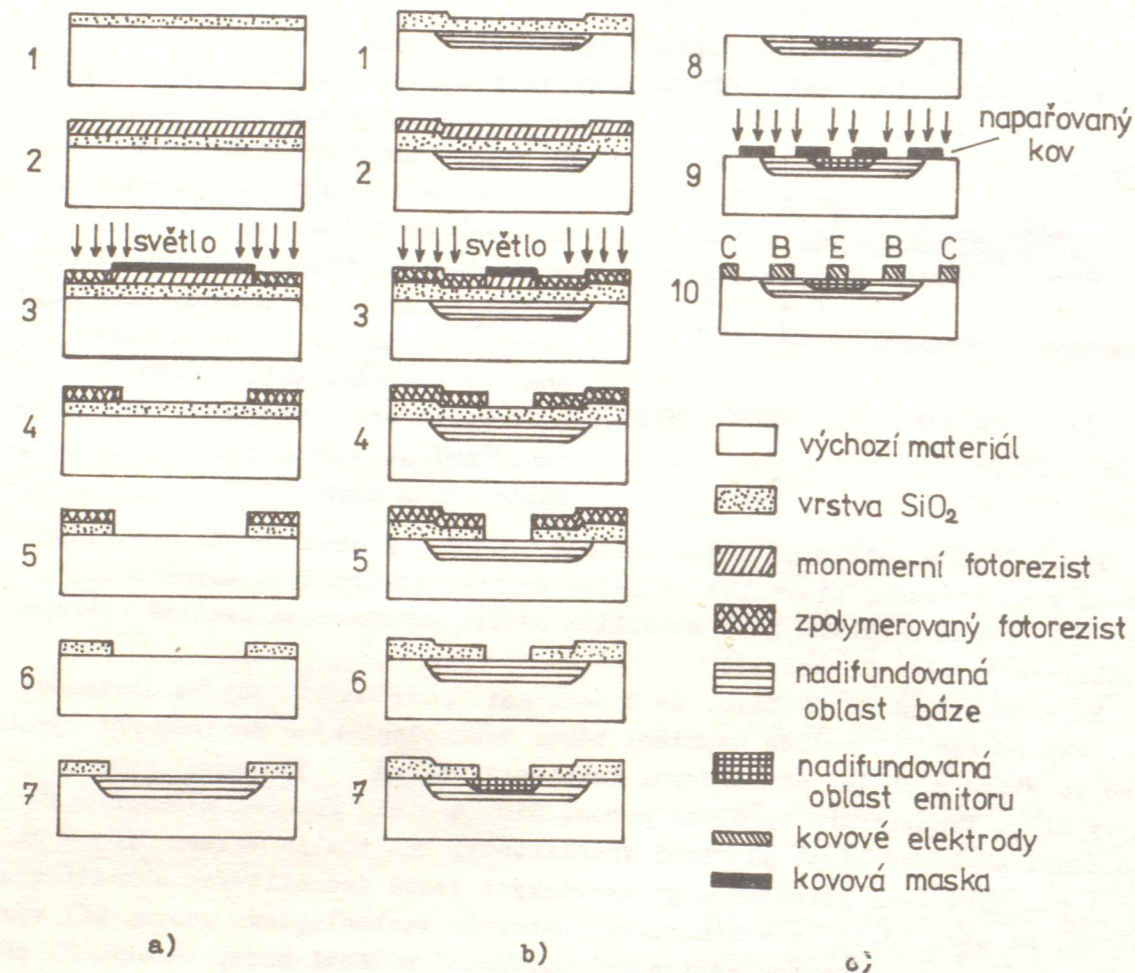
je epitaxním růstem vytvořena epitaxní monokrystalická vrstva téhož typu polovodiče s velkým měrným odporem (3). Pak se difuzní nebo slitinovou technologií vytvoří potřebná struktura tranzistoru, tj. nadifundovaná oblast báze (4), ohmický přívod k bázi (5), ohmický přívod k emitoru (6), rekrytalizovaná oblast emitoru (7). Po zapouzdření je vytvořen epitaxní tranzistor typu mesa.

Původní název planárních tranzistorů vznikl z geometrického uspořádání přívodů k elektrodám, které leží v jedné rovině. Snahou bylo zmenšit  $I_{CO}$ . Tento malý proud a hlavně jeho stabilita závisí převážně na kvalitě povrchu a stabilizaci jeho vlastností.

Experimentálně se ukázalo, že k pasivaci povrchu je potřeba dosáhnout toho, aby povrch polovodiče nepřišel během technologických procesů při výrobě vůbec do styku s okolní atmosférou. Tato pasivace se dá dosáhnout pomocí vrstvy  $SiO_2$ . Tranzistory vyráběné pomocí  $SiO_2$  dostaly pro své geometrické uspořádání elektrod název planární tranzistory. Při tom je vrstva  $SiO_2$  využívána i pro vytvoření potřebných geometrických tvarů jednotlivých oblastí tranzistoru. Na obr. 13.31 je schematicky znázorněn technologický postup při výrobě. Na obr. a. je znázorněn postup při vytváření oblastí báze, na obr. b. při vytváření oblastí emitoru a na obr. c. zhotovení kovových elektrod. K výrobě se používá tzv. fotolitografické metody (používá se i při výrobě integrovaných obvodů). Jako výchozí materiál se použije destička křemíku typu N s měrným odporem asi  $1\Omega\text{cm}$ . Žiháním se vytvoří vrstvička oxidu křemíku (1), potom se speciálním lakem, který je citlivý na světlo (fotorezist), pokryje  $SiO_2$  (2), osvětlí se přes vhodně upravené masky (3), vhodným rozpouštědlem se odstraní neosvětlená místa fotorezistu (neopolymerizovaného) (4). Pak se povrch leptá leptadlem, které naleptává  $SiO_2$ , ale nepůsobí na neopolymerizovaný fotorezist (5), odstraní se fotorezist (6) a do obnažené části křemíkové destičky se nadifunduje bór (7). Tím se vytvoří oblast typu P, která tvoří bázi. Po difuzi bóru se povrch opět pokryje  $SiO_2$  a podobným způsobem se vytvoří oblast emitoru s tím, že se difunduje fosfor a vytvoří se polovodič typu N. Pak se opět oleptá  $SiO_2$  (8) a přes kovovou masku se provede napaření kovových elektrod (9). Tím se vytvoří celý systém tranzistoru (10). Masky k napařování kovu se vy-



tvoří litograficky v  $\text{SiO}_2$ , což je výhodné pro to, že povrch křemíku je chráněn před vlivem atmosféry. Tyto tranzistory jsou nejstabilnější ze všech tranzistorů. Mají malý rozptyl parametrů. Výhodou této technologie je, že se výhodně na jedné destičce vyrábí stovky tranzistorů současně a tím je zajištěna jejich hromadná a ekonomická výroba. Tyto tranzistory jsou stále nejrozšířenějším druhem tranzistorů.



Obr. 13.31. Znárodnění technologického postupu při výrobě epitaxně planárních tranzistorů

Výhodné vlastnosti vrstvy oxidu křemíku lze použít jen u křemíkových tranzistorů, protože u jiných materiálů pro výrobu tranzistorů se nedají vytvořit narostlé vrstvy  $\text{SiO}_2$  a proto mezi původním polovodičem a vrstvou  $\text{SiO}_2$  zůstává povrchová vrstva původního polovodiče a tím nedochází k pasivaci povrchu.

Proti všem předchozím typům mají tyto tranzistory ještě další výhody: malý  $I_{CO}$ , velké  $\beta$  i při malých proudech kolektoru, větší spolehlivost a stabilitu.

#### Označování tranzistorů

Nyní se používají k označování tranzistorů značky, které se skládají z písmen a číslic. Písmena podávají základní informaci o druhu tranzistoru

(i jeho užití). První písmeno znamená materiál, z kterého je tranzistor vyroben a to A- označuje germanium (v ČSSR je to písmeno G), B označuje křemík (v ČSSR je to písmeno K). Druhé písmeno označuje hlavní použití tranzistorů a to takto:

- C - nízkofrekvenční tranzistor s malým výkonem
- D - nízkofrekvenční výkonový tranzistor
- F - vysokofrekvenční tranzistor s malým výkonem
- L - vysokofrekvenční výkonový tranzistor
- P - fotodioda nebo fototranzistor
- S - spínací tranzistor s malým výkonem
- U - spínací tranzistor s velkým výkonem

Pokud jsou tranzistory určeny pro průmyslové využití, kde se kladou větší nároky na jejich spolehlivost a menší rozptyl parametrů, přidává se ještě třetí písmeno X, Y nebo Z. U tranzistorů pro průmyslové využití pak následuje dvouciferné číslo jako typové označení, u tranzistorů určených pro spotřební elektroniku se jedná o dvoupísmenové označení a trojčíselné číslo, které opět udává typové označení.

#### 13.5.3. Speciální druhy tranzistorů

Jestliže osvětlíme oblast emitoru, báze nebo kolektoru světlem vhodné vlnové délky, dochází k vytvoření dvojice elektron-díra. Pokud je mezi kolektor a emitor připojeno napětí, pohybují se částice s nábojem k přechodům emitorovému a kolektorovému a jsou potenciálovou bariérou přechodů oddělovány. Dochází tak ke zvětšování proudu emitorového a kolektorového. Velikost kolektorového proudu (výstupní proud) bude záviset na způsobu zapojení tranzistoru, na proudovém zesilovacím činiteli a na oblasti, která je osvětlena. Tranzistory, u kterých se proud ve výstupním obvodu řídí světlem, se nazývají fototranzistory. Mají jen dva vývody, tj emitor a kolektor. Jako fototranzistor lze použít každý tranzistor, u kterého je vhodným způsobem zajištěno osvětlení příslušné oblasti.

Fototranzistory nedosáhly značného uplatnění, protože je většinou vhodnější kombinovat fotodiodu s tranzistorem.

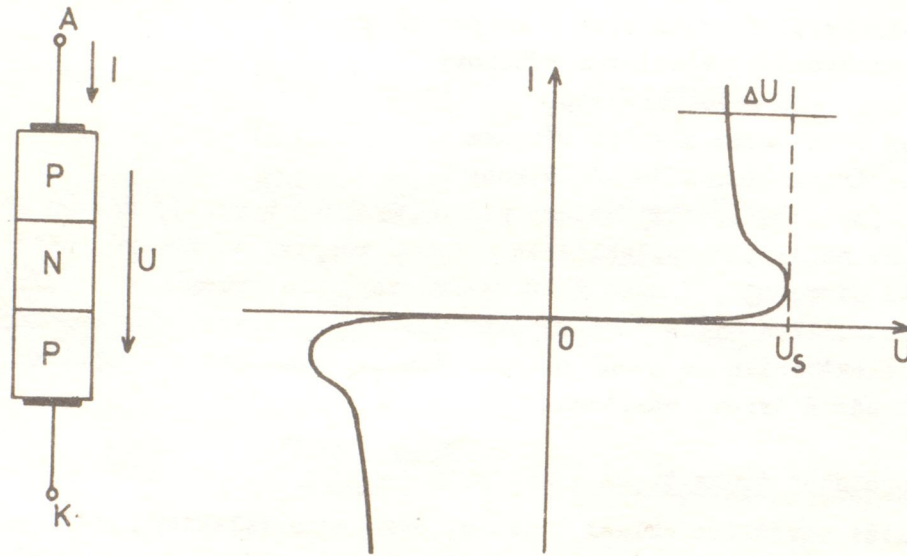
Tranzistory, u kterých lze ovlivňovat proud ve výstupním obvodu mechanickým tlakem se nazývají piezotranzistory nebo pitrany. Mohou se používat např. jako různé snímače tlaku, jako přenoska nebo mikrofon.

Užití bipolárních tranzistorů je omezeno tím, že nelze neomezeně zvyšovat jejich maximální výkon a frekvenci. Fyzikální omezení pro to jsou následující:

- a) částice s nábojem mohou v polovodiči dosáhnout pouze konečné rychlosti, která je charakteristická pro daný polovodič. Pro elektrony a díry v Si nebo Ge je to asi  $6 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ .
- b) maximální proud, který může tranzistorem procházet, je omezený proto, že nelze libovolně zvětšovat plošný obsah báze
- c) intenzita elektrického pole v polovodiči se může zvyšovat jen potud, pokud nenastane průraz. Je přibližně  $\mathcal{E}_{\text{max}} = 10^7 \text{ V.m}^{-1}$  pro Ge a  $2 \cdot 10^7 \text{ V.m}^{-1}$  pro Si.

#### 13.5.4. Diak

Diak patří mezi tranzistorové systémy. Nemá přívod k bázi. Jeho struktura a VA charakteristika jsou na obr. 13.32. Je vidět, že se vlastně jedná o zapojení tranzistoru při odpojené bázi. Při malém napětí připojeném mezi A a K, jak je vyznačeno na obr. 13.32, prochází diakem jen velmi malý proud



Obr. 13.32. Struktura a VA charakteristika diaku

daný závěrným proudem přechodu. Když se napětí na diaku dále zvětšuje, dojde při jeho určité hodnotě  $U_s$  k lavinovému průrazu přechodu, který je zapojen v závěrném směru. Tím dojde k prudkému vzrůstu proudu a k určitému poklesu napětí o  $\Delta U$ , to znamená ke zmenšení jeho odporu. Napětí, při kterém dochází k lavinovému násobení, se nazývá spínací napětí. Připojíme-li napětí opačně než je vyznačeno na obr. 13.32, pak při symetrických přechodech PN se diak bude chovat stejně jako v předcházejícím případě. Proto je i VA charakteristika diaku symetrická kolem počátku proudové a napěťové osy.

Diak tedy má dva stabilní stavy - stav rozepnuto, tj. pro napětí menší než je spínací napětí a diakem prochází velmi malý proud - stav sepnuto - pro napětí na diaku větší než je spínací napětí.

Ze stavu zapnuto do stavu vypnuto lze diak převést snížením napětí pod hodnotu  $(U_s - \Delta U)$ .

Odpor diaku je i v sepnutém stavu velký - řádově  $k\Omega$  a proto se diak hodí k řízení dalších spínacích prvků.

Schematická značka diaku je na obr. 13.41l.

#### 13.5.5. Unipolární tranzistory

U těchto tranzistorů je vedení proudu zprostředkováno pouze jedním druhem částic s nábojem a to většinou vlnami. Proto se nazývají unipolární. Dělí se na dva druhy podle jejich činnosti:

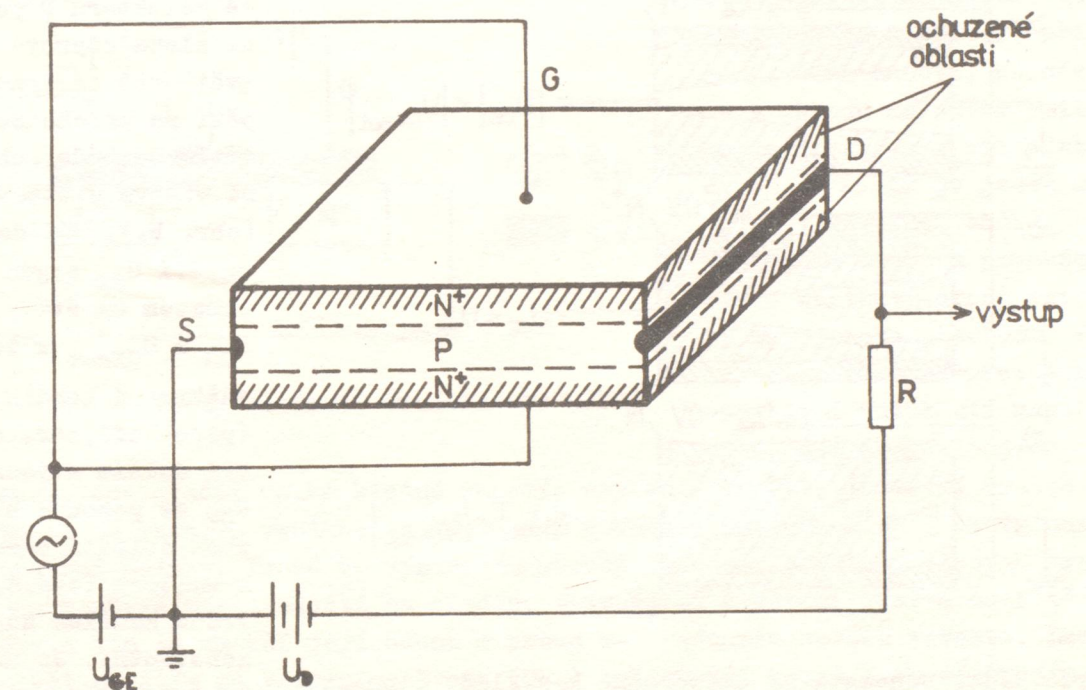
1. Tranzistory s hradlem odděleným přechodem PN (někdy i tranzistory s přechodovým hradlem).

2. Tranzistory s hradlem odděleným dielektrikem (tranzistory s izolovaným hradlem).

U unipolárních tranzistorů se elektrody označují jinými názvy než u bipolárních tranzistorů, i když se často v praxi názvy elektrod (s výjimkou báze) ponechávají stejné. Používá se těchto názvů: Hradlo (gate) G - odpovídá bázi, source (S) - odpovídá emitoru, drain (D) - odpovídá kolektoru.

#### Tranzistory s hradlem odděleným přechodem PN

Jejich činnost je založena na vlastnostech přechodu PN zapojeného v závěrném směru. S rostoucím napětím v závěrném směru se zvětšuje šířka přechodu a tedy i oblast bez volných částic s nábojem. Schematické uspořádání tranzistoru je ve zjednodušené formě na obr. 13.33.

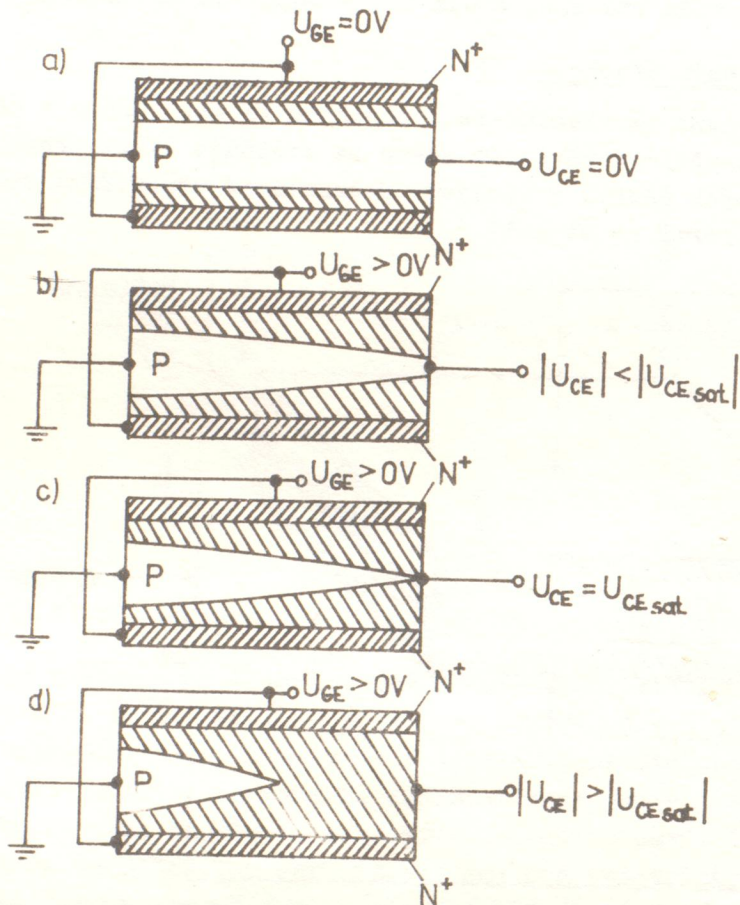


Obr. 13.33. Schematické uspořádání tranzistoru JFE

Připojíme-li mezi hradlo G a emitor S napětí určité velikosti tak, že oba přechody PN jsou zapojeny v závěrném směru, jsou části polovodiče typu P podél přechodů PN prakticky bez volných částic s nábojem. Proud mezi emitorem a kolektorem je určen kromě napětí zdroje a parazitních odporů ještě odporem polovodiče typu P, tj. kanálem. Jeho odpor bude při daném geometrickém uspořádání záviset na tloušťce vrstvičky v polovodiči typu P, která obsahuje volné díry. Budeme-li zvyšovat napětí na přechodu  $U_{GG}$ , budou se šířky přechodů PN zvětšovat a tloušťka vrstvičky tedy zmenšovat. Tím se bude odpor mezi S a D zvětšovat a proud zmenšovat. Při zmenšování napětí  $U_{GG}$  se bude proud ve výstupním obvodu (tj. obvodu emitor - kolektor) zvětšovat. Z této jednoduché úvahy je vidět, že napětím  $U_{GG}$  (vstupní obvod) lze ovlivňovat výstupní obvod. Výhodou tohoto typu tranzistoru je jeho velký vstupní odpor (několik set  $M\Omega$ ) - přechody PN zapojené v závěrném směru. Protože je činnost tranzistoru řízena elektrickým polem hradla, označují se tyto tranzistory zkratkou

ze začátečních písmen anglického názvu JFET (Junction Field Effect Transistor).

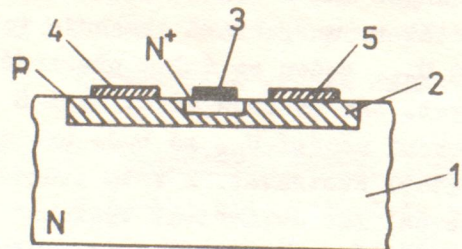
Principiální výklad činnosti byl velmi zjednodušený. Přesněji jsou poměry znázorněny na obr. 13.34. Na obr. a. je případ, kdy je  $U_{GE} = 0 \text{ V}$  a  $U_{CE} = 0 \text{ V}$ . Vyšrafované oblasti jsou ochuzené oblasti. Připojíme-li na hradlo napětí  $U_{GE} > 0 \text{ V}$  (vzhledem k nulovému potenciálu emitoru) a záporné napětí na kolektor, bude se v důsledku zvyšujícího se napětí podél kanálu od emitoru S ke kolektoru D postupně zleva doprava zvětšovat závěrné napětí na přechodech a tím se bude ochuzená vrstva zvětšovat (obr. b.). Při daném napětí  $U_{GE}$  dojde při určitém napětí  $U_{CE} = U_{CEsat}$  k tzv. zaškrncení kanálu (pinch-off, obr. c.). Při dalším zvýšení  $U_{CE}$  se posouvá styk obou oblastí směrem k emitoru (obr. d.). Proud kanálem zůstává konstantní. Je určen hustotou děr vstříkovanou z oblasti typu P do oblasti ochuzené P do oblasti ochuzené



Obr. 13.34. Schematické znázornění k výkladu činnosti JFET

(podobný děj jako u bipolárního tranzistoru).

Tranzistory JFET se téměř výhradně vyrábějí z křemíku planární technikou. Postup a geometrické uspořádání je zřejmé z obr. 13.35. Jako základní křemíková destička se volí polovodič typu N (1).



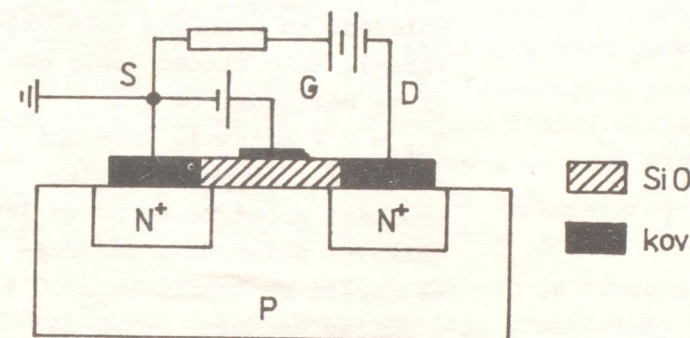
Obr. 13.35. Postup při výrobě a geometrické uspořádání JFET

Do ní se nadifundují příměsi, aby se vytvořil polovodič typu P, který tvoří kanál (2). Do polovodiče typu P se nadifunduje příměs typu N o velké hustotě a vytváří se polovodič typu  $N^+$ . Ve vstupním obvodu tranzistoru se objeví struktura  $N^+PN$ . Dále se vytvoří ohmické kontakty k hradlu (3), emitoru (4) a kolektoru (5).

### Tranzistor s hradlem odděleným dielektrikem

Činnost těchto tranzistorů je založena na jevech, které vznikají přiložením elektrického pole na strukturu MIS nebo MOS. Jevy, ke kterým dochází vlivem elektrického pole, jsou vysvětleny v článku 13.2. Nejčastěji se používá struktura kov-oxid-polovodič, tj. MOS a protože, jak bude vysvětleno dále, činnost výstupního obvodu je ovlivňována elektrickým polem ve vstupním obvodu, říká se těmto tranzistorům tranzistory řízené elektrickým polem čili zkráceně tranzistory MOSFE.

Princip činnosti těchto tranzistorů si vysvětlíme podle obr. 13.36. Z obr. je také zřejmý i technologický postup při výrobě. Hradlo a elektrody emitoru a kolektoru jsou zhotoveny napařením kovu ve vakuu.

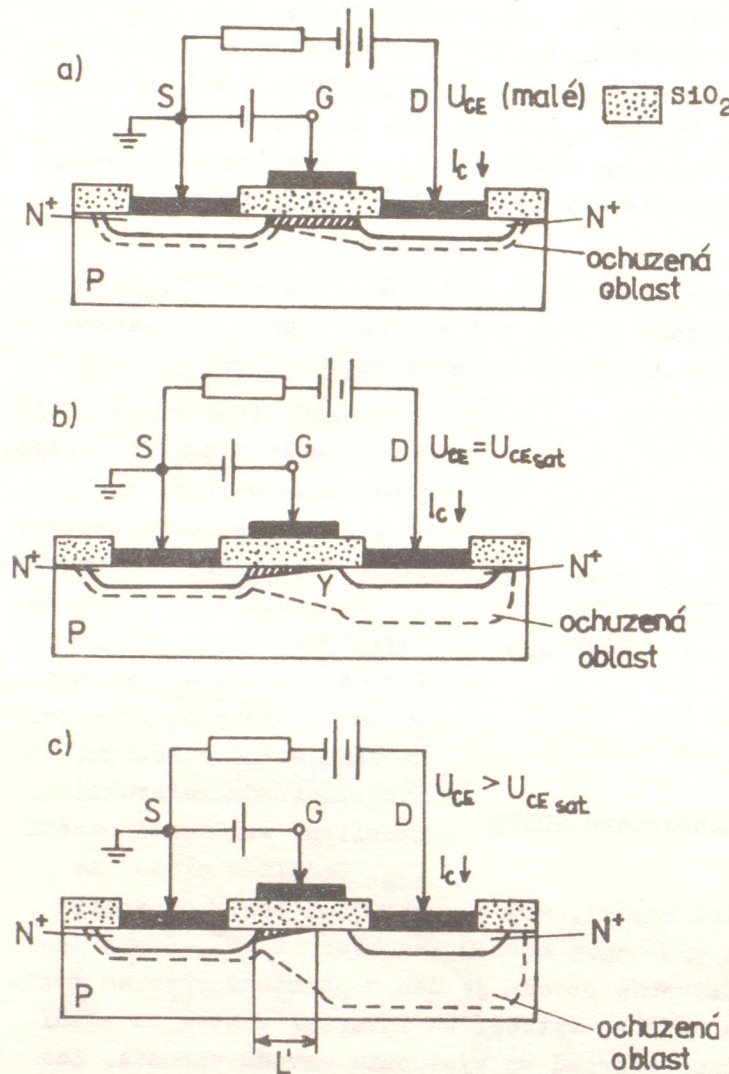


Obr. 13.36. Princip činnosti tranzistoru MOSFE

není-li na hradlo (tj. mezi hradlo a emitor) připojeno žádné napětí, nachází se v obvodu kolektor-emitor seriově zapojené dva přechody PN, z nichž je jeden zapojen v závěrném směru. Výstupním obvodem prochází pouze zbytkový proud závěrně zapojeného přechodu. Velikost proudu se prakticky neovlivní velikostí napětí  $U_{CE}$ . Jestliže připojíme na hradlo dostatečně velké kladné napětí, aby se vytvořila inverzní vrstva (vytvořil se kanál), vznikne ve výstupním obvodu struktura  $N^+NN^+$ , která nemá usměrňující účinky. Proud ve výstupním obvodu je dán v podstatě odporem vrstvy typu N. Zvýšíme-li napětí na hradle, vytvoří se inverzní vrstva do větší hloubky a tím se zmenší její odpor a proud ve výstupním obvodu vzroste. Lze tedy opět napětím na vstupním obvodu ( $U_{GE}$ ) ovlivňovat proud I ve výstupním obvodu.

Vyložený princip činnosti tranzistorů MOSFE byl velmi zjednodušený. Nyní se podíváme na jejich činnost podrobněji. Na hradlo přiložíme tak velké kladné napětí, aby se vytvořila inverzní vrstva. Na kolektor vložíme malé napětí  $U > 0 \text{ V}$  (viz obr. 13.37a). Kanálem bude procházet proud, jehož velikost je dána odporem kanálu a napětím na kolektoru ( $U_{CE}$ ). Budeme-li zvyšovat napětí  $U_{CE}$ , bude tranzistor pracovat v lineární oblasti ( $I \sim U_{CE}$ ). Tranzistor pracuje v oblasti nasycení. Při narůstání kolektorového napětí dojde k jevu podobnému jako u tranzistoru JFE, tj., že se bude zleva doprava zmenšovat napětí na hradle a tím se bude zužovat kanál (inverzní vrstva). Pro určité napětí  $U_{CE} = U_{CEsat}$  dojde k případu znázorněnému na obr. b., tj. k zaškrncení kanálu. Pro  $U_{CE} > U_{CEsat}$  (obr. c) se místo zaškrncení Y pohybuje k emitoru a ochuzená vrstva v blízkosti kolektoru se rozšiřuje. V okolí místa Y se vytvořil přechod PN, který je zapojen v propustném směru a injektuje elektrony do ochuzené oblasti typu P. Počet elektronů přicházejících od emitoru k místu Y se se změnou napětí  $U_{CE}$  nemění a stejný počet bude tedy v místě Y injektován do ochu-

zené oblasti. Proto bude proud  $I_C$  konstantní.



Obr. 13.37. Schematické znázornění k výkladu činnosti MOSFET

- a) pro  $U_{CE} < U_{CEsat}$
- b) pro  $U_{CE} = U_{CEsat}$
- c) pro  $U_{CE} > U_{CEsat}$

třeba obohatit). Podobně existují dva typy s kanálem typu P.

Tranzistory MOS se vyrábějí planární technologií.

Protože vrstva dielektrika (oxidu) je velmi tenká, je kapacita mezi hradlem a polovodičem velká (řádově pF) a proto stačí již velmi malý náboj (řádově  $10^{-10}$  C), aby se na hradle vytvořilo napětí několik desítek voltů (dovolené napětí  $U_{GEmax} = 20$  V) a tím se vytvořilo elektrické pole o tak velké intenzitě, že dojde k elektrickému průrazu vrstvy a tím i zničení tranzistoru. Oděv a obuv podporují vznik elektrického náboje na lidském těle. Izolační krytina na podlaze (PVC) znesnadňuje vybití tohoto náboje a tak se může mezi tělem a zemí vytvořit napětí řádově desítky kV. Proto jsou vývody těchto tran-

Rozeznáváme čtyři typy tranzistorů MOS. Liší se typem vodivosti kanálu a počátečním stavem (tj. při  $U_{GE} = 0$  V) povrchu polovodiče na rozhraní polovodič-oxid. U tranzistoru s kanálem typu N ochuzovacího typu je již při výrobě zajištěno vytvoření kladných nepohyblivých iontů na rozhraní mezi polovodičem a oxidem (dielektrikem). Tyto kladné ionty mají za následek, že při  $U_{GE} = 0$  V existuje inverzní vrstva a výstupním obvodem prochází proud. Tento proud lze snižovat připojením záporného napětí na hradlo ( $U_{GE} < 0$  V - emitor uzemněn) a tím se zmenšuje inverzní vrstva. Při připojeném napětí na hradle se tedy kanál ochuzuje o volné elektrony - proto ochuzovacího typu. U tranzistoru s kanálem typu N obohacovacího typu se nevytvoří bez připojeného napětí  $U_{GE}$  žádné vnitřní pole, které by vytvořilo inverzní vrstvu a proto neprochází výstupním obvodem prakticky žádný proud. Je tedy potřeba připojit na hradlo napětí  $U_{GE} > 0$  V, abychom zvětšili proud tranzistorem (kanál je tedy potřeba obohatit).

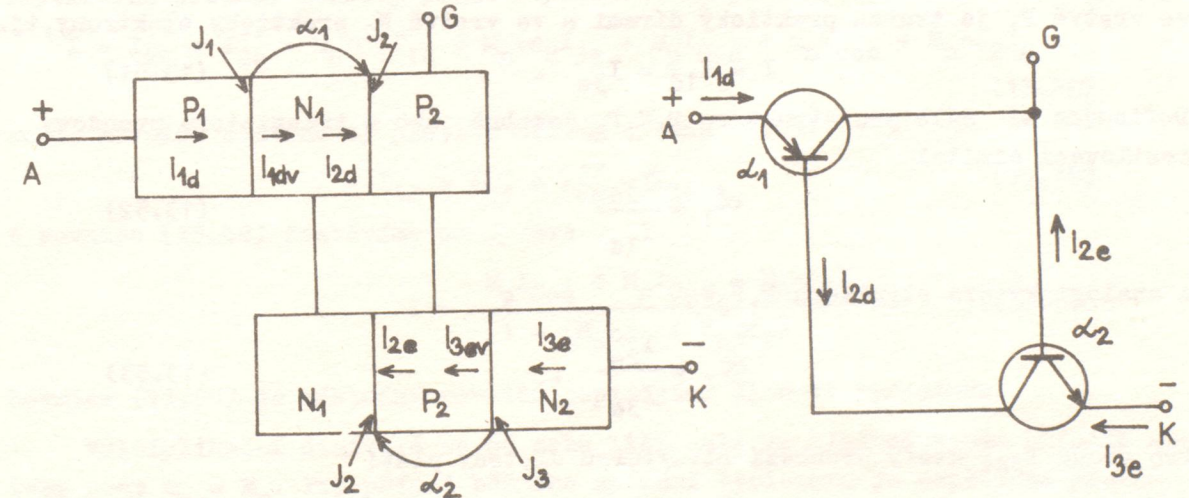
zistorů již při výrobě obtočeny vodivým páskem nebo pružným perkem. Tento zkratovací vodič se odstraňuje teprve tehdy, když je tranzistor zapojen do obvodu.

Schematická značka tranzistoru MOSFE s kanálem typu N je na obr. 13.41m, s kanálem typu P na obr. 13.41n. Písmena nejsou součástí značky.

### 13.6. Součástky s více než dvěma přechody PN

Vzhledem k tomu, že výklad činnosti součástek s rostoucím počtem přechodů je stále obtížnější, zaměříme se v tomto článku na zjednodušený výklad principu činnosti součástek s třemi přechody PN a to jen triodového tyristoru. Triodový tyristor má strukturu PNPN nebo NPNP. Ve struktuře PNPN je vnější polovodič typu P označován jako anoda (A), vnější polovodič typu N jako katoda (K). Na vnitřní polovodič typu P je připojena další elektroda nazývaná řídicí elektroda (G). U struktury NPNP je řídicí elektroda připojena k vnitřnímu polovodiči typu N. Rozhodující pro určení typu struktury je k jakému typu polovodiče je připojena řídicí elektroda. Řídicí obvod je u struktury PNPN mezi řídicí elektrodou a katodou a u struktury NPNP mezi řídicí elektrodou a anodou. V dalším se budeme blíže zabývat tyristorem PNPN. Činnost tyristoru NPNP je analogická.

Při rozboru činnosti tyristoru je výhodné rozložit si jeho čtyřvrstvou strukturu na dvě trojvrstvé (tj. tranzistory typu PNP a NPN) - viz obr. 13.38. Oba tyto tranzistory mají společný kolektorový přechod a jak je zřejmé z obr. jsou zapojeny se společnou bází.

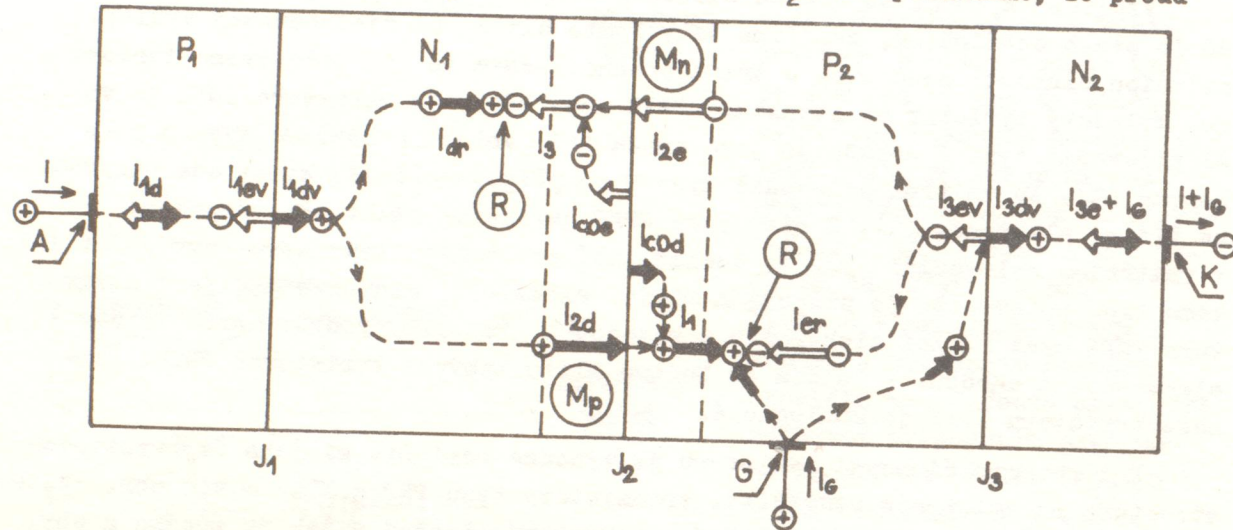


Obr. 13.38. Rozklad tyristoru na dva tranzistory různých typů

Není-li na bázi tranzistoru  $T_2$  připojeno žádné napětí, je tranzistor  $T_2$  uzavřen a obvodem neprochází proud (neuvažujeme-li tak velké napětí  $U_{CE}$ , že dochází k lavinové ionizaci). Tyristor je ve stavu vypnuto a prochází jím jen nepatrný proud tvořený zbytkovým proudem  $I_{CO}$ . Připojíme-li na bázi tranzistoru  $T_2$  kladné napětí vzhledem k emitoru (NPN), tranzistor  $T_2$  se otevře. Tím poklesne napětí mezi emitorem a kolektorem  $T_2$  a vzroste napětí mezi bází a emitorem  $T_1$ , a přechod  $J_1$  bude zapojen v propustném směru. To znamená, že bude procházet proud mezi anodou a katodou tyristoru (tj. obvodem tvořeným

emitem a bází u  $T_1$  a kolektorem a emitem u  $T_2$  a obvodem mezi emitem a kolektorem  $T_1$  a bází a emitem u  $T_2$ ). Tyristor je ve stavu sepnuto a prochází jím proud, který lze ovládat změnou napětí mezi katodou a anodou.

K podrobnějšímu výkladu činnosti tyristoru vyjdeme z obr. 13.39, kde je velmi zjednodušeně znázorněna vlastní činnost. A znamená anodu, K katodu a G řídicí elektrodu. Index d znamená veličinu vztahující se k díram, index e k elektronům, (R) znamená rekombinaci. Index 1 se vztahuje k vrstvě  $P_1$ , index 2 k oblasti přechodu  $J_2$  a index 3 k vrstvě  $N_2$ . Předpokládáme, že proud



Obr. 13.39. Schematické znázornění procesů probíhajících v tyristoru ve vrstvě  $P_1$  je tvořen prakticky dírami a ve vrstvě  $N_2$  prakticky elektrony, tj.

$$I = I_{1d} = I_{3e} \quad (13.51)$$

Definujme si dále pro strukturu  $P_1N_1P_2$  podobně jako u tranzistoru proudový zesilovací činitel

$$\alpha_1 = \frac{I_{2d}}{I_{1d}} \quad (13.52)$$

a analogicky pro strukturu  $N_1P_2N_2$

$$\alpha_2 = \frac{I_{2e}}{I_{3e}} \quad (13.53)$$

Pro proud  $I_{2d}$ , který prochází strukturou  $J_2$ , tedy platí

$$I_{2d} = \alpha_1 I_{1d} \quad (13.52a)$$

a pro proud  $I_{2e}$  je

$$I_{2e} = \alpha_2 I_{3e} \quad (13.53a)$$

Při zapojení tyristoru podle obr. 13.39 jsou přechody  $J_1$  a  $J_3$  zapojeny v přímém směru a  $J_2$  ve zpětném směru. Proto můžeme v prvním přiblížení předpokládat, že elektrické pole se nachází prakticky na přechodu  $J_2$  a mimo tuto oblast se částice s nábojem pohybují pouze difuzí. V přechodu  $J_2$  se však také nacházejí minoritní částice s nábojem, pro které je přechod zapojen v přímém směru a tedy zde vzniká dodatečný proud (zbytkový proud). Tento proud jsme si

v článku 13.5.1 označili  $I_{Co}$  a protože nás zajímá děrová složka, píšeme  $I_{Cod}$ . Je tedy

$$I'_{2d} = I_{2d} + I_{Cod} \quad (13.54)$$

Zvyšujeme-li napětí na tyristoru, zvyšuje se i napětí na přechodu  $J_2$  a při určité velikosti začne docházet ke vzniku dalších volných částic s nábojem tj. k lavinovému násobení. Počet částic se vzhledem k původnímu stavu zvýšil  $M_p$  krát, kde  $M_p$  se nazývá multiplikační činitel pro díry. Tento činitel není konstantní, ale je závislý na napětí podle empirického vztahu

$$M = \left[ 1 - \left( \frac{U}{U_{prur}} \right)^n \right]^{-1} \quad (13.55)$$

kde  $n = 2$  až  $3$  a  $U_{prur}$  je průrazné napětí přechodu  $J_2$ . Pro celkovou děrovou složku proudu v oblasti přechodu  $J_2$  platí

$$I'_{2d} = M_p I_{2d} = M_p \alpha_1 I_{1d} + M_p I_{Cod} \quad (13.56)$$

Analogicky pro elektronovou složku proudu v přechodu  $J_2$ . Protože však, jak je zřejmé i z obr. 13.39, je celkový proud ve vrstvě  $N_2$  dán součtem ( $I_{3e} + I_g$ ) ( $I_g$  je proud řídicí elektrody způsobený napětím přiloženým mezi řídicí elektrodou a katodu), je

$$I'_{2e} = M_n \alpha_2 I_{3e} + M_n I_{Coe} + M_n \alpha_2 I_g \quad (13.57)$$

kde  $M_n$  je multiplikační činitel pro elektrony,  $I_{Coe}$  je elektronová složka zbytkového proudu. Celkový proud v přechodu  $J_2$  je tedy dán vztahem

$$I = I'_{2d} + I'_{2e} = M_p \alpha_1 I_{1d} + M_n \alpha_2 I_{3e} + M_p I_{Cod} + M_n I_{Coe} + M_n \alpha_2 I_g \quad (13.58)$$

Podle rovnice kontinuity platí s užitím vztahu (13.51)

$$I = I_{1d} = I'_{2d} + I'_{2e} = I_{3e} \quad (13.59)$$

Z rovnice (13.58) dostáváme po úpravě

$$I = \frac{M_p I_{Cod} + M_n I_{Coe} + M_n \alpha_2 I_g}{1 - (M_p \alpha_1 + M_n \alpha_2)} \quad (13.60)$$

Rovnice (13.60) je základní rovnicí popisující činnost tyristoru.

Multiplikační činitelé se od sebe liší, ale ve zjednodušeném případě můžeme psát  $M_p = M_n$ . Pro případ běžného spínání tyristoru je napětí na přechodu  $J_2$  malé a platí  $M_p = M_n = 1$ . Dále označíme  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_T$  a  $I_{Cod} + I_{Coe} = I_{Co}$ . Rovnici (13.60) pak lze přepsat na tvar

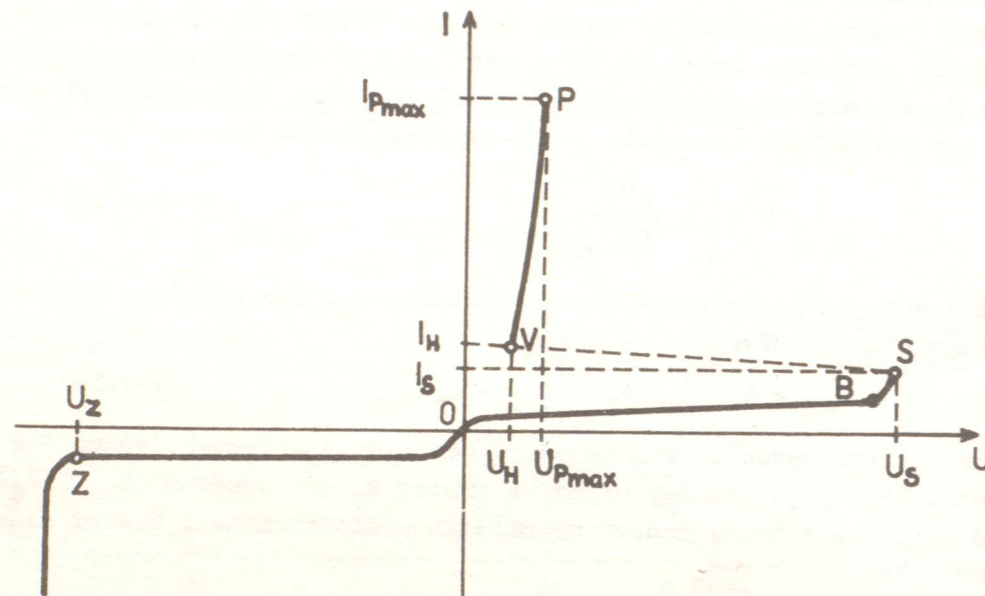
$$I = \frac{I_{Co} + \alpha_2 I_g}{1 - \alpha_T} \quad (13.61)$$

Činnost tyristoru popisuje jeho VA charakteristika. Je znázorněna na obr. 13.40. Na charakteristice lze rozlišit několik oblastí.

#### Závěrná oblast

Je to případ, kdy je tyristor zapojen v závěrném směru, tj. anoda je při-

pojena na záporný a katoda na kladný pól zdroje. Pak jsou ve zpětném směru zapojeny přechody  $J_1$  a  $J_3$  a v přímém směru přechod  $J_2$ . Tyristor má velký odpor ( $\sim 10^8 \Omega$ ) a prochází jím jen zbytkový proud přechodů  $J_1$  a  $J_3$ . Tato část charakteristiky OZ připomíná závěrnou část charakteristiky křemíkové diody.



Obr. 13.40. VA charakteristika tyristoru

Propustná oblast (OBSVP)

vzniká tehdy, je-li anoda tyristoru připojena na kladný a katoda na záporný pól zdroje. Dělí se na několik od sebe odlišných částí.

Blokující oblast (OB)

Je to oblast, kdy se přechod  $J_2$  chová jako klasický přechod zapojený v závěrném směru a tyristorem prochází opět malý proud. VA charakteristika představuje vlastně charakteristiku závěrně zapojeného přechodu  $J_2$ . Z rovnice (13.61) plyne, že pro tento případ ( $I = I_{Co}$ ) pro odpojenou řídicí elektrodu, je  $\alpha_T \ll 1$ . To odpovídá, protože pro malé proudy je malý i proudový zesilovací činitel. Tyristor je ve stavu vypnuto.

Spínací oblast (BS)

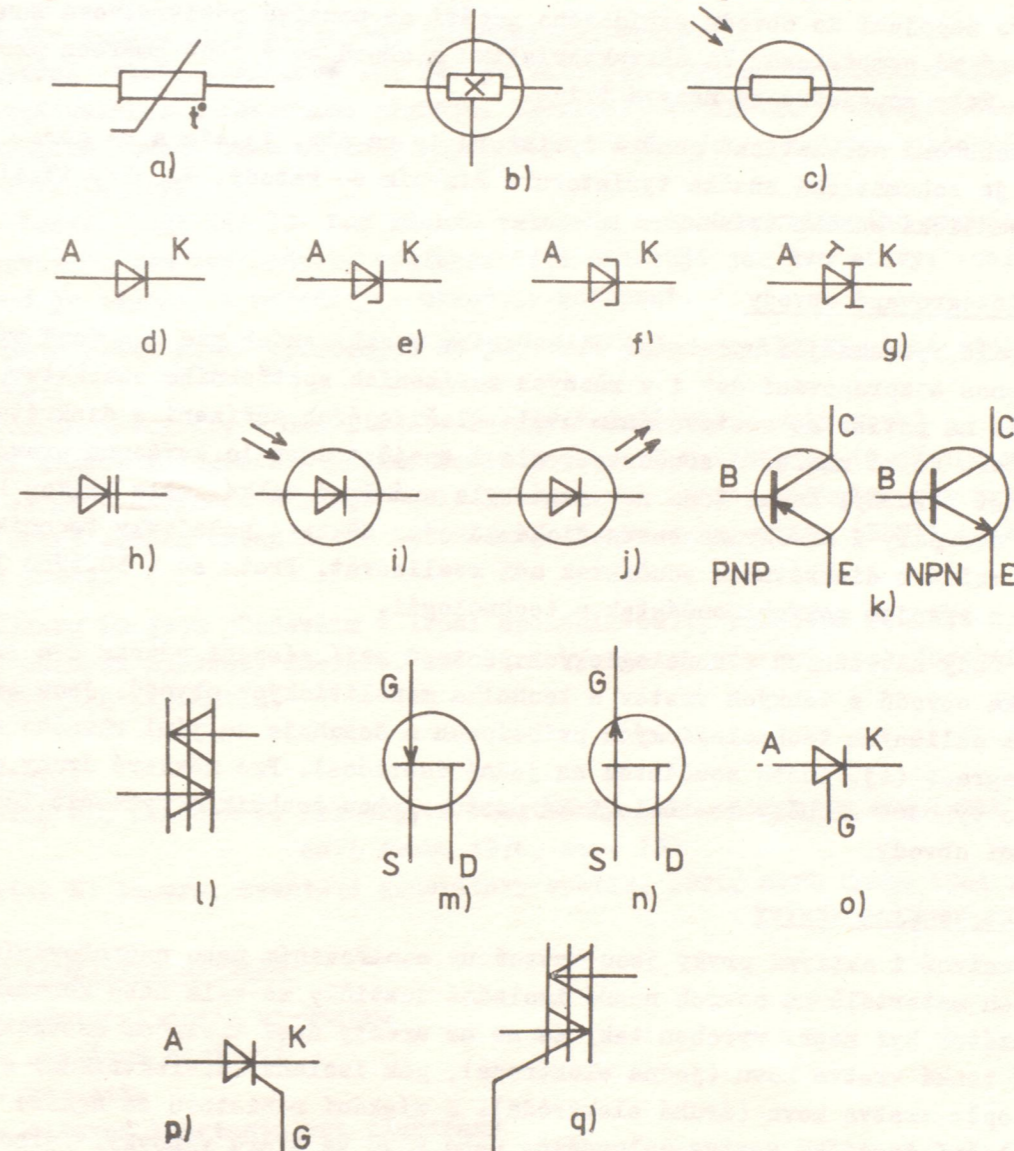
V této oblasti dochází ke vzrůstu proudu a tedy ke zvyšování  $\alpha_T$  a platí  $\alpha_T \rightarrow 1$ . Pak z rovnice (13.60) vychází

$$I_{Co} = \frac{I}{M} (1 - \alpha_T), \quad (13.62)$$

kde  $M = M_p + M_n$ . Ke splnění vztahu  $\alpha_T \rightarrow 1$  vedou dva fyzikálně různé mechanismy:

1. Napětí na tyristoru (tj. i na přechodu  $J_2$ ) dosáhne takové hodnoty, že dojde k lavinovému vzniku částic s nábojem a roste tedy  $M_n$  a  $M_p$ . Tím vzrůstá i  $\alpha_T$ . Tento mechanismus se nazývá multiplikační sepnutí. Protože ke spínání dochází pro hodnoty U blízké  $U_{průr}$ , hrozí nebezpečí zničení tyristoru a tohoto způsobu se prakticky nepoužívá.
2. Splnění podmínky  $\alpha_T \rightarrow 1$  se dosahuje zvětšením proudového zesilovacího čí-

nitele (v našem případě  $\alpha_2$ ). To lze splnit tím, že se na řídicí elektrodu přivede napětí tak, aby dioda byla zapojena v propustném směru a přechodem  $P_2N_2$  prochází proud. Díry, které se dostávají do oblasti přechodu  $P_2$ , zvyšují celkový proud přechodem  $J_3$ . Tím dojde ke zvětšení přenosového činitele (viz vztah (13.46) upravený pro elektrony a tranzistor typu NPN) a podle vztahu (13.44) dojde ke zvětšení proudového zesilovacího činitele  $\alpha_2$ . Tento způsob se nazývá spínání proudovým přenosem.



Obr. 13.41. Schematické značky vybraných polovodičových součástek

Oblast záporného diferenciálního odporu (SV)

je oblastí, ve které přechází tyristor z nevodivého stavu do stavu vodivého (zapnuto).

Průtoková oblast (VP)

Této oblasti se dosáhne tehdy, je-li  $\alpha_T \geq 1$ . Protože je na tyristoru malé napětí, je  $M_p = M_n = 1$  a tedy  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$ . Pro průtokovou oblast pak platí podle (13.62)  $I_{Co} < 0$  A. To znamená, že přes přechod  $J_2$  prochází proud

v opačném směru a je tedy  $U_2 < 0$  V. Přechod  $J_2$  je pólován v přímém směru.

V tomto případě jsou všechny tři přechody zapojeny v přímém směru a na tyristoru se vytvoří úbytek napětí jako na křemíkové diodě v přímém směru. S rostoucím napětím na přechodu vzrůstá proud tyristorem. Tyristor se nachází ve vodivém stavu. Do stavu vypnuto lze tyristor převést snížením proudu pod hodnotu  $I_S$  nebo krátkodobým přepólováním.

Pro zapojení do obvodu střídavého napětí se používá pětivrstevná součástka, která má symetrickou VA charakteristiku a chová se v obou směrech proudu stejně. Tato součástka se nazývá triak.

Všeobecná schematická značka tyristoru je na obr. 13.41o a na obr. 13.41p je schematická značka tyristoru s řízením do katody. Na obr. 13.41q je schematická značka triaku.

### 13.7. Integrované obvody

Stále významnější uplatnění elektroniky v zařízeních pro kosmický výzkum, pro přenos a zpracování dat i v různých zařízeních spotřebního charakteru naráželo na potíže se sestavováním stále složitějších zařízení z diskrétních součástek. Velké množství součástek, ale i spojů znamenalo zvýšenou pravděpodobnost poruchy. Kromě toho zařízení byla neúměrně velká, měla velkou hmotnost a stoupaly i nároky na energetické zdroje. Některé požadavky techniků nebylo možné z diskrétních součástek ani realizovat. Proto se v 50. letech začalo s vývojem nových součástek a technologií.

Z řady navržených technologických postupů mají zásadní význam dva směry: technika obvodů z tenkých vrstev a technika monolitických obvodů. Jsou založeny na odlišných technologických principech a dosahuje se jimi různého stupně integrace (tj. počtu součástek na jedné destičce). Pro některé druhy obvodů bylo výhodné sloučit technologické postupy obou technik a vytvořit tak hybridní obvody.

#### Technika tenkých vrstev

Pasivní i aktivní prvky jsou vytvořeny napařováním nebo napařováním vhodných materiálů na povrch nosné izolační destičky ze skla nebo keramiky. Kondenzátor byl např. vyroben tak, že se na určitý úsek izolační destičky napaří tenká vrstva kovu (jedna elektroda), pak izolant (dielektrikum) a nakonec opět vrstva kovu (druhá elektroda). K získání rezistoru se nanese na izolační destičku vrstva polovodiče nebo kovu ve tvaru vlnovky. Volbou materiálů o různém měrném odporu lze vyrobit rezistory o požadovaném odporu. Přechod PN se vytvoří napařením tenké vrstvy polovodiče typu P a pak N. Podobně ostatní prvky. Tato technologie se použila k výrobě součástek s malou hustotou integrace.

#### Monolitické integrované obvody

Jsou to mikrostruktury, jejichž obvodové prvky jsou neoddělitelně sdruženy uvnitř bloku polovodivého materiálu, který se nazývá čip. Nejpoužívanějším materiálem pro výrobu monolitických integrovaných obvodů (IO) je křemík. Výroba probíhá planární epitaxní technologií s využitím fotolitografické

metody. Jako ochranné izolační vrstvy se používá většinou  $SiO_2$ , někdy i přechodu PN zapojeného v závěrném směru. IO se vyrábějí zpravidla skupinovou technologií, tj. tak, že se současně vyrábí velké množství (až stovky) budoucích obvodů na jedné základní destičce, která se po skončení výroby rozřeže na jednotlivé obvody, opatří vývody a zapouzdří. Obsah plochy jednoho čipu je několik  $mm^2$ . Skupinová technologie zrychluje výrobu, snižuje výrobní náklady a rozptýl parametrů vyrobených součástek.

Podle funkce IO rozlišujeme dva základní druhy:

1. Lineární neboli analogové IO. Zde je velikost výstupního signálu lineární funkcí velikosti vstupního signálu. Používají se hlavně v zesilovačích. Analogové obvody jsou uloženy nejčastěji v kovových pouzdrech podobně jako tranzistory.
2. Číselnicové (logické) IO. Zde různým vstupním hodnotám vstupního signálu odpovídají jen dvě hodnoty výstupní čili existují jen dva stavy: vodivý-obvod je sepnut a nevodivý - obvod je rozepnut.

Podle počtu prvků vyrobených na jednom čipu se realizují různé stupně integrace:

- malý stupeň integrace - Small Scale Integration (SSI) - <15 prvků
- střední stupeň integrace - Medium Scale Integration (MSI) - 10 až 100 prvků
- velký stupeň integrace - Large Scale Integration (LSI) - několik set prvků
- velmi velký stupeň integrace - Extra Large Scale Integration (ELSI) - až tisíc prvků.

Výhody IO jsou především v lepší spolehlivosti, zmenšení rozměrů a hmotnosti, snížení spotřeby energie, zmenšení výrobních nákladů a sjednocení konstrukčních parametrů.

#### Literatura:

- [1] Frank H., Šnejdar V: Principy a vlastnosti polovodičových součástek, SNTL Praha 1976, str. 183
- [2] Pátek K: Lasery, kvantové generátory světla, SNTL, SVTL Praha 1964, str. 47.

#### Význam použitých symbolů

- A - výstupní práce elektronu
- $A_u$  - napěťové zesílení
- C - kapacita
- $D_n$  - difuzní konstanta pro elektrony
- $D_p$  - difuzní konstanta pro díry
- $E_{Cb}$  - energie spodního okraje vodivostního pásu uvnitř polovodiče
- $E_{Cs}$  - energie spodního okraje vodivostního pásu na povrchu polovodiče
- $E_{Fn}$  - sdánlivá Fermiova energie pro elektrony
- $E_{Fn}$  - sdánlivá Fermiova energie pro elektrony
- $E_{Fp}$  - sdánlivá Fermiova energie pro elektrony
- $E_{Vb}$  - energie vrchního okraje valenčního pásu uvnitř polovodiče
- $E_{Vs}$  - energie vrchního okraje valenčního pásu na povrchu polovodiče
- $\Delta E_C$  - energiový rozdíl mezi spodními okraji vodivostních pásů u heterogenních přechodů

$\Delta E_V$  - energiový rozdíl mezi vrchními okraji valenčních pásem u heterogenních přechodů  
 $\vec{E}_D$  - intenzita difuzního elektrického pole  
 $I_B$  - proud báze  
 $I_C$  - kolektorový proud  
 $I_{C_n}$  - elektronová složka kolektorového proudu  
 $I_{C_o}$  - zbytkový proud přechodu PN  
 $I_{C_{on}}$  - elektronová složka zbytkového proudu  
 $I_{C_{op}}$  - děrová složka zbytkového proudu  
 $I_{C_p}$  - děrová složka kolektorového proudu  
 $I_D$  - proud fotodiodou za tmy (temný proud)  
 $I_E$  - emitorový proud  
 $I_{E_n}$  - elektronová složka emitorového proudu  
 $I_{E_p}$  - děrová složka emitorového proudu  
 $I_G$  - proud řídicí elektrodou tyristoru  
 $I_L$  - proud fotodiodou způsobený osvětlením  
 $I_o$  - maximální proud diodou v závěrném směru  
 $j_n$  - elektronová složka hustoty proudu  
 $j_p$  - děrová složka hustoty proudu  
 $K$  - absorpční konstanta  
 $L_n$  - difuzní délka pro elektrony  
 $L_p$  - difuzní délka pro díry  
 $l$  - délka  
 $M_n$  - multiplikační faktor pro elektrony  
 $M_p$  - multiplikační faktor pro díry  
 $N_a$  - hustota akceptorů  
 $N_C$  - efektivní hustota stavů (elektronů)  
 $N_d$  - hustota donorů  
 $N_V$  - efektivní hustota stavů (děr)  
 $n_b$  - hustota elektronů ve vnitřní části polovodiče  
 $n_d$  - hustota elektronů vytvořená difuzí ve směru osy  $x$   
 $n_i$  - intrinzičká hustota volných elektronů  
 $n_n$  - hustota elektronů v polovodiči typu N  
 $n_o$  - rovnovážná hustota elektronů  
 $n_p$  - hustota elektronů v polovodiči typu P  
 $n_s$  - hustota elektronů na povrchu polovodiče  
 $\Delta n$  - nadbytečná hustota elektronů  
 $\Delta n_{stac}$  - maximální nadbytečná hustota elektronů  
 $p_b$  - hustota děr uvnitř polovodiče  
 $p_n$  - hustota děr v polovodiči typu N  
 $p_o$  - rovnovážná hustota děr  
 $p_p$  - hustota děr v polovodiči typu P  
 $p_s$  - hustota děr na povrchu polovodiče  
 $\Delta p$  - nadbytečná hustota děr  
 $Q$  - náboj  
 $R_T$  - odpor termistoru

$r$  - koeficient rekombinace  
 $\mathcal{S}$  - plešný obsah  
 $U_{BE}$  - napětí mezi bází a emitorem  
 $U_{CB}$  - napětí mezi bází a kolektorem  
 $U_{CE}$  - napětí mezi emitorem a kolektorem  
 $U_D$  - difuzní napětí  
 $U_F$  - fotoelektrické napětí  
 $U_{GE}$  - napětí mezi hradlem a emitorem  
 $U_S$  - napětí pro lavinový průraz u diaku  
 $U_g$  - stabilizační napětí  
 $x_b$  - šířka přechodu  
 $\alpha_c$  - proudový zesilovací činitel tranzistoru v zapojení se společnou bází  
 $\alpha_C$  - kolektorový proudový zesilovací činitel  
 $\alpha_m$  - činitel mechanické citlivosti  
 $\alpha_p$  - bázevý přenosový činitel  
 $\alpha_T$  - proudový zesilovací činitel u tyristoru  
 $\beta$  - proudový zesilovací činitel tranzistoru v zapojení se společným emitorem  
 $\gamma_E$  - injekční účinnost emitoru  
 $\epsilon_r$  - relativní permitivita  
 $\eta$  - kvantová účinnost  
 $\rho$  - měrný odpor  
 $\tau_n$  - doba života elektronů  
 $\tau_p$  - doba života děr  
 $\Phi$  - světelný tok  
 $\chi$  - elektronevová afinita



## 14. LUMINISCENCE

### 14.1. Obecné poznatky

Luminiscenční záření dříve nazývané fosforescence nebo fluorescence bylo pozorováno na různých látkách v různém skupenství včetně živých organismů. Zřejmě bylo známo již od začátku našeho letopočtu, podrobné záznamy o jeho pozorování na pevných látkách pocházejí ze začátku 17. století.

K rozlišení luminiscenčního záření od ostatních typů záření je potřeba tento pojem vymezit. Definici luminiscence podal sovětský fyzik Vavilov. Je formulována v tomto tvaru: Luminiscence je přebytek záření nad tepelným zářením tělesa v tom případě, když toto přebytečné záření má konečnou dobu trvání podstatně převyšující periodu světelných kmitů ( $\approx 10^{-15}$  s).

Aby byla odlišena luminiscence od rozptýleného primárního záření, požaduje se jako minimální doba dozívání doba  $10^{-10}$  s.

Vzhledem k tomu, že v současné době je záření laserů studováno většinou zcela samostatně, nezařazuje se do luminiscence. Proto by bylo potřeba definici doplnit v tom smyslu, že vyzáření fotonů luminiscence probíhá nezávisle na sobě, čili spontánně. V současné době se užívá definice formulované Gurvičem: Luminiscence je spontánní záření představující přebytek nad tepelným zářením, které je charakterizováno dozíváním, jehož trvání značně převyšuje periodu světelných kmitů.

Luminiscenční děje se třídí podle různých kritérií. Zde si uvedeme dvě kritéria: 1. Podle doby zhasnutí, 2. Podle způsobů buzení.

1. Doba, po kterou dohasíná luminiscenční záření po skončení buzení, může být různě dlouhá. Jev nazýváme fluorescencí, když dojde k emisi jedním nebo více spontánními přechody. Celý děj (excitace a emise) nastane za dobu  $\tau$ , která je střední dobou systému v excitovaném stavu. Pro přechody tohoto typu je  $\tau$  řádově  $10^{-8}$  s až  $10^{-5}$  s. Dochází-li k emisi přechodem z excitovaného stavu do základního přes záchytné hladiny (pasti), doba  $\tau$  se značně prodlouží - řádově sekundy, hodiny, dny. Pak mluvíme o fosforescenci.

2. Luminiscenci lze vybudit různými způsoby. Podle způsobů buzení se k odlišení používají pro luminiscenci následující názvy.

Je-li luminiscence vybudena absorpcí světelného záření, mluvíme o fotoluminiscenci. Energie budícího záření, tj. viditelného event. ultrafialového je srovnatelná se šířkou zakázaného pásu nebo aktivačními energiemi zabudovaných nečistot. Proto lze z experimentálních údajů při proměřování fotoluminiscence seudit na procesy, ke kterým v látce dochází, i na rozložení energií v pásu a hladin.

Je-li luminiscence buzena přiloženým vnějším elektrickým polem, mluvíme o elektroluminiscenci. Objev elektroluminiscence je z roku 1938, kdy francouzský fyzik Destriau prováděl pokusy s práškovým luminoforem v silném střídavém elektrickém poli.

Je-li luminiscence vyvolána mechanickým namáháním (tlakem, plastickou deformací a pod.) mluvíme o triboluminiscenci.

Při vybudění luminiscence elektrony urychlenými ve vakuu na energii řádově  $10^4$  eV, mluvíme o katodoluminiscenci. Tento děj je vlastně několika-  
stupňový. Energie elektronů je mnohonásobně větší než energie potřebná k excitaci, ale protože dochází k pohlcování energie v celém krystalu, energie elektronů se postupně snižuje, přičemž dochází k vybudění luminiscenčních center. Energetická účinnost katodoluminiscence je však nižší než fotoluminiscence, protože značná část energie se přemění na nezářivé procesy (interakce elektronů s fonony).

O termoluminiscenci mluvíme, jestliže je luminiscence vyvolána zahřátím předem excitované látky.

Dochází-li k chemickým reakcím, při kterých se uvolní reakční chemická energie přenáší na luminiscenční centra, pak mluvíme o chemiluminiscenci. Někdy se pod tento pojem zahrnuje i světélkování různých biologických objektů (svatojánské mušky, tlející pařezy atd), jindy se používá termín bioluminiscence.

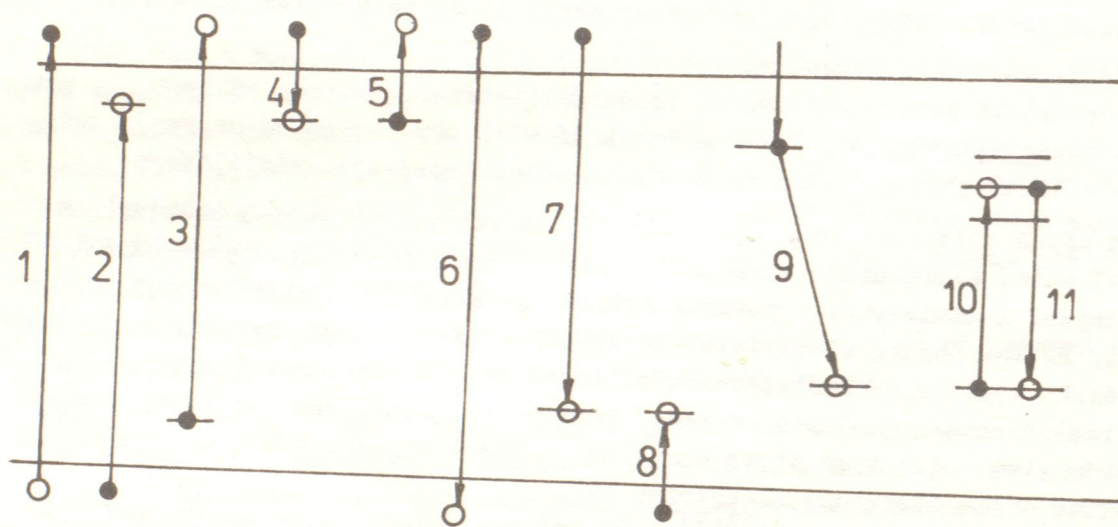
Dochází-li k vybudění luminiscence částicemi  $\alpha$ ,  $\beta$  nebo zářením  $\gamma$ , mluvíme o radioluminiscenci. Při tom vznikají záblesky, které se nazývají scintilace a látky používané k radioluminiscenci se nazývají scintilátory.

K nejdůležitějším luminiscenčním látkám vzhledem k jejich praktickému využití patří anorganické krystalické látky. Jsou to většinou polovodiče. K pochopení luminiscence v pevných látkách je důležitá znalost energetického modelu. Přitom jejich elektrické vlastnosti (měrný odpor, fotovodivost) jsou z hlediska kvalitních luminiscenčních látek nepodstatné. Pevné látky, které jeví luminiscenci, se často nazývají luminofoxy. Patří sem jak látky v krystalickém stavu, tak i ve stavu amorfním. K podrobnějšímu výčtu si luminofoxy rozdělíme podle struktury sloučeniny [1].

- Binární sloučeniny typu  $A^{II}B^{VI}$  a to buď bez příměsí nebo aktivované příměsemi. Velký význam mají především ZnS, CdS hlavně pro jejich praktické využití. Oba luminofoxy vykazují luminiscenci prakticky při všech způsobech buzení.
- Binární sloučeniny typu  $A^{III}B^V$ . Patří sem např. GaP, GaAs, GaSb, InP, které se hlavně využívají při výrobě elektroluminiscenčních diod.
- Ternární sloučeniny typu  $A_x^{III}B_{1-x}^{III}C^V$  nebo  $A_x^{III}B_x^{III}C_{1-x}^V$  - např.  $In_xGa_{1-x}P$ ,  $GaAs_xP_{1-x}$ . Mají také význačné elektroluminiscenční vlastnosti.
- Oxidové luminofoxy - ZnO,  $Al_2O_3$ ,  $Cu_2O$  a další. Mají velmi různorodé uplatnění. Např. ZnO se používá jako luminofox při výrobě stínítek obrasovek. Látka  $Al_2O_3$ , která je dotovaná chromem, je známá pod názvem rubín a používá se při konstrukci rubínových laserů.
- Alkalické halogenidy - KCl, NaCl, CsCl, NaBr, NaJ, CsJ a další. Představují spolu se selenidy důležitou skupinu luminofoxy. Jejich význam je jednak teoretický, protože z experimentálního zjištění veličin charakterizujících luminiscenci se dá usuzovat na elektronové procesy, jednak praktický. Např. NaJ a CsJ se používají v detektorech.
- Halogenfosforečnany, wolframany a vanadáty.

## 14.2. Obecné mechanismy luminiscence

V tomto článku budeme uvažovat fotoluminiscenci. Dříve než se budeme věnovat mechanismům luminiscence, uvedeme si různé energiové hladiny v pásovém modelu pevných látek a přechody mezi nimi (viz obr. 14.1). Přechody 1 - 9 se uplatňují u fotovodivých luminoforů, přechody 10 a 11 k fotovodivosti nepřispívají (nefotovodivé luminofovy). Přechody 1, 2, 3 a 10 jsou umožněny absorpcí fotonu, při přechodech 6, 7 a 11 se foton emituje. K přechodům 5 a 8 dochází tepelnou excitací a přechod 4 je spojen s předáním energie mřížce. Přechody 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 jsou spojeny s různými příměsemi v luminoforu, přechody 1 a 6 jsou mezipásové přechody a přechody 10 a 11 představují přechod elektronu ze základní hladiny na hladinu excitovanou u téže příměsi.



Obr. 14.1. Různé energiové hladiny v luminoforech

Mechanismus luminiscence v krystalech lze shrnout do dvou základních etap: 1. - absorpce dopadajícího záření. Při tom dochází k excitaci (vybuzení) elektronů jako výsledek pohlcení určité energie. Částicím, u kterých k absorpci dochází, se říká absorpční centra. 2. - vyzáření energie ve formě fotonů. Je to konečné stadium. K vyzáření fotonu dojde na příměsi, které se říká luminiscenční centrum. Kromě toho se luminiscenčním centrem nazývá i příslušný systém energiových hladin.

Při některých mechanismech luminiscence se uvádí ještě další etapa - přenos energie. Zahrnuje děje, při kterých dochází k přenosu energie od absorpčního centra k centru luminiscenčnímu. V důsledku řady procesů, které v této etapě probíhají, jsou absorpční centra různá od luminiscenčních center.

Elektrony, které jsou převedené na excitovanou hladinu, se mohou vrátit zpět do základního stavu luminiscenčního centra (případ fluorescence) nebo jsou zachyceny na centrech, z nichž mohou být (např. v důsledku tepel-

né excitace) po určité době uvolněny. Pak se mohou zúčastnit zářivých přechodů. Tím se doba dohasínání (viz článek 14.3) prodlužuje.

Pravděpodobnost přechodu vyvolaného tepelnou excitací ze záchytné hladiny do vodivostního pásu je dána vztahem

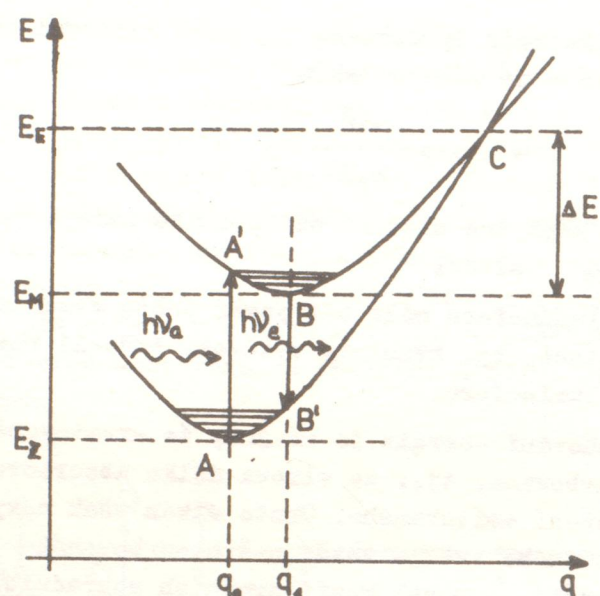
$$p = s \exp \frac{-\Delta E}{k_B T}, \quad (14.1)$$

kde  $\Delta E$  je vzdálenost záchytné hladiny od spodního okraje vodivostního pásu,  $s$  je tzv. frekvenční faktor.

Mírou účinnosti luminoforu může být poměr počtu vyzářených fotonů k počtu pohlcených fotonů, tj. kvantový výtěžek. Bude-li roven jedné, máme případ dokonalého luminoforu.

Podle zákona zachování energie je zřejmé, že excitovaná energie nemůže být větší než absorbovaná, tj., že vlnová délka absorbovaného záření nemůže být větší než záření emitovaného. Tento zákon však nevysvětluje, proč je vlnová délka emitovaného světla větší než absorbovaného (zákon Stokesův). K vysvětlení použijeme model konfiguračních souřadnic. Udává nám závislost energie luminiscenčního centra jako funkce nějaké souřadnice  $q$ . Jako  $q$  se nejčastěji volí vzdálenost mezi luminiscenčním centrem a sousedními atomy. Na obr. 14.2 jsou tyto závislosti zobrazeny pro základní a excitovaný stav.  $E_Z$  představuje energii základního stavu,  $E_e$  - energii excitovaného stavu,  $E_M$  je energie metastabilního stavu. V základním stavu má luminiscenční centrum minimum energie v bodě A o konfigurační souřadnici  $q_0$ . Jak je vidět z obr. 14.2 nejsou minima energie pro základní a excitovaný stav nad sebou (tj. nemají stejné  $q$ ), ale jsou vzájemně posunuta. Protože jde o rychlý elektronový děj, nestačí jádra atomů reagovat (velká hmotnost) a děje probíhají v původní konfiguraci atomů (Franckův - Condonův princip). Proto dojde k přechodu 1 do bodu A' (absorpce fotonu o energii  $h\nu_a$ ). Tento stav však není stabilní a soustava přejde do stavu s minimální energií (bod B) o konfigurační souřadnici  $q_1$ . Znamená to současně, že se při excitaci zvětšila vzdálenost centra od ostatních atomů, čili, že se centrum "rozepnulo". Zpětný přechod 2 do základního stavu je spojen s emisí luminiscenčního záření o energii  $h\nu_e$ . Protože, jak je vidět z obr. 14.2, je  $h\nu_a > h\nu_e$ , je  $\lambda_e > \lambda_a$ . Rozdíl energie absorbované a emitované se přemění na vnitřní energii mřížky. Dalším důsledkem tohoto modelu je možnost nezářivého přechodu do bodu C jako důsledek interakce s fonony. Tento bod je společný pro základní a excitovaný stav. Soustava pak přejde nezářivým přechodem do bodu A (nenastane zářivý přechod mezi základním a excitovaným stavem). Pravděpodobnost přechodu je opět dána vztahem 14.1.

Pro luminiscenční látky mají zásadní význam tzv. aktivátory, tj. příměsi, které tvoří v energiovém schématu akceptorové hladiny. Hustota aktivátorových příměsí bývá v rozmezí  $10^{-6}$  g až  $10^{-3}$  g na 1 g luminoforu. V základním (neexcitovaném) stavu je aktivátorová hladina obsazena elektronem (aktivátor neionizován). Po absorpci energie tímto atomem dojde k io-



Obr. 14.2. Model konfiguračních souřadnic

nizaci aktivátorové hladiny ( atomu) a přeseku elektronu do vodivostního pásu. Je tedy zřejmé, že tyto hladiny mohou být absorpčními centry. Tím dojde ke zvýšení hustoty elektronů ve vodivostním pásu, tj. ke zvětšení fotovodivosti. Velmi často je absorpce excitační energie spojena s přechodem elektronu z valenčního pásu do vodivostního pásu. Volný elektron se může pohybovat krystalem, až se dostane do blízkosti ionizovaného aktivátoru a dojde k zářivé rekombinaci, při níž vzniká luminiscenční záření. Protože k luminiscenci došlo v důsledku rekombinace, mluvíme o rekombinační luminiscenci. Kromě toho je zde absorpční centrum totožné s luminiscenčním. Doznívání i rychlost rekombinace elektronů na aktivátorech jsou v tomto případě ovlivněny rychlostí pohybu elektronů a efektivním průřezem aktivátoru (tj. velikostí oblastí, z níž může ještě dojít k rekombinaci na aktivátoru).

Jiný případ nastane např. v případě alkalických halogenidů (např. KCl - Tl<sup>+</sup>). Tyto látky mají velké E<sub>g</sub> (viz tabulka 14.1). Ion aktivátoru (tj. Tl<sup>+</sup>) může mít i několik energetických hladin v zakázaném pásu. K excitaci a luminiscenci dochází mezi těmito hladinami. Protože v tomto případě se nejedná o žádnou rekombinaci, mluvíme o nerekombinačním mechanismu luminiscence. Při těchto excitacích také nedochází k vytvoření páru elektron-díra, ani k vytvoření volného elektronu nebo díry a proto tato luminiscence není provázená fotovodivostí.

Při zabudování aktivátoru do krystalové mřížky luminoforu může dojít k porušení elektrické neutrality. Je to např. v případě substituční poruchy s odlišným mocenstvím od základního atomu. Protože hustoty aktivátorů jsou dosti velké, je nutné přidat do luminoforu další příměsi, které kompenzují vytvořený náboj. Těmto příměsím se říká **koaktivátory**. Důležité jsou takevé

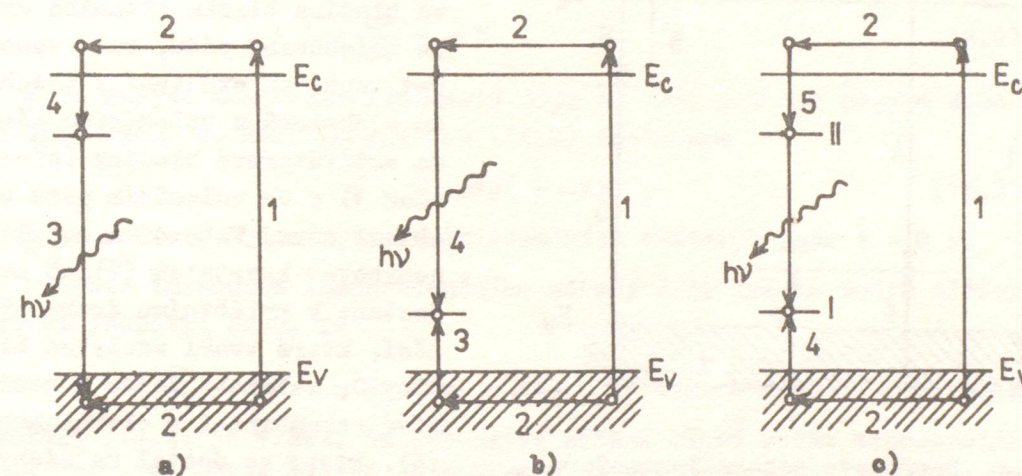
příměsí, které vytvářejí prázdné mělké energetické hladiny. Tyto hladiny mohou zachycovat volné elektrony z vodivostního pásu a fungovat jako pastě. Přechod elektronu z pastě do valenčního pásu není dovolen.

Látka	ZnS	CdS	ZnSe	ZnTe	HgS	GaAs	GaP	KCl
$\frac{E_g}{eV}$	3,8	2,53	2,58	2,28	2,5	1,43	2,25	9,5

Tab. 14.1. Šířka zakázaného pásu u některých vybraných sloučenin

V luminoforech, u kterých dochází v souvislosti s luminiscenčními podmínkami ke zvětšení fotovodivosti (fotovodivé luminofoery), jsou v podstatě možné tři druhy luminiscenčních center a tím i mechanismy luminiscence.

1. **Model Lambduv-Klickův** (viz obr. 14.3a). V zakázaném pásu existuje v blízkosti vodivostního pásu prázdná aktivátorová hladina. Pohlcením potřebné energie při osáření luminoforu dojde k přechodu elektronu z valenčního pásu do vodivostního pásu a ve valenčním pásu vznikne díra (přechod 1). Uvolněný



Obr. 14.3. Druhy luminiscenčních center

elektron může difundovat krystalem (pohybuje se ve vodivostním pásu - přechod 2) až se dostane do blízkosti aktivátoru (přechod 4). Při přechodu elektronu z aktivátorové hladiny do valenčního pásu dojde k vyzáření fotonu (přechod 3 - foton je vyznačen vlnovkou).

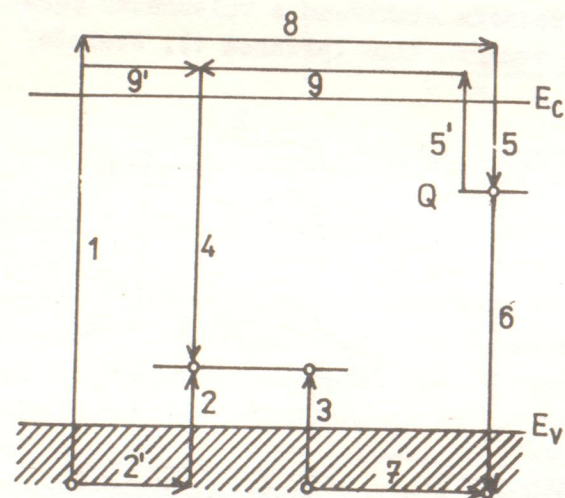
2. **Model Riehlův-Schönův-Klasensův** (obr. 14.3b). Rekombinační hladina se nachází v blízkosti valenčního pásu. Po vzniku dvojice elektron-díra (přechod 1) a jejich difuzi krystalem (přechod 2) dojde k zachycení díry rekombinační hladinou (přechod 3). Nachází-li se v blízkosti příměsí, která vytvoří rekombinační centrum, volný elektron, může dojít k uvolnění fotonu při zářivém přechodu elektronu z vodivostního pásu na rekombinační hladinu (přechod 4).

3. **Model Prenerův-Williamsův** (viz obr. 14.3c). Je charakterizován dvěma hladinami v zakázaném pásu. Hladina může vytvářet buď totéž centrum nebo dvě blízké lokalizované příměsí. Hladina I se vyznačuje tím, že zachycuje díry z valenčního pásu (přechod 4) a hladina II se vyznačuje tím, že zachycuje elektrony z vodivostního pásu (přechod 1).

rony z vodivostního pásu (přechod 5). Opět předpokládáme vznik páru elektron-díra (přechod 1) a jejich difúzi krystalem (přechod 2). Při přechodu elektronu z hladiny II na hladinu I (přechod 3) dojde k zářivé rekombinaci a vznikne foton.

Popsané mechanismy se uplatňují např. u luminoforů typu  $A^{II}B^{VI}$  a oxidových luminoforů s následujícími aktivátory: ZnS - Cu, CdS - Cu, Ag, ZnO - Se, CdSe - Cu (za pomlčkou uveden aktivátor).

Ze vztahu (14.1) vyplývá, že pravděpodobnost přechodu s rostoucí teplotou roste a tedy bude docházet ke zvyšování intenzity luminiscence. Při zvyšování teploty však může dojít i ke snížení intenzity luminiscence. Vysvětlění si provedeme podle obr. 14.4. Přechod 1 představuje vytvoření páru elektron-díra. Aktivátorová hladina může zachytit díru (přechod 2'-2) a pak přechodem elektronu (9'-4) vznikne luminiscenční záření. Jedná se tedy o model Riehlův-Schönův-Klasensův. Když je aktivátorová hladina blízko vrchního okraje valenčního pásu, bude docházet tepelnou excitací k přechodu elektronů z valenčního pásu na aktivátorové hladiny (přechod 3) a ve valenčním pásu se objeví díra. Tato díra se může pohybovat krystalem (7), až se dostane k zvláštnímu druhu příměsí, které tvoří záchytné hladiny Q, na nichž dojde k nezářivé rekombinaci s elektronem (6), který se dostal na záchytnou hladinu Q přechodem (8-5). Tento elektron by však mohl být tepelnou excitací uvolněn do vo-



Obr. 14.4. Energiové schéma luminoforu k vysvětlení teplotního zhášení luminiscence

divostního pásu a zářivou rekombinací rekombinovat s dírou na aktivátorové hladině (přechod 9 - 4). Nastala tedy místo zářivé rekombinace rekombinace nezářivá a došlo ke snížení intenzity luminiscenčního záření. Tomuto jevu se říká teplotní zhášení luminiscence. Příměsem, které vytvářejí záchytné hladiny typu Q, se říká luminiscenční jedy. V ZnS je tvoří např. atomy Fe, Co, Ni. Podmínkou ke zhášení luminiscence je tedy tepelná excitace elektronu z valenčního pásu na aktivátorovou hladinu. Proto se s rostoucí teplotou počet nezářivých přechodů zvětšuje. Pro záchytné hladiny typu Q je charakteristická větší pravděpodobnost jejího zaplnění elektronem než tepelná excitace do vodivostního pásu.

K přechodu elektronu z valenčního pásu na aktivátorovou hladinu může dojít i absorpcí fotonu vhodné vlnové délky. Potřebná energie je však malá a proto stačí ozáření infračerveným zářením, aby došlo k teplotnímu zhášení. Při zhášení převládají procesy 7 - 6 nad 5' - 9 - 4. Může k němu dojít i přechody typu 3.

Infračervené záření může však také uvolňovat elektrony zachycené na pas-tích nebo na luminiscenčních jedech a tím se zvyšuje jas luminiscence. Tomuto jevu se říká stimulace luminiscence infračerveným zářením.

### 14.3. Doznívání luminiscence

Jak již bylo řečeno v článku 14.2 může se luminofor nacházet ve vybuze-ném stavu dosti dlouhou dobu. Z toho vyplývá, že luminiscence nemizí v okamžiku, kdy přestane její buzení, ale setrvává po určitou dobu. Říkáme, že lu-miniscence doznívá. Ukážeme si, jaké zákony platí v případech rekombinační a nerekombinační luminiscence.

#### 14.3.1. Nerekombinační luminiscence

K zářivé rekombinaci dochází uvnitř jednoho centra a přechody v různých centrech probíhají nezávisle na sobě. Proto změna hustoty center  $dN$ , která přecházejí po přerušení excitace z excitovaného stavu do stavu základního za jednotku času, je úměrná hustotě vybuzených luminiscenčních center. Je tedy

$$-\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad (14.2)$$

kde  $\alpha$  se nazývá konstanta rychlosti děje a  $1/\alpha = \tau$  se nazývá doba doznívání luminiscence. Řešením rovnice (14.2) dostáváme

$$N = N_0 \exp(-\alpha t), \quad (14.3)$$

kde  $N_0$  je hustota vybuzených luminiscenčních center v čase  $t = 0$  s.

Protože intenzita luminiscenčního záření  $I$  je úměrná počtu zářivých přechodů za jednotku času, je

$$I = -\frac{dN}{dt} = \alpha N = \alpha N_0 \exp(-\alpha t) = I_0 \exp(-\alpha t). \quad (14.4)$$

Ze vztahu (14.4) je vidět, že intenzita záření klesá podle exponenciálního zákona. Dále je možné soudit na fyzikální význam  $\tau$ . Je to doba, za kterou klesne intenzita záření na hodnotu  $1/e$  intenzity původního záření.

#### 14.3.2. Rekombinační luminiscence

Protože se zde jedná o rekombinaci, bude pro případ luminoforu bez pas-tí počet rekombinací úměrný jak hustotě ionizovaných center aktivátorů ( $N$ ), tak i hustotě volných elektronů ( $n$ ) a bude tedy platit

$$-\frac{dN}{dt} = \beta Nn, \quad (14.5)$$

kde  $\beta$  se nazývá rekombinační koeficient. Bereme-li v úvahu luminofor jen s jedním druhem rekombinančních center, pak  $N = n$  a tedy

$$-\frac{dn}{dt} = \beta n^2. \quad (14.6)$$

Integrací rovnice (14.6) vychází

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 \beta t}, \quad (14.7)$$

kde  $n_0$  je hustota volných elektronů v čase  $t = 0$  s. Pro intenzitu doznívání

luminiscenčního záření platí (jako v prvním případě)

$$I = -\frac{dn}{dt} = \frac{\beta n_0^2}{(1 + n_0 \beta t)^2} = \frac{I_0}{(1 + n_0 \beta t)^2} \quad (14.8)$$

kde  $I_0 = \beta n_0^2$ , tj. intenzita záření pro  $t = 0$  s.

V tomto případě platí pro dozrívání hyperbolický zákon a závislost je vyjádřena hyperbolou druhého stupně.

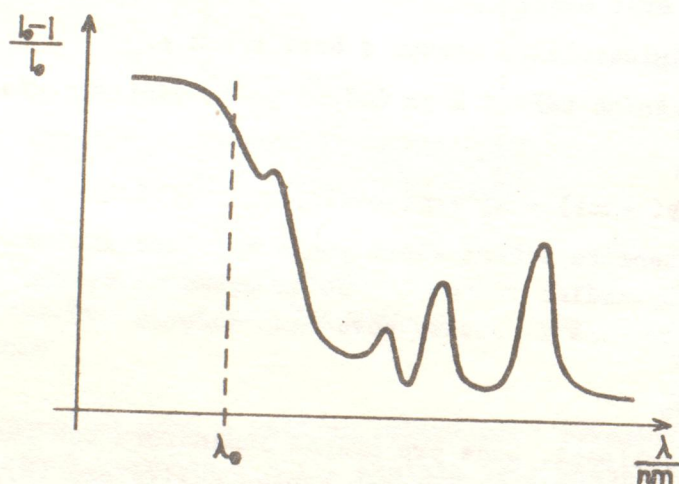
V reálných luminoforech se dozrívání řídí obecně složitějšími závislostmi na čase, protože v pevných látkách se vyskytuje vždy několik druhů luminiscenčních center. Může se řídit i exponenciálním zákonem podle vztahu (14.4).

#### 14.4. Absorpční a emisní spektra luminofořů

Absorpční spektrum získáme jako závislost poměru intenzity  $I_1$  pohlceného záření k intenzitě záření  $I_0$ , které na látku dopadá. Platí

$$I_1 = I_0 - I$$

kde  $I$  je intenzita prošlého záření. Tvar spektra je závislý na krystalové mřížce, druhu poruch a přítomnosti aktivátorů. Absorpční spektrum je uvedeno na obr. 14.5. Je vidět, že luminofor je propustný pro záření o vlnové délce větší než  $\lambda_0$  (absorpční hrana). Prudké svýšení absorpce je způsobeno vznikem



Obr. 14.5. Absorpční spektrum

páru elektron-díra (přechod elektronu z valenčního do vodivostního pásu). Pro většinu luminofořů leží absorpční hrana v oblasti ultrafialového záření (tab. 14.1). Výběžky na absorpčním spektru odpovídají absorpci na příměsových hladinách. Výška výběžku je závislá na hustotě příměsí.

Absorpční spektrum, které nám v libovolné pevné látce charakterizuje celkovou absorpci dané lát-

ky, se většinou u luminofořů rozkládá na dvě složky. Na složku, která s luminiscencí přímo souvisí (aktivní) a na složku, která s ní přímo neseuvisí.

Emisní luminiscenční spektra udávají závislost intenzity luminiscenčního záření na vlnové délce vysílaného světla. Jejich znalost je důležitá při aplikacích luminofořů. Emisní spektra většinou tvoří pásy, což je důsledek interakce luminiscenčních center s mřížkou luminofořů. I pro stejný aktivátor (např. ZnS - Cu) může docházet k vyzařování luminofořů v několika pásách, které odpovídají různým přechodům v luminiscenčním centru. Poměr intenzit v jednotlivých pásách je dán způsobem přípravy luminofořů i způsobem buzení, hustotou aktivátorových příměsí a teplotou.

#### 14.5. Užití luminiscence

Luminofořů našly velmi široké uplatnění v praktickém životě. Zde se velmi stručně seznámíme s nejdůležitějšími z nich a zjednodušeně si vysvětlíme princip funkce jednotlivých zařízení.

##### 14.5.1. Luminofořů v osvětlovací technice

K uplatnění luminofořů při osvětlování došlo v 30. tých letech, kdy byla snaha o nalezení účinnějších světelných zdrojů než byly do té doby téměř výhradně používané žárovky, jejichž účinnost byla kolem 4 %.

V zářivkách dochází k výboji v parách Hg a vzniká záření v ultrafialové oblasti spektra s účinností až 60 %. Toto záření se však musí převést na viditelné. K tomu slouží luminofor, který je nanesen na vnitřní stěně zářivkové trubice. Vhodnou volbou luminofořů lze zvolit i požadovanou barvu světla. Zářivka tedy pracuje následujícím způsobem. Při připojení zářivky na zdroj elektrické energie, vzniká v trubici elektrický proud, jehož důsledkem je záření par rtuti v ultrafialové oblasti spektra. Dopadem ultrafialového záření na luminofor dochází k vybuzení aktivátoru a k emisi fotonu ve viditelné oblasti spektra. Jedná se tedy o fotoluminiscenci. Luminofor, který se používá, musí splňovat dvě kritéria. Fotoluminiscenční spektrum by mělo být blízké spektru denního světla a maximum v excitačním spektru luminofořů by mělo být kolem 254 nm, což je nejintenzivnější čára ve spektru rtuti.

V osvětlovací technice se využívají také světelné zdroje pracující na principu elektroluminiscence. Uspořádání takového elektroluminiscenčního panelu je následující. Na skleněnou desku je na vnitřní povrch nanášena vrstvička oxidu cínitého ( $\text{SnO}_2$ ) o tloušťce několika  $\mu\text{m}$ . Tato vrstva je průhledná a je vodivá. Tvoří jednu elektrodu. Jako přívody se používají úzké proužky stříbra. Na vrstvičce  $\text{SnO}_2$  je nanášena vrstva luminofořů. Jsou to krystalky, nejčastěji ZnS, spojené izolačním průhledným lakem. Jako aktivátor se používá 0,1 % Cu (modrá barva) nebo 0,05 % Cu spolu s nepatrným množstvím Al nebo Cl (barva zelená). Jako druhá elektroda se používá např. kovová vrstva napařeného hliníku nebo vodivého stříbrného laku. Jako napájecí napětí stačí 220 V  $\sim$ . Využití zdrojů slibovalo v 60. tých letech značné možnosti v osvětlovací technice. Jejich účinnost však nepřevyšuje 2 % a proto se pozornost obrátila na aplikace elektroluminiscence jiným směrem a to např. k osvětlování indikačních přístrojů, palubních desek, kde je naopak malý jas výhodou.

##### 14.5.2. Obrazovky

Ke své činnosti potřebují obrazovky mít na vnitřní části stínítka nanášenou vrstvu luminofořů. Luminofor pod dopadem elektronového paprsku září - jedná se tedy o katodoluminiscenci. Účinnost luminofořů na obrazovkách je asi 10 %. Podle způsobu užití obrazovky má vedle účinnosti význam i barva luminiscenčního záření, doba dozrívání, jas a někdy i kontrast.

Volba luminofořů pro oscilografické obrazovky se řídí hlavně účelem, pro který je obrazovka konstruována. Většinou se používá luminofor s dobou dosvitu 0,1 ms až 10 ms, jen v některých speciálních využitích (např. poma-

loběžné osciloskopy k záznamu velmi pomalých dějů), kdy je potřeba zobrazit celý průběh děje, je potřeba užít luminofor s dlouhou dobou dozívání. Pro obrazovky pro černobílou televizi se používá směs dvou luminoforů a to ZnS-Ag, který dává katodoluminiscenci v modré oblasti a ZnCdS-Ag (nebo Cu), který emituje ve žluté oblasti. Výsledná barva je pak bílá s nazelenalým nebo namodralým odstínem. Na vrstvu luminoforu se napařuje tenká vrstva hliníku o tloušťce asi  $0,2 \mu\text{m}$  (metalizované stínítko). Tato vrstva chrání luminofor před bombardováním těžkými ionty a také odráží do prostoru před obrazovkou část luminiscenčního záření, které by dopadlo dovnitř obrazovky (tj. funguje jako zrcadlo). Tím se zvyšuje kontrast i účinnost.

Obrazovky pro barevnou televizi používají tříslučkové luminofoxy pro tři základní barvy: modrou, zelenou a červenou. Pro modrou složku se používá luminofor ZnS-Ag, pro zelenou ZnCdS-Ag nebo ZnCdS-Cu a pro červenou  $\text{YVO}_4\text{-Eu}$  nebo  $\text{Y}_2\text{O}_2\text{S-Eu}$ . Složením těchto tří barev lze docílit velkého množství různých barevných odstínů. Každá složka luminoforu na stínítku obrazovky obsahuje asi 400 000 zrníček.

V současné době jsou vyvíjeny i elektroluminiscenční televizní obrazovky. Na panelu jsou dva systémy páskových elektrod na sebe kolmé. Vhodným zapejením napětí na elektrody se dosáhne toho, že se vybudí jen oblast luminoforu na průsečíku dvou na sebe kolmých zapojených elektrod. Přepínáním napětí na jednotlivých elektrodách lze docílit toho, že lze rozsvítit libovolnou plochu obrazovky odpovídající rozměrům elektrod. Vhodnou modulací jasu jednotlivých elementů vzniká obraz. Doba buzení pro obrazovky je asi  $0,2 \mu\text{s}$ . Protože je to doba velmi krátká, je i velmi nízký průměrný jas.

Obrazovky tohoto typu nevyžadují vakuum a je možné je vyrobit v libovolných rozměrech. Mají velmi malou tloušťku. Televizory s elektroluminiscenční obrazovkou jsou již vyráběny v Japonsku.

#### 14.5.3. Detekce neviditelného záření

Detekce ultrafialového záření luminoforem je velmi jednoduchá. Ultrafialovým zářením lze vybudit fotoluminiscenci většiny luminoforů. Protože však jsou rozpracovány další a přesnější metody pro detekci tohoto záření, používá se detekce luminofoxy spíše jen orientačně. Metody na detekci infračerveného záření pomocí luminiscence se zakládají na několika principech.

1. Osvětlením luminoforu infračerveným zářením může dojít ke stimulaci fotoluminiscence, která je buzena ultrafialovým zářením (viz článek 14.2). Vhodné luminofoxy jsou např. SrS, CaS-Ce, Sm, které dávají zelenou luminiscenci, nebo ZnS-Fe, který dává modrou luminiscenci. V obou případech lze provádět detekci v oboru 750 nm až 1500 nm.

2. Využitím jevu teplotního zhášení luminiscence popsaného v článku 14.2. Používá se např. luminofor ZnCdS-Ag, Ni a lze detekovat záření až do vlnové délky  $3 \cdot 10^4 \text{ nm}$ . Citlivost metody však není velká.

Osvětlením luminoforu infračerveným zářením může dojít k uvolnění elektronů z pastí a tím k urychlení procesů dozívání. Používá se luminofor ZnS-Ag, Co a lze detekovat záření 750 nm až 1700 nm.

Pro detekci ionizujícího záření se používají např. scintilační detektory, které pracují na principu radioluminiscence. V současné době se používají

ve spojení s fotonásobičem. Jako materiály se používají siričky nebo iodidy.

Termoluminiscenční dozimetry pracují na principu termoluminiscence. Jako materiály se používají LiF-Mg, Ti,  $\text{CaF}_2\text{-Mn}$ ,  $\text{CaSO}_4\text{-Mn}$  a  $\text{CaSO}_4\text{-Sm}$ , které mají hluboké pastí. Elektrony, které jsou ionizujícím zářením excitované, se zachycují na těchto hlubokých hladinách, na nichž mohou zůstat i několik dní. Počet zachycených elektronů je úměrný energii ionizujícího záření, které se pohltilo v luminoforu. Tyto dozimetry používají pracovníci, kteří přicházejí do styku se zářením. Jsou určeny k zjištění dávky, kterou pracovník obdržel. Dozimetry se po určité době zahřejí nebo ozáří infračerveným světlem. Tím se tepelně excitují elektrony zachycené na hlubokých hladinách a tyto elektrony se dostanou do vodivostního pásu a při zářivé rekombinaci vyvolají termoluminiscenci. Z množství světla, které se při tom vyžáří, lze určit dávku, kterou pracovník obdržel.

#### 14.5.4. Obrazové měniče

Přeměna infračerveného záření na viditelné světlo není tak jednoduchá jako přeměna ultrafialového záření na viditelné světlo, tzn. na fotony o nižší energii. Při přeměně infračerveného záření na viditelné je potřeba energii dodat. Toto "zviditelnění" infračerveného záření je velmi důležité, protože umožňuje např. vidění ve tmě. Buď se předměty osvětlí infračerveným zářením nebo jsou samy jeho zdrojem. Paprsky se soustředí vhodnou optikou na obrazový měnič, kde dochází k přeměně na viditelné záření. Měnič je nejdůležitější součástí a může být založen na luminiscenčním principu. Jsou možné dva druhy měničů.

#### Vakuový měnič infračerveného záření

Ve vyčerpané trubici dopadá obraz zobrazený infračerveným světlem s použitím vhodné optiky na fotokatodu, která emituje pod dopadem infračerveného záření elektrony (vnější fotoefekt). Pomocí elektronové optiky jsou tyto elektrony soustředěny na katodoluminiscenční stínítko, kde se vybudí katodoluminiscence a vytvoří se viditelný obraz předmětu. Zvýšení účinnosti měniče se dá provést zapojením více měničů za sebou. Pracují tak, že luminofor 1. stupně se stává zdrojem elektronů pro fotokatodu 2. stupně atd. Omezením tohoto druhu měniče je, že fotokatody jsou citlivé jen do oblasti 1200 nm. Na podobném principu lze zesílit jas zobrazeného předmětu při fotografování nebo pozorování rentgenovými paprsky. Velkou výhodou je, že lze intenzitu rentgenového záření snížit.

#### Elektroluminiscenční měnič

Mezi dvěma vodivými a průhlednými vrstvami ( $\text{SnO}_2$ ) je fotovodivá vrstva citlivá na infračervené záření spolu s luminiscenční vrstvou. Na celý systém je přiloženo střídavé napětí 220 V až 600 V. Na fotovodivé a luminiscenční vrstvě se vytvoří elektrické pole o velikosti intenzity až  $10^7 \text{ V.m}^{-1}$ . V místech, kde na fotovodivou vrstvu dopadlo infračervené záření, dojde ke zvýšení vodivosti a tedy poklesu odporu a tím se zvýší napětí na luminiscenční vrstvě v daném místě a dochází k vybudení nebo zesílení luminiscence. Na podobném principu pracují i zesilovače ve viditelné oblasti spektra. I přes různá zdokonalení je účinnost těchto měničů podstatně menší než vakuových. Kromě toho mají také horší rozlišovací schopnost.

## Literatura:

- [1] Dvořák L; Kupka Z: Fyzikální podstata a využití luminiscence, SPN 1980, str. 42.

## Význam použitých symbolů

$a$	- mřížková konstanta
$E_e$	- energie excitovaného stavu
$E_M$	- energie záchytné hladiny
$E_z$	- energie základního stavu
$\Delta E$	- vzdálenost záchytné hladiny od spodního okraje vodivostního pásu
$I$	- intenzita luminiscenčního záření
$I_0$	- intenzita luminiscenčního záření pro $t = 0$ s
$L$	- střední volná dráha
$N$	- hustota luminiscenčních center
$N_0$	- hustota vybuzených luminiscenčních center
$n_0$	- hustota volných elektronů v čase $t = 0$ s
$p$	- pravděpodobnost přechodu
$q$	- konfigurační souřadnice
$q_0$	- konfigurační souřadnice pro minimální energii v základním stavu
$q_1$	- konfigurační souřadnice pro minimální energii ve vybuzeném stavu
$s$	- frekvenční faktor
$\alpha$	- konstanta rychlosti děje
$\beta$	- rekombinační koeficient
$\lambda_a$	- vlnová délka absorbovaného záření
$\lambda_e$	- vlnová délka emitovaného záření
$\nu_a$	- frekvence absorbovaného záření
$\nu_e$	- frekvence emitovaného záření
$\tau$	- doba dozívání luminiscence

## DODATKY

### A. Neuspořádané pevné látky

V tomto dodatku se budeme zabývat strukturou neuspořádaných pevných látek a potom ukážeme hlavní rozdíly mezi chováním elektronů v neuspořádaných látkách a v ideálním krystalu.

Struktura kapaliny nebo pevné látky v rovnovážném stavu je určena podmínkou, že její volná energie  $F=F(T,V)=U-TS$  nabývá svého minima. Zde  $U$  značí vnitřní energii,  $T$  absolutní teplotu a  $S$  konfigurační entropii. Při nízkých teplotách entropický člen  $-TS$  nehraje roli a rovnovážná konfigurace atomů odpovídá krystalu s dokonale uspořádanou strukturou. Přesto řada látek, např. obyčejné sklo, může i při nízkých teplotách existovat v nekystalickém stavu. Tento zdánlivý paradox lze vysvětlit tím, že při ochlazování skelné taveniny vzrůstá její viskozita natolik, že brání atomům zaujmout jejich místa v pravidelné krystalové mřížce. Při dostatečně rychlém chlazení se skelná tavenina pod bodem tání ( $T_p$ ) mění v přechlazenou kapalinu, a ta při teplotě skelného přechodu ( $T_g$ ) přechází ve sklo. Krystalické struktury odpovídá absolutní minimum volné energie  $F$ , zatímco struktury skla odpovídá některé z jejích lokálních minim. Neuspořádané pevné látky jsou tedy metastabilní a mají větší či menší tendenci samovolně krystalizovat (např. známý jev odskenění u některých skel). Význačnou vlastností všech neuspořádaných pevných látek je, že jejich struktura závisí na celé historii (zejména tepelné) daného vzorku.

Existují různé metody přípravy neuspořádaných látek:

- Ochlazením taveniny. Přitom rychlost ochlazování musí být obvykle dostatečně vysoká, např. u kovových skel řádově  $10^6$  K.s<sup>-1</sup> a vyšší, kdežto silikátová skla ani při velmi pomalém chlazení nekystalují.
- Deposice. Mezi tyto metody patří napařování ve vakuu (např. a-Si), napařování (a-Si) a dekompozice plynů (např. a-SiH<sub>x</sub> rozkladem SiH<sub>4</sub>).
- Bombardování krystalů částicemi s vysokou energií, jako jsou ionty nebo neutrony.

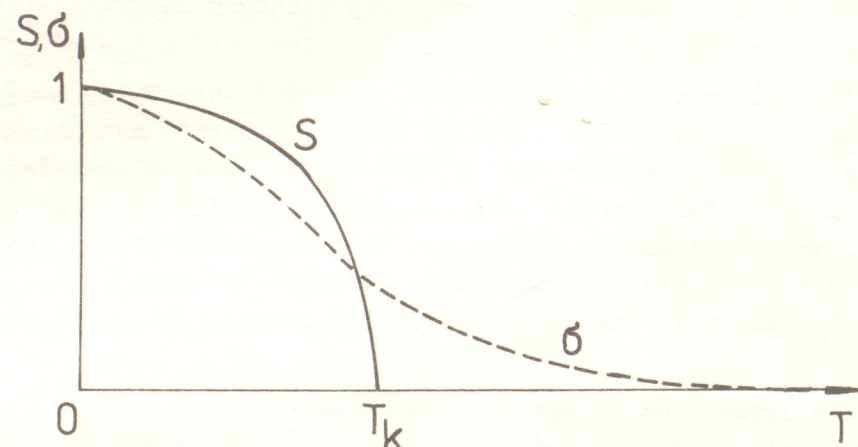
V pevných látkách se vyskytuje neuspořádanost čtyř typů:

- (1) celulární (někdy se nepřesně nazývá substituční), kdy je zachována krystalová mřížka,
- (2) topologická, kdy krystalová mřížka je nahrazena náhodnou sítí,
- (3) strukturní, kdy atomy jsou rozloženy náhodně jako v kapalině a
- (4) spojitá, kdy některý parametr určující strukturu je spojitě proměnný.

Nyní uveďme některé příklady neuspořádaných pevných látek.

1. Příměsi v krystalu. Mohou nahrazovat některé atomy v původní krystalové mřížce (substituční příměsi), nebo mohou zaujímat volné prostory mezi atomy mřížky (intersticiální příměsi). Při nízkých koncentracích a pokud mezi příměsovými atomy nejsou silné přitažlivé interakce, příměsi v krystalu tvoří ideální mřížkový plyn. Vakance se chovají podobně jako substituční příměsi.
2. Slitiny. Mohou být kovové s převahou kovové vazby nebo polovodivé s převahující kovalentní vazbou. Vyznačují se celulární neuspořádaností. Mohou být substituční (např. Ni<sub>x</sub>Cu<sub>1-x</sub>, Ge<sub>x</sub>Si<sub>1-x</sub>) nebo intersticiální (např. nestechiometrické hydridy a karbidy kovů). U slitin je krystalová mřížka zachována,

avšak mřížkové body jsou náhodně obsazovány atomy různých typů, event. atomy jedné ze složek (např. H, C) jsou náhodně rozmístěny do intersticiálních poloh. Neuspořádané slitiny mohou jevit tendenci k samovolnému uspořádání (např. CuZn, CuAu, TiMo) nebo k segregaci složek (např. AlAg, WMo) v závislosti na tom, zda je energeticky výhodnější, aby nejbližšími sousedy byly atomy různého nebo stejného druhu. Jako příklad uspořádávající se slitiny uveďme  $\beta$ -mosaz (CuZn). Její krystalová mřížka má strukturu CsCl, tj. je složena ze dvou vzájemně se pronikajících prostých kubických podmřížek.<sup>\*</sup> Jedna z podmřížek je přednostně obsazována atomy Cu, druhá atomy Zn. Je-li slitina připravena rychlým ochlazením taveniny, atomy Cu a Zn se náhodně rozdělí na obě podmřížky a jde o neuspořádanou slitinu. Žiháním neuspořádané slitiny nebo pomalým ochlazením taveniny lze připravit slitinu v uspořádaném stavu, kdy jedna podmřížka je obsazena atomy Cu a druhá atomy Zn. Uspořádání slitiny AB lze charakterizovat buďto parametrem uspořádání na dálku  $S = (R - W) / N$ , kde R je celkový počet atomů (A i B) umístěných na správné podmřížce (right), W je celkový počet atomů umístěných na nesprávné podmřížce (wrong) a  $N = R + W$  je celkový počet všech atomů na obou podmřížkách, nebo parametrem uspořádání na blízko  $\bar{\sigma} = (N_{AB} - N_{AA} - N_{BB}) / N_2$ , kde  $N_{AB}$  je počet dvojic nejbližších sousedů A-B;  $N_{AA}$  a  $N_{BB}$  jsou definovány podobně a  $N_2 = N_{AB} + N_{AA} + N_{BB}$  je celkový počet dvojic nejbližších sousedů ve slitině (viz obr. A.1). Stupeň uspořádání lze určit z difrak-



Obr. A.1. Teplotní závislost parametrů uspořádání na dálku (S) a na blízko ( $\bar{\sigma}$ ) binární slitiny AB se strukturou CsCl.  $T_k$  značí kritickou teplotu, při níž uspořádání na dálku vymizí.

čních experimentů (difrakce rentgenových paprsků nebo neutronů). U zcela uspořádané slitiny lze  $N_A$  atomů A a  $N_B$  atomů B rozmístit na mřížce celkem  $\binom{N}{N_A} = \binom{N}{N_B}$  způsoby,  $N = N_A + N_B$ . Přitom pravděpodobnost obsazení mřížkového bodu atomem A je  $x = N_A / N$  a atomem B je  $y = 1 - x = N_B / N$  a nezávisí na tom, jakými atomy jsou obsazeny ostatní uzly mřížky.

3. Náhodné vrstvení. Některé kovy mohou mít strukturu hexagonální s nejtěsnějším uspořádáním (pořadí atomových vrstev ..ABABAB..) nebo kubickou plošně

\* ) Pojem "podmřížka" je zde odlišný od pojmu "magnetická podmřížka" v článku 9.6.

centrovanou (pořadí atomových vrstev ..ABCABC..). Za určitých okolností (např. malé částice Co) je možná i struktura charakterizovaná náhodným uspořádáním ..ABCBABAC.. vrstev atomů. Ve dvou dimenzích jde o látku krystalickou, ve třetí dimenzi je látka neuspořádaná s neuspořádaností celulárního typu.

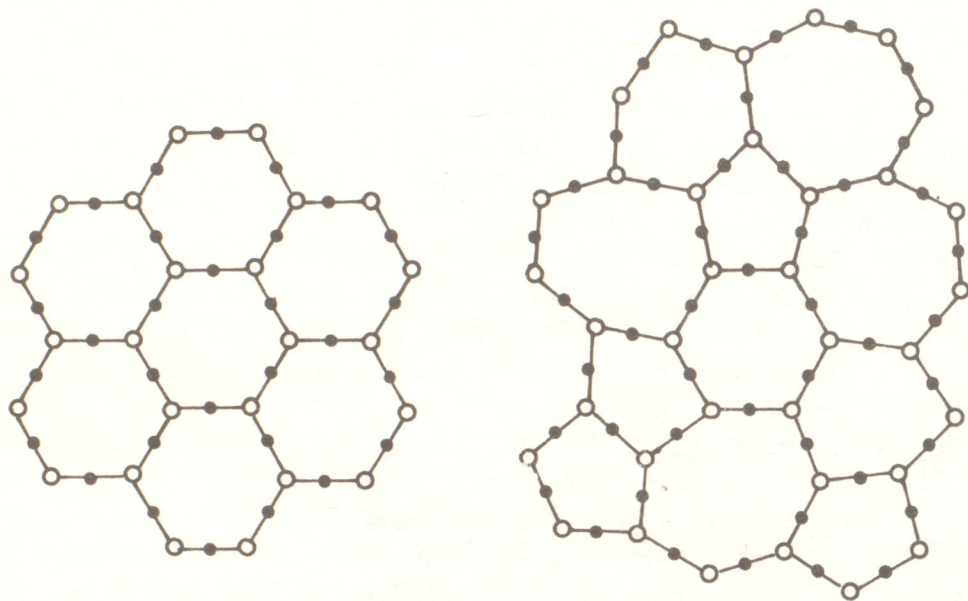
4. Dislokace. Krystal obsahující dislokace je z lokálního hlediska (odhlédneme-li od jádra dislokace) ideálním krystalem, z globálního hlediska jde však o topologicky neuspořádanou strukturu.

5. Hranice zrn. Rozhraní mezi různě orientovanými a vzájemně posunutými krystalitami v polykrystalickém materiálu jsou topologicky neuspořádaná a navíc mohou obsahovat různé příměsi (precipitáty) vyloučené při krystalizaci materiálu. Spolu s dislokacemi rozhodujícím způsobem ovlivňují mechanické vlastnosti kovových konstrukčních materiálů.

6. Amorfni kovy (kovová skla). Obvykle obsahují 70-80% přechodového nebo vzácného kovu a 20-30% nekovu (metaloidu), např.  $Au_{70}Si_{30}$ ,  $Pd_{80}Si_{20}$ ,  $Ni_{76}P_{24}$ ,  $Co_{78}P_{22}$ , atd. Chemická vazba je převážně kovová s jistým podílem kovalentní vazby, které se účastní i d-stavy kovu. Neuspořádanost kovových skel je strukturního typu. Jejich strukturu si můžeme představit jako náhodné uspořádání velkých tuhých koulí, které reprezentují atomy kovu, přičemž mezery mezi nimi jsou vyplněny malými atomy metaloidu. Ty mají významnou funkci stabilizovat strukturu: tím je také vysvětleno, proč čisté kovy nelze připravit v amorfním stavu. Kovová skla mají vynikající vlastnosti - vysokou pevnost, korozivzdornost a jeví-li spontánní magnetické uspořádání, jsou výborným měkkým magnetickým materiálem.

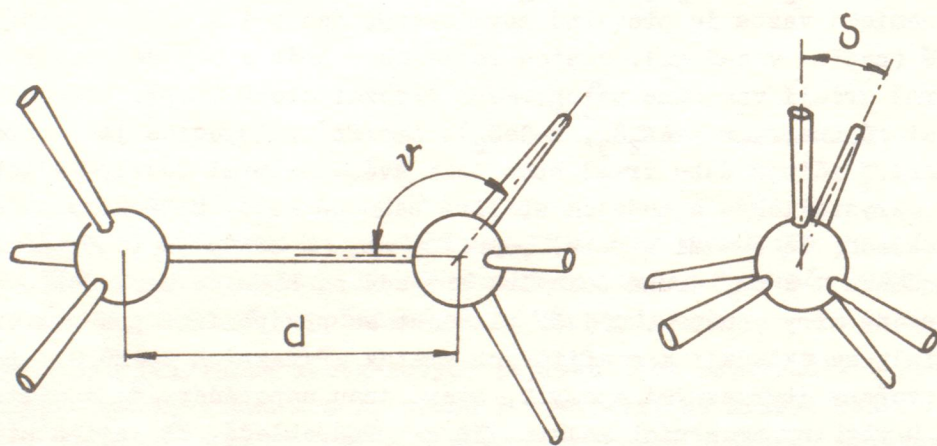
7. Amorfni (sklovité) polovodiče. Mohou být připraveny depozičními technikami (např. a-Si, a-Ge, a-SiH<sub>x</sub>, a-SiF<sub>x</sub>) nebo bombardováním krystalů částicemi (např. a-Si). Některé mohou být připraveny i rychlým ochlazením taveniny (např. a-Se, a-GeS<sub>2</sub>, a-As<sub>2</sub>S<sub>3</sub>, a-SiO<sub>2</sub>); ty se obvykle nazývají sklovité polovodiče. Chemická vazba je převážně kovalentní, často i s určitým podílem vazby iontové (např. v a-SiO<sub>2</sub>). Jistou roli mohou hrát i Van der Waalsovy síly, které patrně určují vzájemné polohy mezi řetězci atomů (např. v a-Se) a mezi vrstvami atomů (např. v a-As<sub>2</sub>S<sub>3</sub>, a-GeS<sub>2</sub>). Amorfni polovodiče jsou topologicky neuspořádané. Určitou dobu trval spor mezi dvěma možnými modely jejich struktury: mikrokrystalickým a modelem spojitě náhodné sítě. Mikrokrystalický model předpokládá, že (velmi zhruba) polovina objemu látky je tvořena mikrokrytaly o průměru 1-2 nm, druhá polovina připadá na hranice zrn. Tento model je dnes do značné míry opuštěn, a jeho platnost se předpokládá pro některé druhy a-C (krystalizace se skládají z grafitových vrstev třívalných atomů C, hranice zrn jsou tvořeny čtyřvalnými atomy C, které jsou uspořádány do spojitě náhodné sítě). U většiny amorfni polovodičů se předpokládá, že jejich struktura je dána spojitou náhodnou sítí (Zachariasen, r. 1932). Spojitě náhodná síť (obr. A.2) je takové náhodné uspořádání atomů, v němž každý atom je spojen tolika vazbami se svými sousedy, kolik činí jeho valence. Je to tedy zcela propojená struktura, v níž nejsou žádné nenasycené vazby ani z žádného atomu nevycházejí žádné nadbytečné vazby. Tak např. v a-Si má každý atom Si 4 nejbližší sousedy, s nimiž je spojen kovalentními vazbami. Ukazuje se, že délky vazeb a úhly sevřené vazbami vycházejícími z jednoho atomu (vazebné úhly) fluktuují poměrně málo, typické hodnoty diferencí činí 1% délky a 10°. Střední





Obr. A.2. Dvouřizměrná ilustrace rozdílu mezi krystalem a spojitou náhodnou sítí.

hodnoty jsou blízké hodnotám v odpovídajícím krystalu. Znamená to, že lokální uspořádání atomů v krystalickém a v amorfním polovodiči je stejné. Hlavním zdrojem neuspořádanosti náhodné sítě je to, že diedrické úhly mohou nabývat libovolných hodnot. Diedrický úhel je úhel pootočení dvou atomů spojených vazbou kolem této vazby (viz obr. A.3). Diedrický úhel určuje vzájemnou orientaci druhých sousedních vazeb. Srovnajme např. strukturu krystalického a amorfního Si. V krystalu jsou všechny diedrické úhly  $\varphi = 60^\circ$  a atomy tvoří šestičetné kruhy, v a-Si diedrické úhly nabývají libovolných hodnot  $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$  a atomy mohou tvořit 5-četné, 6-četné, 7- i vícečetné kruhy. U reálných amorfních polovodičů ideální spojitá náhodná síť obsahuje i různé poruchy, např. cizí atomy, atomy s chybějící nebo s přebytečnou chemickou vazbou apod. Koncentrace poruch je velmi silně závislá na způsobu přípravy vzorku, typická hodnota bývá  $10^{-4}$ . Ukazuje se, že spojitá náhodná síť nemusí



Obr. A.3. Délka vazby  $d$ , vazebný úhel  $\varphi$  a diedrický úhel  $\varphi'$ .

taci druhých sousedních vazeb. Srovnajme např. strukturu krystalického a amorfního Si. V krystalu jsou všechny diedrické úhly  $\varphi = 60^\circ$  a atomy tvoří šestičetné kruhy, v a-Si diedrické úhly nabývají libovolných hodnot  $0^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$  a atomy mohou tvořit 5-četné, 6-četné, 7- i vícečetné kruhy. U reálných amorfních polovodičů ideální spojitá náhodná síť obsahuje i různé poruchy, např. cizí atomy, atomy s chybějící nebo s přebytečnou chemickou vazbou apod. Koncentrace poruch je velmi silně závislá na způsobu přípravy vzorku, typická hodnota bývá  $10^{-4}$ . Ukazuje se, že spojitá náhodná síť nemusí

být prostorově homogenní jako krystalová mřížka, ale může obsahovat různé nehomogenity: dutiny (voidy), vrstvy, sloupky, střídavě oblasti s vyšší a nižší hustotou, příp. oblasti s různým chemickým složením.

8. Makromolekulární látky. V této velmi rozsáhlé skupině látek může být neuspořádanost substituční (např. v kopolymerech), spojitá (spojitě proměnné konformace molekul) i topologická (náhodně zesíťované polymery).

Nyní stručně pojednáme o elektronové struktuře neuspořádaných pevných látek. Řada výsledků ovšem platí i pro další typy elementárních excitací, např. pro fonony. Neuspořádané látky, na rozdíl od krystalů, nemají translační symetrii a proto pro ně neplatí Blochův teorém. To znamená, že kvaziimpuls není dobrým kvantovým číslem. Teorie elektronové struktury neuspořádaných látek je proto značně složitější než v případě ideálních krystalů. Je však zajímavé, že řada vlastností, např. existence dovolených a zakázaných pásů energií elektronů, zůstává v platnosti i u neuspořádaných látek, ačkoliv by se mohlo zdát, že jsou podstatně závislé právě na translační symetrii krystalu.

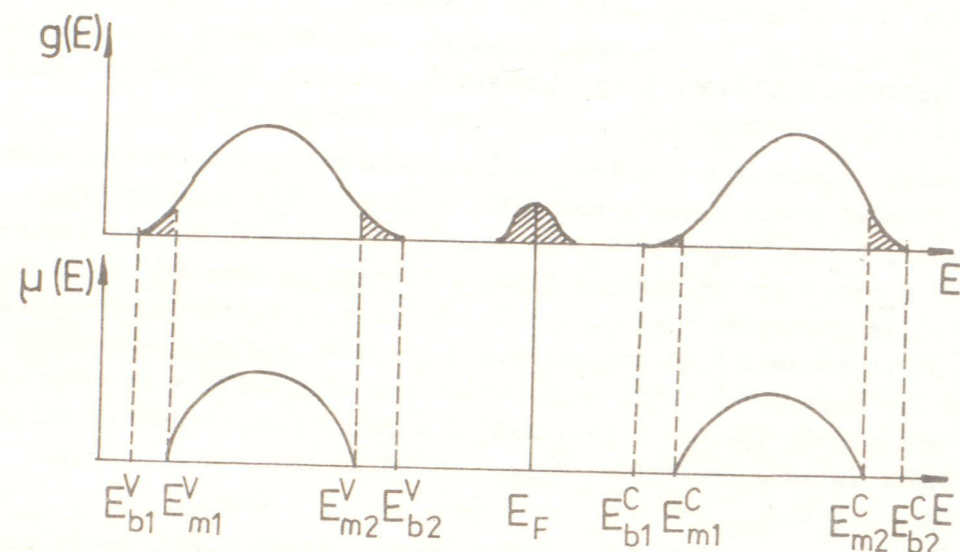
Při výpočtu nějaké fyzikální vlastnosti neuspořádané látky, např. hustoty elektronových stavů, elektrické vodivosti, magnetické susceptibility, elektronové složky měrné tepelné kapacity nebo např. optických konstant, můžeme v principu postupovat dvojím způsobem:

(1) Vybereme si jednu typickou konfiguraci atomů, která nám poslouží jako vzorek studované látky. K tomuto účelu často postačí model obsahující řádově stovky atomů. Musíme ovšem znát souřadnice jednotlivých atomů a vědět, které atomy jsou navzájem spojeny chemickými vazbami. S celým vzorkem pak zacházíme jako s velkou molekulou a použitím vhodně modifikovaných metod výpočtu elektronové struktury molekul můžeme zjistit elektronovou strukturu a další vlastnosti neuspořádané látky. Tento přístup je vhodný u látek se strukturální a s topologickou neuspořádaností a jde v podstatě o numerický experiment. (2) Druhý přístup, vhodný zejména pro látky s celulární neuspořádaností, vychází z této úvahy: nezajímají nás vlastnosti jedné speciálně vybrané konfigurace, ale průměrné vlastnosti, získané středováním přes možné konfigurace atomů dané neuspořádané látky. Toto konfigurační středování dovoluje problém do určité míry zjednodušit a dokonce i získat analytické výsledky. Poznamenejme, že hrubě nesprávné by bylo středovat vlnovou funkci, která je amplitudou pravděpodobnosti. Středovat lze až pravděpodobnosti nebo maticové elementy operátorů.

Hustota elektronových stavů  $g(E)$  v neuspořádané látce se od hustoty stavů v krystalu obvykle liší tím, že má hladší průběh. Zásadní odlišnost může však být v charakteru vlastních stavů. Vlnové funkce elektromy v krystalu jsou rozlehlé, tj. jejich amplituda je nenulová v celém krystalu (podobně jako u rovinné vlny), a proto nemohou být normovány na jedničku, neboť integrál  $\int dV |\psi(\vec{r})|^2$  přes nekonečný krystal diverguje. Naproti tomu v neuspořádaných látkách vedle rozlehlých stavů mohou existovat i stavy lokalizované v určité části prostoru (Anderson, r. 1958), jejichž vlnové funkce jsou (podobně jako vlnové funkce vázaných stavů) kvadraticky integrabilní,  $\int dV |\psi(\vec{r})|^2 < +\infty$ .

Na představách o rozlehlých a lokalizovaných stavech je založen model

elektronové struktury amorfních polovodičů, který navrhli Cohen, Fritzsche, Mott a Ovshinsky (r. 1969, 1970) (viz obr. A.4). Uvnitř valenčního a vodi-



Obr. A.4. Schema modelu Cohena, Fritzscheho, Motta a Ovshinského. Jsou znázorněny závislosti hustoty stavů  $g(E)$  a pohyblivosti elektronů  $\mu(E)$  na energii pro valenční (index v) a vodivostní pás (index c). Hrany páسů jsou označeny  $E_{b1}^v, E_{b2}^v$  atd., hrany pohyblivosti, které oddělují rozlehlé stavy od lokalizovaných, jsou označeny  $E_{m1}^v, E_{m2}^v$  atd. Oblasti lokalizovaných stavů jsou vyšrafovány. Mezi valenčním a vodivostním pásem jsou znázorněny stavy pocházející od různých defektů, které fixují polohu Fermiovy hladiny  $E_F$ .

vodivostního pásu leží tzv. hrany pohyblivosti, které od sebe oddělují oblasti rozlehlých a lokalizovaných stavů. Pohyblivost elektronů  $\mu(E)$  v rozlehlých stavech je různá od nuly, zatímco v lokalizovaných stavech je nulová. Uvnitř zakázaného pásu energií je oblast s nemulovou hustotou (lokalizovaných) stavů, které pocházejí od různých defektů mřížky. Tyto stavy fixují polohu Fermiovy hladiny  $E_F$ . Z tohoto mj. vyplývá, že ke stejnosměrné elektrické vodivosti  $\gamma$  může přispívat několik mechanismů:

- (1) Tepelná excitace elektronů z oblasti lokalizovaných stavů v okolí  $E_F$  na hranu pohyblivosti  $E_m$ :  $\gamma = \int_0 \exp[-(E_m - E_F)/k_B T]$ .
- (2) Přeskoky elektronů mezi lokalizovanými stavy ve chvostu pásu zprostředkované fonony. Teplotní závislost tohoto příspěvku má rovněž aktivační charakter (jako v bodě 1).
- (3) Přeskoky elektronů mezi lokalizovanými stavy v okolí  $E_F$ , zprostředkované fonony. Střední délka skoků zde závisí na teplotě a příspěvek je tvaru:  $\gamma = \gamma_0(T) \exp(-A/T^{1/4})$  (Mott, r. 1969).

U kovových slitin Fermiova hladina leží v oblasti rozlehlých stavů vodivostního pásu. Měrný odpor slitin je dán v prvním přiblížení Matthiessenovým pravidlem (r. 1864):  $\rho = \rho_1(T) + \rho_0(x)$ , kde teplotně závislý člen  $\rho_1(T)$  pochází od rozptylu na fononech (obvykle  $\rho_1(T) \sim T^5$  při nízkých teplotách  $T$ ) a  $\rho_0(x)$  je tzv. zbytkový odpor, který je dán rozptylem na příměsích, příp. na náhodném rozložení atomů slitiny a je na teplotě nezávislý. V nejhrušší

aproximaci pro dokonale neuspořádanou slitinu  $A_x B_{1-x}$  je  $\rho_0(x) \sim x(1-x)$  (tzv. Nordheimovo pravidlo).\*)

## B. Struktura a vlastnosti kapalných krystalů

Kapalně krystalické látky jsou známy již od konce minulého století. Avšak teprve nyní, díky úspěchům experimentální techniky, vědci se znovu a už po třetí, vracejí k této problematice. Přibližně kolem r. 1960 bylo poukázáno na velké aplikační možnosti kapalných krystalů v elektronice, technice, biologii a medicíně, čímž se také podnítil nový zájem fyziků o základní výzkum kapalných krystalů. Snad žádný objev neměl tak pohnutý osud jako kapalně krystalové, jejichž samotná existence byla přijata s velkými pochybnostmi, které trvaly téměř 20 let.

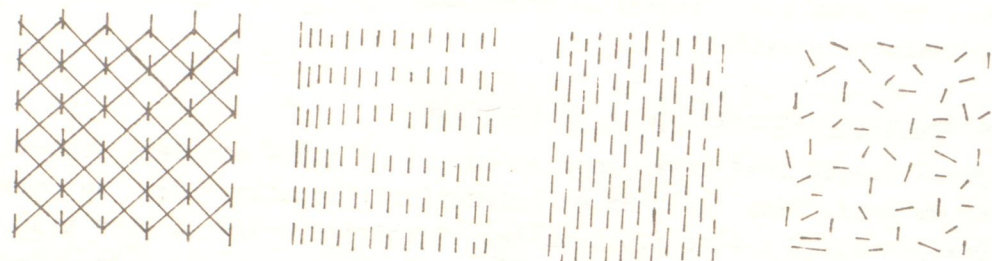
Kapalně krystalický stav, neboli stav mezomorfni, je charakterizován strukturálními vlastnostmi podobnými vlastnostem pevných krystalů a kapalin zároveň. Obecně kapaliny se vyznačují tím, že tekou, mohou tvořit kapky a přijímají tvar nádoby, do které jsou umístěny. Uspořádání molekul není sice úplně chaotické jako v plynech, ale zdaleka není tak pravidelné jako uspořádání molekul nablízko. Proto se zdá, že kapalina je pravým opakem pevného krystalu (uspořádání na velkou vzdálenost), a proto název kapalně krystal vypadá přinejmenším kuriozně.

Poprvé na kapalně krystalické látky upozornil rakouský botanik Reinitzer v r. 1888, který u syntetizovaného cholesterylbenzoátu našel dva body tání (při  $t = 145^\circ\text{C}$  dostal kalnou kapalinu, která při  $t = 179^\circ\text{C}$  znovu zprůsvitněla). Vzorek byl poslán německému fyzikovi Lehmannovi, který identifikoval zakalené oblasti jako nový stav, který jeví optické vlastnosti krystalu a nazval ho stavem kapalně krystalickým s velkou optickou anizotropií. Je to nový termodynamický stav, který se liší od stavu kapalného svými elektrickými, optickými a magnetickými vlastnostmi. K r. 1908 už bylo syntetizováno 250 kapalně krystalických sloučenin. V naší době je jich nad 10.000 a každým rokem jich přibývá. (Každá dvoustá nově syntetizovaná organická látka je kapalně krystalickým.) Není zatím známo, že by byly jiné kapalně krystalické látky, než organické. Podle předpokladu Friedela, Lehmana aj. kapalně krystal tvoří pouze látky, jejichž molekuly mají podlouhlou tyčkovitou formu.\*\*)

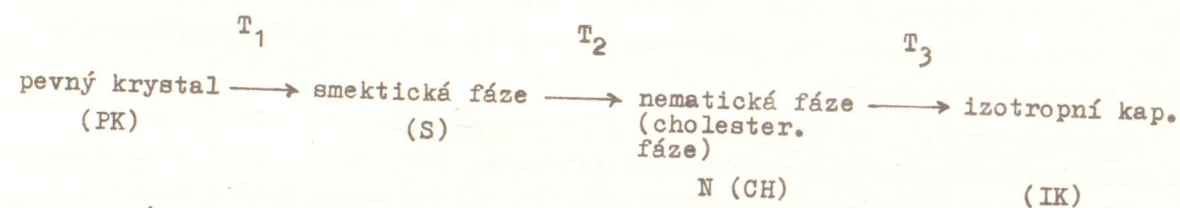
Obecně rozlišujeme termotropní a lyotropní kapalně krystalové. Termotropní kapalně krystalové přecházejí z fáze krystalické do fáze izotropní přes mezofázi kapalně krystalické pod vlivem teploty, tj. zahřejeme-li pevný krystal mezogemu - látky schopné tvořit kapalně krystal - na určitou teplotu, struktura se mění, jak vidíme na obr. B.1, až nakonec dostaneme izotropní kapalinu. Celkově přechod ze stavu krystalického do stavu izotropní kapaliny můžeme schematicky psát takto:

\*) K této problematice viz též článek 8.5.

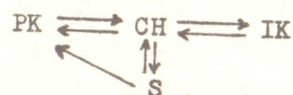
\*\*\*) V roce 1977 byla předpověděna existence fází, tvořených diskotickými molekulami (tj. molekulami přibližně kruhového tvaru). Později v r. 1979 byly takové struktury pozorovány a prostudovány A. Levelutem.



Obr. B.1



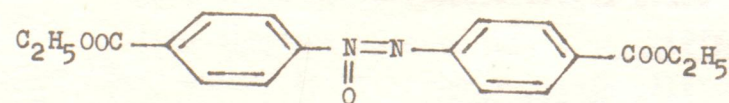
Toto schéma nemá ovšem obecnou platnost; existují různé varianty naznačených fázových přechodů, např. cholesterylcaprinat má schéma



Kromě termotropních kapalných krystalů existuje velká skupina tzv. lyotropních kapalných krystalů, což jsou krystaly vzniklé při rozpouštění látek ve vodě a jiných kapalinách (vodní roztoky mýdel, virů tabákové mozaiky, některých polypeptidů). Lyotropní kapalně krystaly se mohou tvořit i ve více-komponentních systémech. Je známo, že některé organické látky nejsou rozpustné ve vodě, ale jsou dobře rozpustné ve vodních roztocích mýdla (solubilizace). Dochází ke tvorbě tzv. mielinových forem. To jsou trubice s dvojitou vrstvou molekul mýdla rozdělených vrstvou vody. Uvnitř trubice je lyotropní kapalně krystal. Lyotropní kapalně krystaly hrají velkou roli ve funkci živého organismu. Zásadní úlohu hrají ve struktuře a funkci biologických membrán, řídicích životně důležité biologické procesy v živých systémech.

Kapalně krystalické látky se vyskytují v několika mezofázích:

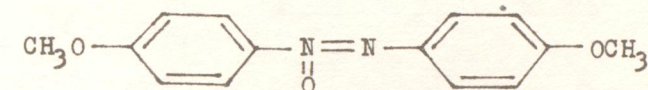
1. mezofáze smektická (smégma = mýdlo) je taková mezofáze, která má strukturu paralelních vrstev, ve kterých molekuly jsou uspořádány v řadách. Dlouhé osy molekul svírají různé úhly s rovinou vrstvy. Vrstvy volně klouzají jedna podél druhé a můžeme říci, že se chovají jako dvourozměrná kapalina. Typickým smektickým kapalným krystalem je ethylový ether n-azoxybenzoové kyseliny:



Pevné krystaly této látky se taví při  $t = 114^{\circ}\text{C}$  a při teplotě  $120^{\circ}\text{C}$  je to izotropní kapalina. Když ochladíme na teplotu  $120^{\circ}\text{C}$ , v kapalině se začínají objevovat zárodky kapalně krystalické fáze - tyčky, rychlost růstu ve směru osy je téměř pětkrát větší, než ve směru radiálním. Pod mikroskopem při zkřížených polaroidech vidíme světlé tyčky, což svědčí o optické anizotropii.

Kapalně krystaly jsou dvojlomné a opticky se chovají jako jednoosé kapalně krystaly tohoto druhu. Tvoří smektické kapky, které jsou obvykle vypouklého tvaru, ale umístíme-li je na rovný a čistý povrch, dostaneme kapky hranaté, kde výška stupínku je úměrná tloušťce smektické vrstvy. Při mechanické vibraci můžeme pozorovat volný pohyb vrstev vůči sobě. Toto je důsledek smektického uspořádání molekul ve volně pohyblivých vrstvách. Smektické kapalně krystaly nejsou opticky aktivní, ale jsou silně dichroické. Tj. paprsky světla, jejichž elektrický vektor má směr souhlasný se směrem osy molekul, jsou absorbovány více, než paprsky s kolmou orientací vektoru  $\vec{E}$ , proto absorpce je závislá na směru dopadajícího svazku. Při dopadu bílého světla vidíme vzorek duhově zbarvený. Tomuto jevu říkáme pleochroismus.

2. mezofáze nematická (néma = nit) je taková, v níž molekuly jsou seřazeny vedle sebe tak, že jejich dlouhé osy jsou paralelní a těžiště jsou volně pohyblivá (jako snop slámy). Uspořádání je méně symetrické než u smektických kapalných krystalů. Struktura není vrstevnatá. Typický kapalně krystal nematického druhu je n-azoxyanizol:

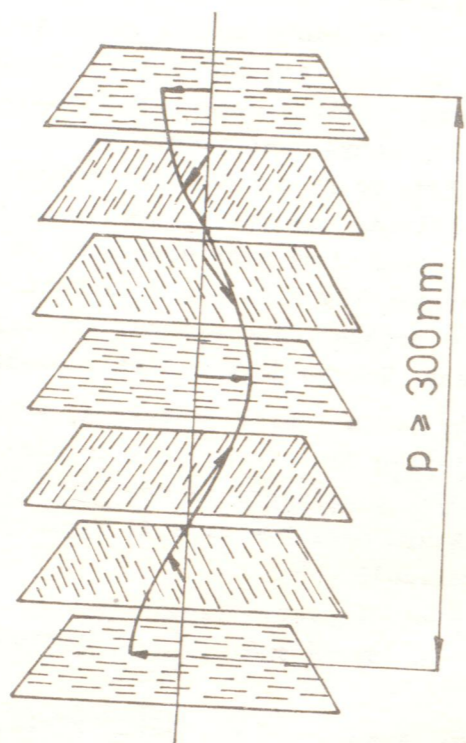


Oblast existence mezofáze je od  $116^{\circ}\text{C}$  do  $136^{\circ}\text{C}$ . Místa, kde se mění orientace molekul (disinklinace) při pozorování v mikroskopu v bílém světle, jeví se jako nitě - vlákna. Nematické kapalně krystaly nejsou opticky aktivní, ale optickou aktivitu mohou získat otočením podložních skel vůči sobě o  $90^{\circ}$ . Nematická mezofáze je silně dvojlomná, pro n-azoxyanizol rozdíl indexů lomu

$\Delta n = 0,37$  při  $120^{\circ}\text{C}$ , kdežto pro islandský vápenec je to jen 0,17. Nematické kapalně krystaly jsou rovněž silně dichroické.

Deriváty cholesterolu, který sám není kapalným krystalem, tvoří zvláštní druh nematické fáze, tzv. cholesterickou mezofázi. Molekuly jsou uspořádány ve vrstvách, ale vrstvy jsou seřazeny tak, že směr dlouhé osy tvoří šroubovici s výškou závitu řádově  $P \approx 300$  nm (záleží na druhu KK a na teplotě) o tloušťce vrstvy přibližně 0,3 nm. Cholesterické kapalně krystaly se vyznačují vysokou optickou aktivitou  $\alpha$  řádově  $30.000^{\circ}/\text{mm}$ , některé látky dokonce i  $60$  až  $70.000^{\circ}/\text{mm}$ . Obyčejné organické kapaliny mají  $\alpha \approx 300^{\circ}/\text{mm}$ . Typickým cholesterickým kapalným krystalem je cholesterylacinnamat nebo cholesterylpropionat  $\text{C}_{27}\text{H}_{45}\text{OOC}_2\text{H}_5$  s teplotním intervalem mezofáze od  $102^{\circ}\text{C}$  do  $116^{\circ}\text{C}$ .

Na závěr několik slov o chemické struktuře kapalně krystalických látek. Většinou jsou kapalně krystalické látky tvořeny tyčkovitými molekulami, většina z nich obsahuje benzenové jádro se substitucí v para-poloze. Při substituci v meta- nebo orto-poloze schopnost tvořit kapalně krystaly mizí. Benzenových jader může být různý počet. Pouze jedno jádro obsahuje kapalně krystalická látka trans-n-methoxykořicová kyselina, jinak čím více benzenových jader obsahuje látka, tím větší je její schopnost tvořit kapalně krystal. Jsou známy kapalně krystalické látky s naftalenovým jádrem, avšak je jich velmi málo. Zvláštní skupinu tvoří kapalně krystalické látky s cyklopentanonperhydrofenantrenovou skupinou a dlouhým bočním řetězcem (estery cholesterolu). Řidčeji se setkáváme s kapalně krystalickými látkami mezi alifa-



Obr. B.2

tickými sloučeninami, ačkoliv jejich studium má velký praktický význam (mýdla, polymery).

Jak již bylo řečeno výše, obnovený zájem o studium kapalně krystalických sloučenin je dán jejich velkými aplikačními možnostmi v oblasti techniky, medicíny a biologie. Například nematické lyotropní kapalně krystalové sloučeniny jsou používány k výrobě polaroidů. Tenká vrstva nematického kapalně krystalového sloučeniny se umístí mezi dvěma orientovanými průsvitnými destičkami. Po určitém čase rozpouští se odpaří a zůstane tenká vrstva orientovaných dichroických molekul, tj. polaroid. Cholesterické kapalně krystalové sloučeniny mohou sloužit jako konventory infračerveného záření na záření viditelné. Tak úspěšně se vizualizuje paprsek plynového laseru o vlnové délce  $\lambda = 3,3 \mu\text{m}$ . Schopností cholesterických krystalů citlivě měnit barvu s teplotou je používáno k měření teplot a k aplikaci v nedestruktivní defektoskopii a lékařské diagnostice. Cholesterické kapalně krystalové sloučeniny pod vlivem teploty citlivě mění svou strukturu (viz obr. B.2). Mění se velikost výšky závitů  $P$  šroubovice a tudíž i maximální vlnová délka selektivně odraženého světla, protože vzorek funguje jako optická mřížka s proměnlivou šířkou štěrbin (= výšce závitů šroubovice  $P$ ). Tak vzorek svou barvou jemně reaguje na strukturu molekuly a s ní i na změny teploty. Cholesterické kapalně krystalové sloučeniny jsou velmi citlivé na přítomnost par různých chemických látek. S jejich pomocí se dá stanovit přítomnost chemické látky v koncentraci 0,0001%. Neobyčejně velkou budoucnost a význam má studium elektrooptických vlastností kapalně krystalových sloučenin pro aplikace v elektronice a sdělovací technice. Jsou známé a široce používané tzv. displeje. Jejich funkce je založena na jevu dynamického rozptylu. Je to jeden z mnoha elektrooptických jevů v kapalně krystalových sloučeninách, kdy při naložení elektrického

pole na kapalně krystalický vzorek dochází k turbulencím látky, na nichž se silně rozptyluje dopadající bílé světlo. Místa, kde pole nepůsobí, zůstávají čirá. To dává možnost získání různých obrazců naložením elektrického pole různé konfigurace. Velmi složitou úlohu hrají kapalně krystalové sloučeniny ve funkci živého organismu, růstu, látkové výměny aj. Proto studium jejich vlastností pomůže poznat tajemství biologických procesů a odhalit zákonitosti organického světa.

#### Doporučená literatura

- [1] Čiřáková I.G.: Židkijé krystally, Izdatělstvo Nauka Moskva 1966
- [2] Blinov L.M.: Elektro- a magnetooptika židkych kristallov, Izdatělstvo Nauka Moskva 1978
- [3] De Žen P.: Fizika židkych kristallov, Izdatělstvo Mir Moskva 1977

#### C. O významu fyziky pevných látek

Prohlížíme-li starší souborná díla o fyzice, obvykle tam fyziku pevných látek (dále FPL) nenajdeme. Jako samostatný obor je mezi fyziky - odborníky chápána zhruba od druhé světové války. Ale do širší veřejnosti a do škol proniká povědomí o ní mnohem pomaleji. Např. ani na středních školách v ČSSR včetně gymnázií se s ní žáci při fyzice nesetkávají jako s celkem. Učí se o stavbě krystalové mřížky, o polovodičích atp., ale obor FPL ve výuce vůbec nevystupuje. (Proto bývá i zájem o vysokoškolské studium FPL neúměrně malý.)

Na druhé straně FPL má obrovský společenský význam. Vždyť asi třetina - v některých zemích i více - profesionálních fyziků pracuje právě ve FPL. Talentovaní žáci, kteří jeví o studium fyziky zájem, mají i u nás značnou pravděpodobnost uplatnění právě v tomto oboru (jistě větší než v krásné a přitažlivé astronomii). Tři články, které následují, mají za úkol pomoci budoucím učitelům fyziky, aby si o významu FPL a jejího výkladu ve škole utvořili ucelenější názor. Je pravděpodobné, že čtenář bude nacházet postupně méně triviální a méně očividné aspekty FPL.

#### C.1. Význam FPL v technických a dalších aplikacích

Každodenní život, nabídka průmyslového zboží, obrázkové časopisy a další běžné zdroje informací přece jen o FPL hlasitě vypovídají. Sotva lze přece přehlédnout význam polovodičů pro sdělovací i výpočetní techniku, nových magnetických materiálů pro záznam informací atd. Čtenáři se silnějším technickým zájmem vědí ještě o netradičních materiálech pro raketové motory, jaderné reaktory nebo pro turbíny pracující při velmi vysokých teplotách; o tzv. kompozitních (složených) materiálech (kapitola 5), které svou lehkostí a pevností rychle vytlačují kovové slitiny v leteckém průmyslu; o světlovodech s neuvěřitelně nízkou absorpcí světla, o materiálech uplatňujících se v kosmonautice... I teflonové pánve nebo zdokonalené holicí čepelky stojí za zmínku a patří k přínosu vědy pro život současnosti.

Vyjděme tedy z nesporně správného zjištění, že FPL má v životě průmyslo-

vě vyspělé společnosti značný význam svými aplikacemi, ale podívejme se na ně trochu blíže.

Především, pokud jde o přípravu technických materiálů, umožnila FPL překročit mnohatisíciletou fázi empirismu a dokonce v mnoha směrech i "výkony" přírody. Výroba kovů má dávnou tradici, už z předhistorických období vývoje lidstva. Např. kvalita některých bronzů budí dodnes obdiv. Ale teprve novověká chemie přinesla první soustavné metody k zlepšování vlastností železa, skla atd. A teprve poznatky FPL o stavbě krystalové mřížky (kapitoly 1 a 2), o dislokacích (kapitola 4), o vlivu poruch na fyzikální vlastnosti krystalů (kapitola 5) atp. vytvořily předpoklady, aby člověk cílevědomě a na vědeckém základě získával materiály žádaných vlastností. Až už zlepšováním látek tradičních (ocel, některé keramické látky) nebo produkcí nových (polovodiče i plastické látky - zde ovšem má často hlavní slovo chemie).

Úspěchy FPL v tomto směru lze doložit i tím, že se mnohdy podařilo vytvořit materiály čistší nebo i jinak kvalitnější, než jaké nalézáme v přírodě. Příkladem jsou vysoce čisté monokrystaly polovodičů, zejména Ge a Si, dále optické materiály s mnohonásobně nižší absorpcí, než jakou vykazují "nejprůhlednější" přírodní látky (využití ve vláknové optice atp.). Jsou to nejen obdivuhodné, ale i velmi užitečné a důležité "rekordy", třebaže patrně nejsou zaznamenány v populární Guinesově Knize rekordů.

Není smyslem tohoto výkladu jakkoli zlehčovat jiné obory, zejména chemii, a jejich přínos k získávání lepších materiálů pro všechny obory techniky. FPL má však přece jen výsadní postavení vypracováním speciálních technologií jako je pásmová (též zonální) tavba užívaná při výrobě čistých a dokonalých krystalů polovodičů (kapitola 1) nebo postupy, jimiž se vytvářejí integrované obvody (kapitola 13) s nebývalou hustotou elektronických prvků v malém objemu. Zde už ovšem nejde o pouhé materiály, nýbrž o soustavy sice technického poslání, ale jejichž konstrukce by bez FPL nebyla možná.

V nadpise článku je zmínka o aplikacích nejen technických. V návaznosti na výklad v předchozích kapitolách uveďme výslovně alespoň citlivou metodu měření magnetických polí pomocí Josephsonova jevu (kapitola 8) aplikovatelnou v medicíně k studiu činnosti srdce a mozku nebo v geologickém průzkumu (hledání rud). Existují i aplikace FPL v archeologii - zkoumání stáří nevodivých keramických materiálů aj. Obecněji jde o to, že vědecké poznatky a metody se rostoucí měrou uplatňují i mimo rámec oboru, v němž vznikly, a lidé příštích desetiletí se s tímto úkazem budou jistě setkávat stále častěji.

Jako výhled do blízké budoucnosti lze předpokládat, že trend přínosu FPL k zlepšování a rozmnožování kvalitních technických materiálů ještě zesílí a rozšíří se. Patrně budou na postupu supravodiče (kapitola 8). Pravděpodobně bude opakovaně možno zpestřovat výklad fyziky ve škole žákovskými referáty o technických novinkách - a učitel by měl umět zaslíbeně poukázat na ty poznatky FPL, které se u nových "rekordů" uplatňují.

Ale i vzhledem k aplikačnímu významu v oborech už běžných a tradičních bude jistě FPL patřit k polytechnickému vzdělání, též v zájmu hospodárnosti a bezpečnosti práce.

Ještě důležitá poznámka na závěr tohoto článku.

Technické a technologické novinky se v posledních desetiletích uplatňují v stále rychlejším sledu. Prakticky to často znamená, že v průmyslu je třeba rychle přejít k výrobkům a výrobním procesům založeným na kvalitativně jiných principech než dosud. Tak příchodem polovodičů rychle technicky zastarala výroba elektronek (důležitých ovšem nadále pro speciální účely) a v národním hospodářství se nově, nečekaně objevila potřeba vysokoškolsky vzdělaných odborníků ve fyzice polovodičů. Takové situace se v období vědeckotechnické revoluce v menším či větším měřítku nevyhnutelně opakují. Je proto žádoucí připravovat jak inženýry s podrobnějšími a praxí bližšími znalostmi užšího oboru (kdysi: s výrobou a funkcí elektronek), tak i fyziky seznámené principiálně s širším okruhem přírodních zákonů a schopné aplikovat je při zavádění zásadních změn ve výrobě. Dobře připravený fyzik nemůže inženýra nahradit v zaběhnutém provozu, ale má předpoklady pružnější a s hlubším porozuměním přijímat a rozvíjet zásadně nové myšlenky v oboru. Oba směry vysokoškolské přípravy, technický i univerzitní, mají tedy své nezastupitelné a specifické místo v perspektivách budoucích odborníků.

## C.2. Význam FPL pro poznání zákonů přírody

Oprávněný důraz na praktickou užitečnost FPL by však neměl odsunout do pozadí přínos FPL k poznání základních přírodních zákonitostí. Připomeňme, že řešením problému měrné tepelné kapacity pevných látek (kapitola 3) FPL významně přispěla k prosazení kvantové teorie na počátku našeho století, později Sommerfeldův model kovu (kapitoly 6 a 8) přesvědčivě ukázal platnost kvantového Fermiova-Diracova statistického rozdělení elektronů v kovech. I FPL byla polem nečekaných závažných objevů: 1911 supravodivost, 1958 Mössbauerův jev...\*) Není také jistě náhodou, že problémy FPL zaujaly tak významné fyziky jako byli A. Einstein (měrná tepelná kapacita krystalů - kapitola 3; difúze v pevných látkách - kapitola 12) nebo W. Pauli (paramagnetismus kovů - kapitola 9) a další. Pozoruhodná je i řada Nobelových cen, udělených za výsledky ve FPL\*\*).

\*) Jde o rezonanci v mimořádně úzkém oboru frekvencí záření  $\gamma$ , jsou-li radioaktivní jádra zabudována do krystalové mřížky. Viz [1, 2].

\*\*\*) Ze známějších uveďme Nobelovy ceny, které získali roku:

- 1914 M. v. Laue a r. 1915 W. H. Bragg a W. L. Bragg za základy rentgenové strukturní analýzy,
- 1952 F. Bloch a E. Purcell za objev jaderné magnetické rezonance,
- 1956 W. Shockley, W. H. Brattain a J. Bardeen za objev a vysvětlení tranzistorového jevu,
- 1961 R. Mössbauer za objev jevu po něm nazvaného,
- 1962 L. D. Landau za průkopnické výzkumy kondenzovaného stavu, především supratekutého helia,
- 1970 L. Néel za fundamentální práce ve fero-, antifero- a ferimagnetismu,
- 1972 J. Bardeen, L. N. Cooper a J. R. Schrieffer za teoretické vysvětlení supravodivosti,
- 1973 L. Esaki, I. Giaever a B. D. Josephson za studium tunelových jevů ve FPL.
- 1985 H. Hauptman, I. Karle za přímé metody určování krystalové struktury.

Uveďme ještě další dva aspekty přínosu FPL k základnímu výzkumu v přírodovědě. Je to předně úzká - a v budoucnu pravděpodobně ještě užší - součinnost FPL s dalšími obory, přirozeně v rámci fyziky, ale i mimo něj. Tak pro chemii je významný problém katalýzy, k jejímu řešení přispívá FPL detailním studiem dějů na povrchu pevných látek. S přenosem poznatků z FPL do jiných oborů úzce souvisí druhý ohlášený aspekt - užití metod a přístrojů vyvinutých původně v rámci FPL v jiných oborech. Tak metody strukturní analýzy (kapitola 2) posloužily biofyzice k zjištění stavby slavné dvojité spirály dezoxynukleové kyseliny (DNK), ale zdaleka nejde o službu jedinou. Široké uplatnění mají metody jaderné magnetické rezonance (JMR) \*) při studiu organických molekul, chemických procesů na atomární úrovni aj. Na této metodě se svorně podílejí FPL a jaderná fyzika.

Je tedy důležité nevidět ve FPL jen její technicko-aplikační stránku. Je to obor, který má vlastní rozsáhlou, zajímavou a náročnou problematiku a který samostatně a platně přispívá i k řešení klíčových přírodovědných problémů. (To ostatně souvisí i s chápáním FPL jako zvláštního oboru fyziky.)

Pokud jde o výhled do budoucna, lze ovšem těžko říci, přinese-li FPL další kvalitativní překvapení jako r. 1911 nebo 1958. Naproti tomu lze oprávněně očekávat rostoucí součinnost s dalšími fyzikálními a přírodovědnými obory. Už vzhledem k tomuto výhledu a k zmíněnému historickému významu FPL při budování současné fyziky, zejména kvantové, má a bude mít FPL své významné místo ve všeobecném vzdělávání žáků, jež bude naše škola připravovat pro začátek třetího tisíciletí.

### C.3. Zvláštní přínosy FPL všeobecnému vzdělání a formování osobnosti žáků

Závěr předchozího článku se týkal především obsahu FPL, jejích poznatků a metod. Ale to je jen jedna stránka věci. Stále by se totiž mohlo zdát, že FPL se při výchově žáků může uplatnit jen okrajově a nevýznamně. Nic výrazného neříká (aspoň na první pohled) k otázkám světonázorovým, filozofickým atp. Ale nepřehlédli bychom takto něco cenného, čím může učitel nenásilně a přesvědčivě působit na formování osobnosti žáků během výuky, už středoškolské? (Pro vysokoškolské studium platí ovšem to, co máme na mysli, v míře ještě větší.)

FPL patří do oblasti vědy, a to i "vysoké" vědy - připomeňme výkony oceněné Nobelovými cenami. A přesto je organicky spjata s praxí, čerpá mnoho svých problémů z praxe (mechanické vlastnosti kovů) a svými výsledky zase často bezprostředně do praxe zasahuje (rozvoj průmyslu polovodičů, počítačů ...). Napětí, které nezbytně vzniká mezi praxí a teorií a které v historii mělo někdy vyhraněné formy, zůstává ve FPL takřka jen kořením každodenní práce fyziků. To jest: něčím, co nevytváří bariéry mezi lidmi, pracovišti nebo různými tradicemi (univerzitní a technický směr atp.).

\*) Na rozdíl od rezonance magnetických momentů elektronů v pevných látkách (kapitola 9) jde o rezonanci momentů jader, která nastává při nižších frekvencích a přináší informaci o blízkém okolí studovaných atomových jader, viz [2].

Tato příznivá situace je do velké míry dána komplexností FPL. Skoro každý seriózní výzkum ve FPL potřebuje součinnost technologie (příprava dobře definovaných vzorků), teorie (formulace problému, hypotézy o řešení), měření - v rostoucí míře spjaté s elektronickým a počítačovým zpracováním ...

Komplexnost metod má z pracovního hlediska i další vítanou stránku. Ve FPL se může široce uplatnit velmi mnoho přístupů (pokud jde o metody) nebo různě vyhraněných badatelských osobností (pokud jde o psychologické předpoklady a pracovní zkušenosti). Při studiu krystalových mřížek se bohatě uplatní geometrie a prostorová představivost, v četných souvislostech se ve FPL užívá pojmů, metod a výpočtů kvantové teorie; některé problémy se hodí k analytickému řešení, jiné pro užití počítačů. Také v experimentování je ve FPL široké pole pro rozmanité přístupy, i s využitím dalších fyzikálních oborů včetně jaderné fyziky (např. neutronová strukturní analýza, kapitoly 2 a 9) a dokonce fyziky elementárních částic (při užití speciální metody studia Fermiových ploch kovů, srov. kapitulu 6).

V současném výzkumu se široce uplatňuje týmová práce, ale speciální přístroj nebo úzce specializovaná metoda i nadále ponechávají prostor pro píli a soustředěnou pozornost jednotlivce.

Kromě lákavých možností uplatnit něco originálního a nebyvalého zůstává ovšem i ve FPL též dostatek místa pro "drobnou práci", zejména experimentální; obrazem jejích výsledků i užitečnosti jsou fyzikální tabulky, bez nichž by se dnes fyzik a někdy ani technik prakticky neobešel. Taková práce předpokládá nejen houževnatost, ale i nápaditost (využívání jednoduchých principů, přenášení zkušeností z jiných oborů) a zdaleka nemusí být jen šedou, jednotvárnou rutinou.

Při výhledu do budoucna není důvodu k pochybnostem, že si FPL i nadále podrží pestrý a komplexní ráz, pro nějž může být přitažlivá pro talentované mladé lidi velmi rozmanitých tvůrčích předpokladů.

### Doporučená literatura

- [1] Dlouhá J.: Mössbauerův jev a jeho využití, SNTL Praha 1969 (Populární přednášky o fyzice, sv. 19)
- [2] Frei V.: Fyzika pevných látek, SPN Praha 1979, 2. vyd. 1981

Výslovnost jmen některých fyziků

Anderson	(endrsn)	Kammerling Onnes	(kamerling ons)
Bardeen	(bardýn)	Klasen	(klasen)
Bragg	(breg)	Langevin	(lanžvén)
Bravais	(brave)	London	(landen)
Brattain	(bretén)	Mouton	(muton)
Brillouin	(briluen)	Neel	(nél)
Cooper	(kúpr)	Ovshinski	(ovšinski)
Cotton	(kotn)	Pearson	(pírsn)
Czochralski	(čochralski)	Peltier	(peltje)
Debye	(debaj)	Penney	(peny)
De Broglie	(de broljí)	Petit	(pety)
De Haas	(de ház)	Read	(ríd)
Destriau	(destrió)	Richardson	(ričárdson)
Dulong	(dylon)	Seebeck	(síbek)
Dushman	(dašman)	Shockley	(šokli)
Fresnel	(frenel)	Schottky	(šotky)
Hall	(hol)	Silsbee	(silsbí)
Hartree	(hártri)	Van Vleck	(fan flek)
Heisenberg	(hajznberg)	Verneuil	(vernej)
Heitler	(hajtler)	Young	(jang)
Hooke	(hík)	Zachariasen	(zakaraisen)

CVIČENÍ Z FYZIKY PEVNÝCH LÁTEK

Zadání příkladů

1.1. Určete počet atomů v elementární buňce železa, jež má kubickou krystalovou strukturu. Mřížková konstanta krystalu železa je 0,29 nm, relativní atomová hmotnost železa je 55,85, jeho hustota je 7 800 kg.m<sup>-3</sup>.

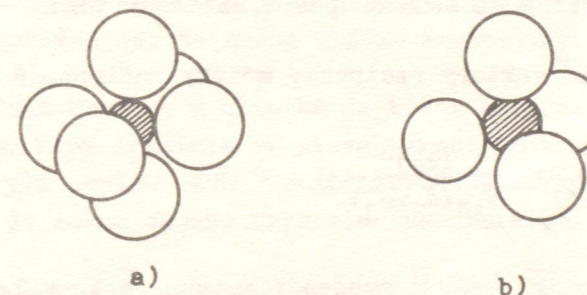
1.2. Hustota krystalu NaCl je 2,18.10<sup>3</sup> kg.m<sup>-3</sup>, relativní atomová hmotnost sodíku je 23 a chlóru 35,45. Určete mřížkovou konstantu krystalu.

1.3. Kolik atomů připadá na jednu elementární buňku a) prosté, b) prostorově centrované, c) plošně centrované kubické mřížky, d) hexagonální těsně uspořádané ?

1.4. Ukažte, že pro ideální hexagonální strukturu s nejtěsnějším uspořádáním je poměr  $\frac{c}{a}$  roven  $\approx 1,633$ .

1.5. Určete koeficient zaplnění mřížky a) prosté kubické, b) kubické prostorově centrované, c) kubické plošně centrované, d) hexagonální s těsným uspořádáním.

1.6. Určete poloměry atomů, které mohou být umístěny a) v oktaedrických (obr. 1a) a b) v tetraedrických dutinách při nejtěsnějším uspořádání stejných koulí (obr. 1b).



Obr. 1. a) oktaedrická a b) tetraedrická dutina. ○ - atomy základní mřížky  
⊙ - atomy umístěné do dutin

1.7. Dokažte, že v mřížce, která se vyznačuje translační symetrií, může existovat pouze jednočetná, dvojitá, trojitá, čtyřčetná a šestičetná rotační osa symetrie.

1.8. Dokažte, že v kubické mřížce je a) vektor  $[hkl]$  kolmý na soustavu rovin  $(hkl)$ , b) meziorovinná vzdálenost soustavy rovin s Millerovými indexy  $(hkl)$  je dána vztahem

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

1.9. Vysvětlete, proč u Bravaisových mřížek nejsou uvedeny následující struktury: tetragonální bazálně centrovaná, tetragonální plošně centrovaná, monoklinická prostorově centrovaná a monoklinická plošně centrovaná.

1.10. Mřížková konstanta primitivní kubické mřížky je  $a$ . Najděte vzdálenost  $l$  mezi uzly s indexy a)  $\left[\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}\right]$  a  $\left[\frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}\right]$ , b)  $[0 0 0]$  a  $[1 1 1]$ , c)  $\left[1 0 \frac{1}{2}\right]$  a  $\left[\frac{1}{2} 1 \frac{1}{2}\right]$ .

1.11. Určete úhel  $\alpha$  mezi směry  $[236]$  a  $[321]$  v primitivní kubické mřížce.

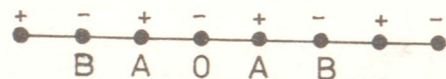
1.12. Určete úhel  $\alpha$  mezi rovinami  $(123)$  a  $(321)$  v primitivní kubické mřížce.

1.13. Ukažte, že exponenty ve výrazu pro potenciální energii atomů, vzdálených o  $r$

$$E_p(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{\beta}{r^m}$$

musí splňovat nerovnost  $m > n$ .

1.14. Stanovte hodnotu Madelungovy konstanty pro případ jednorozměrné mřížky, složené z pravidelně se střídajících kladných a záporných iontů s nábojem  $q$  a  $-q$  (obr. 2).



Obr. 2. Jednorozměrná mřížka složená z opačně nabitých iontů

2.1. Dokažte, že základní vektory reciproké mřížky definované vztahy (2.3) vyhovují vztahu

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{(2\pi)^3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

2.2. Dokažte, že vektory  $\vec{b}_i$  (2.3) vyhovují vztahu  $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$  (2.4).

2.3. Určete mřížkovou konstantu LiF, je-li známo, že reflexe prvního řádu rentgenového záření s vlnovou délkou 0,21 nm od roviny  $\{100\}$  nastane při úhlu  $10^{\circ}5'$ .

2.4. Je známo, že vlnová délka charakteristického rentgenového záření vycházejícího z měděné anody je 0,154 nm. Po dopadu tohoto záření na krystal hliníku nastává difrakce 1. řádu na krystalových rovinách  $\{111\}$  pod Braggovým úhlem  $19,2^{\circ}$ . Hliník má strukturu f.c.c, jeho hustota je  $2699 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , relativní atomová hmotnost je 26,98. Určete Avogadrovo číslo pomocí daných experimentálních údajů.

2.5. Fotografie pořízená práškovou metodou (Debye-Scherrer) zářením Cu K (vlnová délka je 0,154 nm) krystalu CsCl dává pro první difrakční linie Braggovy úhly  $10,72^{\circ}$ ;  $15,31^{\circ}$ ;  $18,88^{\circ}$ ;  $21,91^{\circ}$ ;  $24,69^{\circ}$ ;  $27,24^{\circ}$ . Určete Millerovy indexy příslušných reflektujících rovin a sestavte je do tabulky. CsCl krystaluje v kubické soustavě o hraně krychle  $a = 0,411 \text{ nm}$ .

2.6. Na polykrystalické tenké vrstvě mědi (kubická struktura,  $a = 0,3615 \text{ nm}$ ) nastává difrakce kolmo dopadajícího rovnoběžného svazku elektronů. Jaký je průměr difrakčního kroužku vznikajícího difrakcí 1. řádu na rovinách  $\{111\}$ , je-li urychlovací napětí elektronů 80 kV a vzdálenost mezi vrstvou a stínítkem  $L = 0,5 \text{ m}$ ?

3.1. Odvoďte vzorec pro  $C_V$  v Debyeově teorii pro případy  $T \gg \Theta$  a  $T \ll \Theta$ .

3.2. Určete přibližně rychlost zvuku v germaniu, víte-li, že Debyeova teplota  $\Theta$  germania se rovná 400 K a vzdálenost  $d$  dvou nejbližších atomů v germaniu je 0,425 nm. (Poznámka: Je velmi užitečné vzdálenost 0,425 nm odvodit z tabulované mřížkové konstanty germania a ze známé struktury germania.)

3.3. Podle modelu lineárního řetězce složeného z iontů Na a Cl (obr. 2) vypočítejte frekvenci mřížkových kmitů krystalu NaCl odpovídající frekvenci světla v daleké infračervené oblasti ( $\lambda \approx 10^{-4} \text{ m}$ ). Pro odhad silové konstanty  $\beta$  užitě Hookova zákona v elementárním tvaru s Youngovým modulem  $E = 5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

4.1. Odvoďte rovnovážnou hustotu a) Schottkyových poruch b) Frenkelových poruch.

4.2. Nechť energie potřebná na přemístění atomu sodíku zevnitř krystalu na povrch je rovna 1 eV. Vypočítejte molární tepelnou kapacitu sodíku při pokojové teplotě. Tato tepelná kapacita je podmíněna Schottkyovými poruchami. Pro jednoduchost předpokládejte, že změna objemu krystalu  $\Delta v$  je zanedbatelná.

4.3. Pro vytvoření vakance v hliníku je třeba energie 0,75 eV. Kolik vakancí připadá na jeden atom krystalu ve stavu termodynamické rovnováhy a) při pokojové teplotě, b) při teplotě  $600^{\circ}\text{C}$ . Předpokládejte pro jednoduchost, že při obou teplotách je změna objemu krystalu zanedbatelná.

5.1. Kubický krystal je natahován ve směru  $[100]$ . Nalezte výraz pro Poissonovu konstantu pomocí elastických konstant (nebo elastických modulů).

5.2. Kubický krystal je podroben hydrostatickému tlaku. Ukažte, že veličina  $K$  která je převrácenou hodnotou stlačitelnosti a je definována vztahem  $K = -V \frac{dp}{dV}$  je spojena s elastickými konstantami vztahem

$$K = \frac{c_{11} + 2c_{12}}{3}$$

5.3. Stlačitelnost mědi je  $0,76 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$  a Poissonovo číslo je 0,334. Určete charakteristickou teplotu mědi.

5.4. Rezonanční frekvence niklové tyče kruhového průřezu o průměru 0,442 cm a délce 10 cm se rovná 1 880 Hz. Určete Youngův modul pružnosti a modul pružnosti ve smyku, je-li hustota niklu  $8800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

5.5. Stanovte vztah mezi elastickými moduly a elastickými koeficienty kubického krystalu.



6.1. Vypočtete pravděpodobnost, s jakou při teplotě 290 K elektron obsadí stav ležící 0,05 eV nad a 0,05 eV pod Fermiovou hladinou. Obě tyto pravděpodobnosti sečtete a zjistíte, zda získaný výsledek platí obecně.

6.2. Odvoďte výraz pro počet volných elektronů ve stavech o energii mezi  $E$  a  $(E+dE)$ .

6.3. Podejte návrh, jak lze na základě výsledků příkladu 6.2 vypočítat  $E_F$  ze známé hustoty elektronů  $n$  (tj. počtu volných elektronů v objemové jednotce kovu). Úplný výpočet proveďte pro  $E_{FO}$ .

6.4. Vzorec pro  $E_{FO}$  odvoďte na základě rovnice (6.8) s použitím toho, že nejvyšší obsazená hladina energie při  $T = 0$  K je  $E_{max} = E_{FO}$ .

6.5. Vypočtete  $E_{FO}$  pro sodík, draslík a hliník.

6.6. Vypočtete střední hodnotu energie  $E_0$  elektronového plynu při  $T = 0$  K.

6.7. Kdyby se volné elektrony v sodíku řídily zákony klasické fyziky, při jaké teplotě by dosáhly energie rovné střední hodnotě energie elektronového plynu za teploty absolutní nuly?

6.8. Navrhněte, jak z nízkoteplotních měření lze oddělit mřížkový a elektronový příspěvek k měrné tepelné kapacitě kovu.

7.1. Na základě rovnice (7.8b) napište a diskutujte pohybovou rovnici elektronu s nábojem  $e_0$  v magnetickém poli o indukci  $\vec{B}$ .

7.2. Rozvedením determinantu (7.22) odvoďte rovnici (7.23).

7.3. Pro dvojrozměrnou prostou čtvercovou mřížku vypočtete poměr energie elektronu v rohu první Brillouinovy zóny k energii elektronu ve středu boční strany této zóny. Předpokládejte, že platí vzorec pro energii volného elektronu.

7.4. Vysvětlete, proč krystal kamenné soli je izolantem.

7.5. Odvoďte počet stavů v energiovém pásu. Použijte k tomu model nekonečné lineární jednorozměrné atomové mřížky s mřížkovou konstantou  $a$ .

7.6. Skládají-li se dvě harmonické vlny s málo rozdílnou frekvencí a málo rozdílnou fázovou rychlostí, vznikají rázy. Na základě této představy odvoďte vzorec pro rychlost šíření rázů (tj. grupovou rychlost).

7.7. Experimentální hodnota Fermiovy meze pro Li je 3,5 eV. Jakou efektivní hmotnost elektronu je potřeba dosadit do výsledného vzorce v příkladu 6.3 a 6.4, aby teoretická a experimentální hodnota Fermiovy meze souhlasily?

7.8. a) Za předpokladu kruhového pohybu elektronu v rovině kolmé k magnetickému poli o indukci  $\vec{B}$  odvoďte vzorec pro rezonanční frekvenci  $\nu_r$  při cyklotronové rezonanci. b) Řádově odhadněte velikost frekvence  $\nu_r$  a délku vlny, která

jí přísluší. c) Je-li při daném experimentu  $B = 0,1$  T a maximum absorpce nastává při  $\nu = \nu_r = 1,4 \cdot 10^{10}$  Hz, vypočtete  $m_n^*$ . d) U experimentu podle c) vypočtete poloměr kruhové dráhy elektronu, jehož rychlost je  $3 \cdot 10^4$  m.s<sup>-1</sup>.

8.1. Měděným vodičem s obsahem příčného řezu  $0,2$  cm<sup>2</sup> prochází proud  $I = 1$  A. Vypočtete střední unášivou rychlost elektronů.

8.2. Poměr měrných elektrických vodivostí stříbra a mědi při určité teplotě je roven 6,12:5,76. Vypočtete poměr pohyblivostí elektronů v těchto kovech za předpokladu, že na každý atom připadá jeden volný elektron.

8.3. Vypočtete pohyblivost  $\mu$ , relaxační dobu  $\tau_{FO}$  a střední volnou dráhu  $\lambda_{FO}$  elektronů v sodíku. Potřebné údaje:  $\gamma = 0,23 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ,  $E_{FO} = 3,1$  eV.

8.4. a) Vypočtete střední unášivou rychlost elektronů v mědi, je-li aplikováno elektrické pole velikosti  $0,1$  V.m<sup>-1</sup>. b) Vypočtete pro měď poměr střední unášivé rychlosti elektronu  $\bar{v}$  k rychlosti  $v_{FO}$ , která přísluší elektronu s energií na Fermiově mezi. c) Vypočtete měrnou elektrickou vodivost mědi. Potřebné údaje:  $\mu = 4,4 \cdot 10^{-3} m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$ ,  $E_{FO} = 7$  eV.

8.5. Měrná elektrická vodivost mědi při 0 °C je  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ . Vypočtete měrnou tepelnou vodivost mědi při této teplotě.

8.6. Vypočtete maximální proud  $I_{max}$ , který může procházet nekonečným přímým supravodivým drátem kruhového průřezu o poloměru  $R$  vyrobeným ze supravodiče 1. typu. Pro numerický výpočet předpokládejte obsah příčného řezu drátu  $1$  mm<sup>2</sup> a použijte údajů v tabulce 8.1.

9.1. Vzorce (9.12a-c) lze odvodit přímo, předpokládáme-li od začátku výpočtu, že v (9.7) je  $x$  velmi malé ( $0 < x \ll 1$ ) a tedy je velmi malé i  $y = x(\mu_{AH}/\mu_A)$ . Pak platí aproximace  $e^y = 1+y$  a integrace se velmi zjednoduší. Proveďte příslušný výpočet.

9.2. Vztah (9.17) lze odvodit též tak, že směrnice přímků (9.18) se položí rovna směrnici tečny křivky (9.19) v počátku (viz výklad v hlavním textu). Proveďte příslušný výpočet.

9.3. Železo má prostorově centrovanou kubickou mřížku s mřížkovou konstantou  $0,286$  nm, nikl plošně centrovanou kubickou mřížku s mřížkovou konstantou  $0,352$  nm. Připadá-li na jeden atom železa 2,2 Bohrova magnetonu, a na jeden atom niklu 0,6 Bohrova magnetonu, vypočtete maximální možnou magnetizaci a magnetickou polarizaci železa a niklu. (Poznámka: neceločíselný počet Bohrových magnetonů na atom vzniká tím, že se uplatňuje pásová struktura kovů a elektrony  $\uparrow$  nejsou přesně lokalizovány k jednotlivým atomům; viz článek 7.5).

9.4. Spontánní magnetizace kobaltnatého feritu je  $4,25 \cdot 10^5$  A.m<sup>-1</sup>, mřížková konstanta  $0,338$  nm, na jednu elementární buňku připadá 8 molekul  $CoFe_2O_4$ . Za předpokladu, že magnetizace je dána pouze atomy kobaltu, vypočtete magnetický moment připadající na atom kobaltu.

9.5. Za podmínek, uvedených v čl. 9.8, plošná hustota energie stěny je dána kvadratickou (paraboličnou) závislostí  $\gamma = kx^2$  ( $k$  = konstanta úměrnosti). Vypočtete magnetickou susceptibilitu  $\chi_m$  způsobenou posuvem jedné doménové stěny v krychli feromagnetika o hraně  $a$  (nikoli mřížková konstanta) při aplikaci magnetického pole o intenzitě velikosti  $H$ .

10.1. Vysvětlete, proč barva světla odraženého od tenké vrstvy kovu se jeví jako doplňková k barvě světla procházejícího tenkou vrstvou kovu. Typický příklad: tenká vrstva zlata se v odraženém světle jeví jako žlutá, v procházejícím světle jako modrá.

10.2. Ověřte výpočtem hodnoty  $\lambda_{\max}$  v tabulce 10.1.

10.3. V rovnici (10.24) započtete tlumení a odvoďte výsledky uvedené v čl. 10.4.3.

10.4. Odvoďte vzorec pro velikost intenzity Lorentzova pole  $\dot{E}_{\text{LOR}}$  (tj. elektrického pole uprostřed kulové dutiny vyříznuté v prostředí s homogenní polarizací velikosti  $P$ ).

10.5. Odvoďte vzorec (10.45) pro Larmorovu frekvenci  $\omega_L$ . Pro zjednodušení předpokládejte, že orbit elektronu je kolmý k indukci magnetického pole.

11.1. Vypočtete pravděpodobnost toho, že elektron obsadí stavy ležící  $3k_B T$  nad eventuálně pod Fermiovou energií  $E_F$ .

11.2. Vypočtete polohu Fermiovy energie vlastního polovodiče se šířkou zakázaného pásu 1 eV při teplotách  $T = 0 \text{ K}$  a  $T = 300 \text{ K}$ , je-li  $m_p^* = 5m_n^*$  a  $m_n^* = 0,6 m$ . Dále vypočtete hustotu volných elektronů  $n_i$  při teplotách  $T = 300 \text{ K}$  a  $T = 600 \text{ K}$ .

11.3. Předpokládejte, že v jednotkovém objemu polovodiče je nad valenčním pásem  $N_a$  akceptorových hladin a vyjádřete Fermiovu energii a hustotu volných děr ve valenčním páse v závislosti na teplotě.

11.4. Germanium obsahuje při pokojové teplotě v  $1 \text{ m}^3$   $10^{23}$  atomů arsenu:

- určete typ vodivosti,
- vypočtete hustotu elektronů i děr při pokojové teplotě, je-li ionizační energie atomů As rovna 0,015 eV,
- vypočtete hustotu částic s nábojem pro vlastní vodivost,
- stanovte Fermiovu energii a zakreslete ji do grafu spolu s příměsovou energií hladiny.

$E_g = 0,67 \text{ eV}$ ,  $m_n^* = 0,412 m$ ,  $m_p^* = 0,216 m$ .

11.5. Krystal Ge obsahuje  $10^{-4}$  atomových procent atomů As. Předpokládejte, že jsou všechny donory ionizovány a za předpokladu, že hustota volných elektronů je dána jen donorovými centry, vypočtete: a) hustotu elektronů  $n$  a děr  $p$ , b) měrný odpor vzorku při pokojové teplotě. Pohyblivost elektronů je  $0,38 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a děr  $0,18 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Uvažujte  $m_n^* = m_p^* = m$ ,  $E_g = 0,67 \text{ eV}$ .

11.6. Měrná vodivost germania byla při pokojové teplotě ( $T_1 = 300 \text{ K}$ )  $\gamma_1 = 240 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Žiháním vzorku při teplotě  $T_2 = 1000 \text{ K}$  se v něm vytvořila rovnovážná hustota vakancí  $n_v$ . Pak se vzorek rychle ochladil na teplotu  $T_1$ . Měrná vodivost vzorku se změnila na  $\gamma_2 = 400 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Předpokládejte, že vakance v Ge tvoří akceptorové příměsi s energií ionizace  $E_A = 0,01 \text{ eV}$  a že ve vzorku zůstala hustota vakancí  $n_v$ . Dále předpokládejte, že se při žihání ve vzorku vytvořily vakance jen jednoho druhu a žádné další poruchy. Před i po žihání měla Hallova konstanta stejné znaménko. Pohyblivost měla před i po žihání stejnou hodnotu  $\mu_p = 0,15 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a příměsi před žiháním byly plně ionizovány.

- zduvodněte, jaký typ vodivosti měl vzorek před žiháním
  - vypočtete energii  $\Delta u$  potřebnou k vytvoření jedné vakance
- Zanedbejte změnu objemu a změnu tepelné entropie při vytvoření vakance.

11.7. Hustota akceptorů v polovodiči je  $10^{24} \text{ m}^{-3}$ . Energií vzdálenost akceptorové hladiny od vrchního okraje valenčního pásu je 0,5 eV. Vypočtete měrnou vodivost materiálu při teplotě  $T = 300 \text{ K}$ , jestliže pohyblivost děr ve valenčním páse je  $0,01 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Elektronovou vodivost zanedbejte. Uvažujte  $m_n^* = m_p^* = m$ .

11.8. Vzorek křemíku obsahuje atomy india o hustotě  $2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$  a atomy antimonu o hustotě  $10^{22} \text{ m}^{-3}$ . Za předpokladu, že všechny atomy příměsí jsou ionizovány, určete:

- typ vodivosti,
- hustotu majoritních i minoritních volných částic s nábojem při  $T = 300 \text{ K}$
- polohu Fermiovy energie při pokojové teplotě.
- Jak se změni údaje b) a c) v případě, že vzorek neobsahuje atomy antimonu? Uvažujte  $E_g = 1,1 \text{ eV}$ ,  $m_n^* = m_p^* = m$ .

11.9. Ukažte, že součin počtu volných elektronů a počtu děr v jednotkovém objemu je dán výrazem

$$n p = 2,38 \cdot 10^{43} \text{ m}^{-6} \cdot \text{K}^{-3} \cdot T^3 \exp(-E_g/k_B T),$$

kde  $E_g$  je šířka zakázaného pásu. Uvedený vztah má platit, leží-li Fermiova hladina v polovodiči o více než několik  $k_B T$  pod spodním okrajem vodivostního pásu a více než několik  $k_B T$  nad horním okrajem valenčního pásu. Všimněte si, že uvedený vztah platí nezávisle na tom, zda jsou v zakázaném páse donory nebo akceptory. Platí i pro vlastní polovodič. Podstatná je jen podmínka týkající se polohy Fermiovy hladiny. Předpokládejte  $m_n^* = m_p^* = m$ .

11.10. U krystalů InSb je  $\epsilon_r = 17$  a  $m_n^* = 0,014 m$ . Vypočtete:

- energií ionizace donorů, ( $E_H = 13,62 \text{ eV}$ )
  - poloměr orbity v základním stavu ( $r_H = 0,053 \text{ nm}$ ),
  - hustotu elektronů ve vodivostním páse při 4 K, je-li pro daný vzorek  $N_d = 1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ .
- Předpokládejte, že  $m_n^*$  není závislé na teplotě.

12.1. Odvoďte platnost následujícího vztahu

$$\frac{\partial F_0}{\partial T} = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{E - E_C}{T} \right) \frac{\partial F_0}{\partial E}$$

kde  $F_0(E)$  je Fermiova-Diracova rozdělovací funkce.

12.2. Odvoďte rozptylový činitel pro rozptyl na ionizovaných příměsích.

12.3. Vypočtete změnu elektrické vodivosti polovodiče typu N ( $n \gg p$ ) vloženého do magnetického pole o velikosti indukce  $B = 1$  T, uvažujete-li rozptyl jen na kmitech mřížky ( $\mu_n = 0,34 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

12.4. Vzorek polovodiče pravoúhlého tvaru o rozměrech  $a = 0,2$  cm,  $b = 0,2$  cm,  $c = 0,05$  cm má hustotu volných částic s nábojem  $10^{21} \text{ m}^{-3}$ . K dvěma protilehlým úzkým stěnám je přiloženo napětí 20 V. Vypočtete hustotu proudu za předpokladu, že pohyblivost volných částic s nábojem se rovná  $0,03 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

12.5. Měrný odpor vlastního germaniového polovodiče při  $27^\circ \text{C}$  je  $0,47 \Omega \cdot \text{m}$ . Za předpokladu, že pohyblivost elektronů je  $\mu_n = 0,38 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a děr  $\mu_p = 0,18 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , vypočtete hustotu volných částic s nábojem.

12.6. Měrná vodivost arsenidu india je  $4 \cdot 10^2 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  a jeho Hallova konstanta  $10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ . Předpokládáte-li, že vodivost způsobují pouze náboje jednoho znaménka, určete jejich hustotu a pohyblivost. Rozptyl zanedbejte.

12.7. Ve vzorku Ge je pohyblivost elektronů  $0,36 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  a děr  $0,16 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . V tomto vzorku se neprojevuje Hallův jev. Vypočtete:

- jaká část proudu je přenášena dírami,
- hustotu částic při  $T = 300$  K, je-li  $E_g = 0,67$  eV,  $m_n^* = m_p^* = m$ .

12.8. Kolik párů elektron-díra se vytvoří v krystalu při pohlcení světelné energie  $10^{-4}$  J? Vlnová délka světla je 200 nm. Jaký náboj se při tomto ději vytvoří uvnitř krystalu? Uvažujte kvantový výtěžek jedna.

12.9. Doba života volných částic s nábojem v polovodiči silně závisí na povrchových podmínkách. Při zkoumání vzorku germania bylo zjištěno, že doba života volných částic s nábojem je  $78 \mu\text{s}$  a ve vzorku, jehož povrch byl leptán kyselinou, je  $340 \mu\text{s}$ . Jednalo se o polovodič typu N. Je-li pohyblivost elektronů  $0,36 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  najděte difuzní délku elektronu při pokojové teplotě v obou vzorcích.

12.10. a) Vypočtete termoelektrické napětí, které se vytvoří na koncích tyče z polovodiče typu N, je-li levý konec tyče ohřát na teplotu  $800^\circ \text{C}$  ( $T_1$ ) a pravý ochlazen na teplotu  $0^\circ \text{C}$  ( $T_2$ ). Polovodič je dotován příměsím o hustotě  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ . Předpokládejte, že všechny příměsi jsou při uvedených teplotách ionizovány a že se jedná o rozptyl na kmitech mřížky. Vlastní vodivost zanedbejte. Uvažujte  $m_n^* = m$ .

b) Který konec tyče bude mít vyšší potenciál?

13.1. V hloubce polovodiče typu P (mimo přechod PN) je hustota akceptorů  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ . Jedná-li se o symetrický strmý přechod PN a víte-li, že při pokojové teplotě jsou všechny příměsi ionizovány, vypočtete difuzní napětí  $U_D$ , které se vytvoří na přechodu PN. Jako materiál je použit křemík,  $E_g = 1,1$  eV. Uvažujte  $m_n^* = m_p^* = m$ .

13.2. Zjistěte minimální napětí, na přechodu PN v propustném směru, které je nutno na přechod připojit, aby bylo možno ve výraze (13.23) zanedbat jedničku vzhledem k  $\exp(e_0 U / k_B T)$  a nedopustíte se při tom větší chyby než:

- 5 %,
- 1 %.

13.3. Vypočtete (při pokojové teplotě):

- hustotu nasyceného proudu v závěrném směru v přechodu PN,
- hustotu proudu v propustném směru při napětí na přechodu 0,8 V a 0,9 V,
- proud, který prochází přechodem v případech a) a b), je-li plošný obsah přechodu  $10 \text{ mm}^2$ .

Přechod je vytvořen v křemíku. Pro výpočet uvažujte  $m_n^* = m_p^* = m$ ,  $\mu_p = 0,050 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu_n = 0,145 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tau_n = 120 \mu\text{s}$ ,  $\tau_p = 200 \mu\text{s}$ ,  $E_g = 1,1$  eV. Hustota příměsí je  $10^{24} \text{ m}^{-3}$ . Dále uvažujte, že všechny příměsi jsou ionizovány a že se jedná o symetrický přechod.

13.4. Pro strmý asymetrický přechod vypočítejte:

- jeho šířku  $x_p$ ,
- jeho kapacitu.

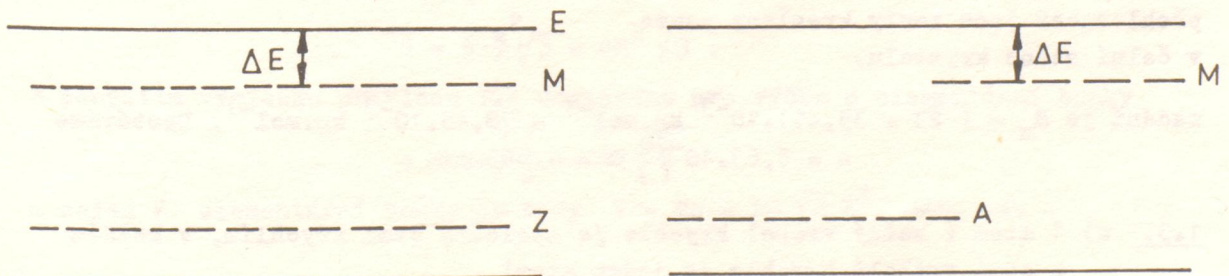
13.5. Pro pozvolný symetrický přechod vypočítejte:

- jeho šířku  $x_p$ ,
- jeho kapacitu.

14.1. Předpokládejte, že se jedná o rekombinační luminiscenci. Přestane-li v okamžiku  $t = 0$  působit budící mechanismus a je-li v tomto okamžiku intenzita luminiscenčního záření  $I_0$ , vypočtete dobu  $t_{1/2}$ , za kterou intenzita klesne na polovinu svoji původní hodnoty.

14.2. Odvoďte vztah pro dozívání nerekombinační luminiscence použitím energiového modelu atomu se základní, excitovanou a metastabilní hladinou (viz obr.3a).

14.3. Odvoďte vztah pro dozívání rekombinační luminiscence na základě modelů se záhytnou hladinou jednoho druhu a hladinou aktivátoru také jednoho druhu (obr.3b)



Obr. 3a.

Obr. 3b.

Řešení a návody k řešení příkladů

1.1. Počet  $N$  atomů v  $1 \text{ m}^3$  každé látky se počítá podle vztahu (viz příklad 6.5)

$$N = \frac{\rho N_A}{M_m},$$

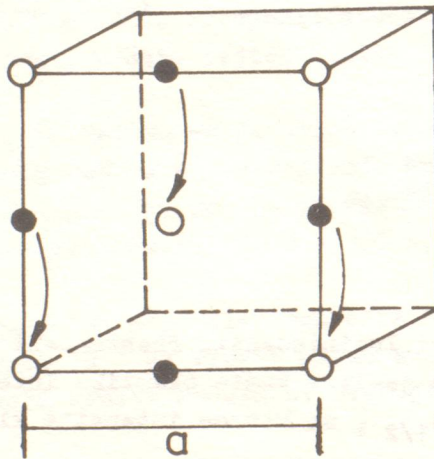
kde  $\rho$  je hustota látky,  $N_A$  Avogadrova konstanta a  $M_m$  molární hmotnost látky. Je-li  $a$  mřížková konstanta kubické mřížky dané látky, pak počet elementárních buněk v  $1 \text{ m}^3$  látky je  $1/a^3$ . Označíme-li  $p$  počet atomů v elementární buňce, je  $p = Na^3$ , tedy

$$p = \frac{\rho a^3 N_A}{M_m} = \frac{7800 \text{ kg.m}^{-3} (0,29 \cdot 10^{-9} \text{ m})^3 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{55,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}} \approx 2$$

1.2. Krystal NaCl lze popsat tak, že jde o kubickou mřížku plošně centrovanou, v níž na místě každého jednotlivého atomu se vyskytuje dvojice iontů  $\text{Na}^+$  ( $\circ$ ) a  $\text{Cl}^-$  ( $\bullet$ ) v takovém uspořádání, že jejich spojnice leží na hraně krychle (viz obr.4). Z příkladu 1.1 pak plyne

$$a = \sqrt[3]{\frac{pM_m}{\rho N_A}}$$

kde  $p = 4$  (4 molekuly NaCl na elementární buňku-viz příklad 1.3.e). Dále podle

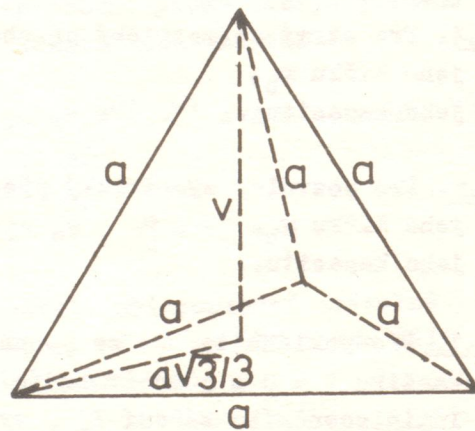


Obr. 4.

Krystalová struktura NaCl. Spojením obou druhů iontů v jeden celek ("molekulu" NaCl - znázorněno šipkami) vzniká kubická mřížka plošně centrovaná. Pro lepší přehlednost jsou ionty kresleny pouze v čelní stěně krystalu.

zadání je  $M_m = (23 + 35,45) \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} = 58,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$ . Dostáváme  $a = 5,63 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,563 \text{ nm}$ .

1.3. a) 1 atom (každý vrchol krychle je společný osmi krychlím, v každém z osmi vrcholů krychle je jeden atom)



Obr. 5.

- b) 2 atomy (oproti případu a) je jeden atom navíc uprostřed krychle)
- c) 4 atomy (oproti případu a) je uprostřed každé krychle po jednom atomu navíc a každá stěna krychle je společná dvěma krychlím)
- d) 6 atomů - viz obr. 1.16 (Na jednu elementární buňku připadá jeden bazální šestiúhelník. Každý vrchol takového šestiúhelníka je společný třem sousedním elementárním buňkám, tj. jedné elementární buňce přísluší dva atomy z vrcholů šestiúhelníka plus jeden atom ze středu šestiúhelníka, tedy celkem tři atomy. Další tři atomy jsou umístěny uvnitř elementární buňky.)

1.4. V uvažované struktuře (viz obr. 1.12 a 1.16) tvoří tři atomy vrstvy A a jeden atom vrstvy B pravidelný čtyřstěn, jehož výška  $v = c/2$  (viz obr. 5). Použijeme toho, že délka těžnice v rovnostranném trojúhelníku o straně  $a$  je rovna  $a\sqrt{3}/2$  a těžiště leží ve dvou třetinách délky těžnice. Označíme-li  $a$  a  $c$  mřížkové konstanty (strana bazálního šestiúhelníka a vzdálenost bazálních šestiúhelníků), platí

$$\frac{c}{2} = v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,633$$

Poznámka: O vztahu délek  $a$ ,  $c$  k poloměru atomů  $R$  viz příklad 1.5.d

1.5. V tomto příkladě považujeme atomy v krystalové mřížce za dotýkající se tuhé koule o poloměru  $R$ . Koefficient zaplnění  $k$  je definován v závěru článku 1.2.1c.

a) Atomy se dotýkají na hraně krychle, platí proto  $a = 2R$  (a mřížková konstanta).

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$$

b) Atomy se dotýkají na tělesové uhlopříčce, platí proto  $a\sqrt{3} = R + 2R + R = 4R$ .

$$k = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$$

c) Atomy se dotýkají na stěnové uhlopříčce, platí tedy  $a\sqrt{2} = 4R$ .

$$k = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$$

d) Atomy se dotýkají na stranách šestiúhelníka tvořícího základnu elementární buňky; platí  $a = 2R$ . Plošný obsah  $S$  šestiúhelníka je

$$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6R^2\sqrt{3}.$$

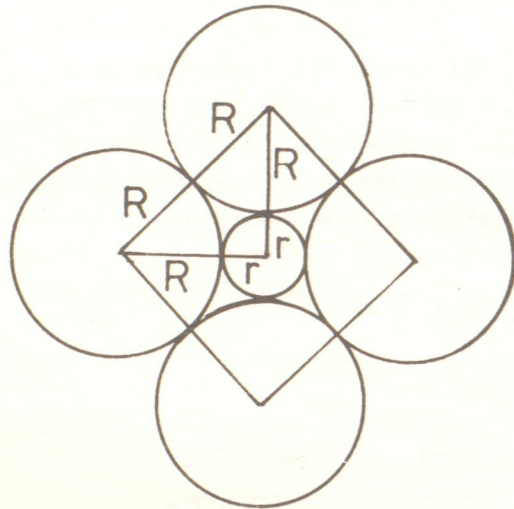
S použitím výsledku příkladu 1.4 dostáváme pro výšku  $c$  elementární buňky

$$c = 2a\sqrt{\frac{2}{3}} = 4R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

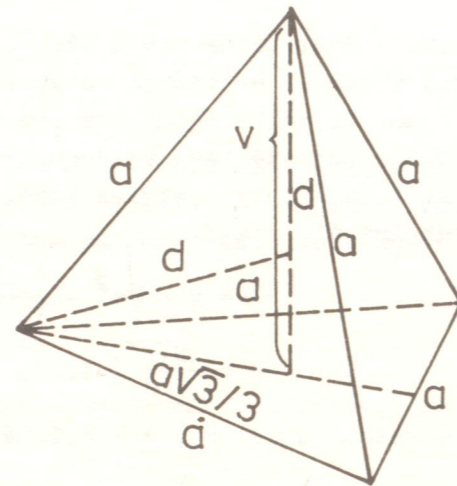
a objem  $V$  elementární buňky je tedy  $V = Sc = 24\sqrt{2}R^3$ . Máme pak

$$k = \frac{6 \frac{4}{3} \pi R^3}{24 \sqrt{2} R^3} \approx 0,74 \text{ (jako v případě c).}$$

1.6. a) V případě oktaedrické dutiny má rovinný řez vedený středy čtyř atomů základní mřížky tvar podle obr. 6a. V obrázku značí R poloměr atomů základní mřížky, r poloměr atomu umístěného v oktaedrické dutině. Zřejmě je  $2(R+r)^2 = (2R)^2$   
 $R+r = R\sqrt{2}$ ,  $r = R(\sqrt{2}-1) \approx 0,41 R$ .



Obr. 6a. Řez oktaedrem.



Obr. 6b. Tetraedrická dutina.

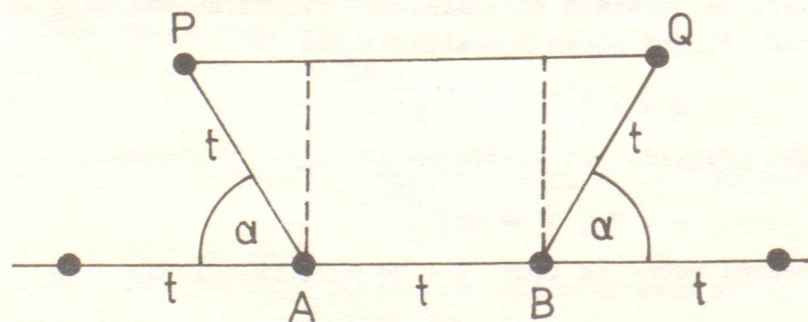
b) V případě tetraedrické dutiny se dotýkají atomy základní mřížky na hranách čtyřstěnu a současně se dotýkají atomu umístěného v tetraedrické dutině (v geometrickém středu čtyřstěnu, tj. v průsečíku výšek). Označíme-li R poloměr atomu základní mřížky a r poloměr atomu v tetraedrické dutině, platí zřejmě (viz obr. 6b)  $a = 2R$ ,  $R+r = d$ . Dále máme (viz též příklad 1.4)

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (v-d)^2 = d^2, \quad v = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Z uvedených rovnic plyne hledaný vztah mezi r a R. Je

$$r = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \approx 0,22 R.$$

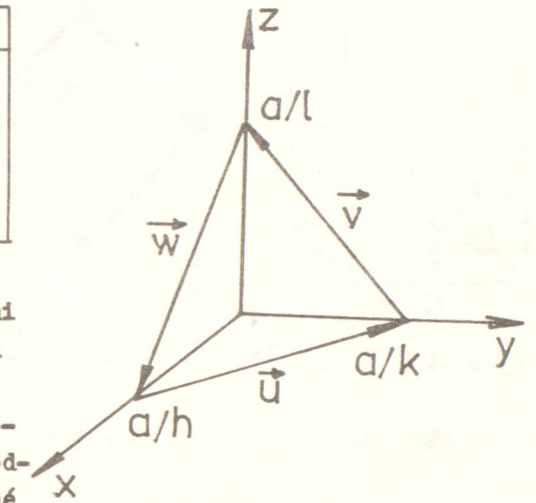
1.7. V určité krystalografické rovině zvolíme řadu atomů vzdálených o pravidelnou vzdálenost t (ne nutně mřížková konstanta). V místech atomů A a B (viz obr. 7) si představíme n-četnou rotační osu kolmou k uvažované krystalogra-



Obr. 7.

grafické rovině. Otočíme-li kolem této osy o úhel  $\alpha = 2\pi/n$  polohy atomů nejbližších atomům A a B, dostaneme podle definice n-četné rotační osy další dvě polohy P a Q obsazené atomy. Jelikož řady atomů ležících na spojnicích AB a PQ jsou v důsledku periodicity krystalové mřížky plně ekvivalentní ( $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ ), musí nutně být  $\overline{PQ} = mt$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Dále podle obr. 7 je také  $\overline{PQ} = t + 2t \cos \alpha$ , tedy  $\cos \alpha = (m-1)/2$ . Dále platí  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ . Z tabulky pak plyne, že n může nabýt pouze hodnot 1, 2, 3, 4, 6.

m	m-1	cos α	α	n = 2π/α
-1	-2	-1	π	2
0	-1	-1/2	2π/3	3
1	0	0	π/2	4
2	1	1/2	π/3	6
3	2	1	2π	1



Obr. 8.

1.8. a) V kubické mřížce rovina s Millerovými indexy (h,k,l) nejbližší libovolně zvolenému počátku vytíná na osách x, y, z pravouhelného souřadného systému úseky a/h, a/k, a/l. Libovolný vektor ve směru [h,k,l] má za týchž podmínek složky úměrné číslům h,k,l. V uvažované rovině leží tři vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  (viz obr. 8)

s těmito složkami:

$$\begin{aligned} u & (-a/h, a/k, 0), \\ v & (0, -a/k, a/l), \\ w & (a/h, 0, -a/l). \end{aligned}$$

Dále zvolíme ve směru [h,k,l] vektor o složkách r (h,k,l). Vypočteme skalární součiny:  $\vec{r} \cdot \vec{u} = -a + a + 0 = 0$ ,  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 - a + a = 0$ . Tím je důkaz proveden (součin  $\vec{r} \cdot \vec{w}$  vede k témuž výsledku).

b) Za podmínek případu a) má rovina s Millerovými indexy (h,k,l) nejbližší počátku rovnici

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1. \quad (A)$$

Nejbližší další rovina soustavy rovin s Millerovými indexy (h,k,l) prochází počátkem, stačí tedy vypočítat vzdálenost roviny (A) od počátku. Úpravou rovnice (A) dostáváme

$$hx + ky + lz - a = 0$$

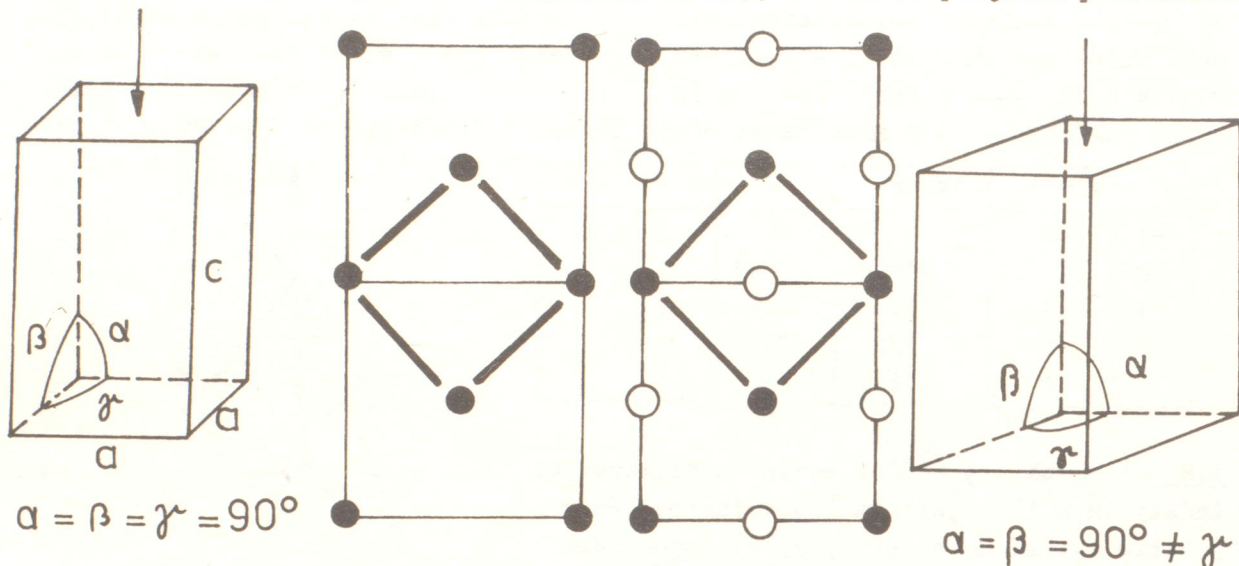
a podle pouček z analytické geometrie pro vzdálenost d roviny od počátku vychází

$$d = d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

1.9. Příklady tohoto druhu se nejsnáze řeší vhodnou rovinnou projekcí příslušných mřížek. Přitom jedním znakem (např. plným kroužkem) označujeme atomy ležící v jedné rovině, druhým znakem (např. prázdným kroužkem) atomy posunutě o 1/2 mřížkové konstanty.

Na obr. 9a je šipkou znázorněn směr projekce tetragonální mřížky. Obr. 9b ukazuje rovinnou projekci tetragonální mřížky bazálně centrované, obr. 9c ro-

vinnou projekci tetragonální mřížky plošně centrované (v obou případech zakresluje projekce dvou elementárních buněk). Silným vytažením je na obr. 9b znázorněna projekce prosté tetragonální mřížky, v obr. 9c projekce prostorově

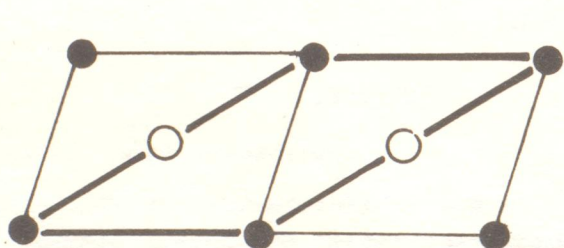


Obr. 9a.

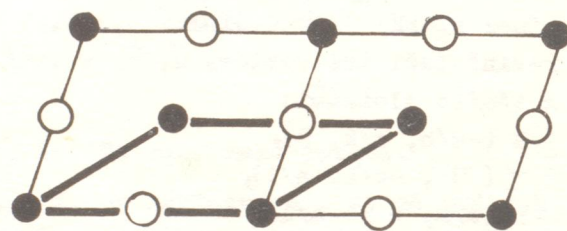
Obr. 9b.

Obr. 9c.

Obr. 10a.



Obr. 10b.



Obr. 10c.

centrované tetragonální mřížky. Lze tedy bazálně centrovanou tetragonální mřížku převést na prostou tetragonální mřížku, plošně centrovanou tetragonální mřížku na prostorově centrovanou tetragonální mřížku.

Na obr. 10a je šipkou znázorněn směr projekce monoklinické mřížky. Obr. 10b ukazuje rovinnou projekci monoklinické mřížky prostorově centrované, obr. 10c rovinnou projekci monoklinické mřížky plošně centrované (v obou případech zakresluje projekce dvou elementárních buněk). V obr. 10b a 10c je silným vytažením znázorněna projekce monoklinické mřížky bazálně centrované. Lze tedy monoklinickou mřížku prostorově i plošně centrovanou převést na monoklinickou mřížku bazálně centrovanou.

1.10. a)  $l = a$ , b)  $l = a\sqrt{3}$ , c)  $l = a\sqrt{\frac{5}{4}}$ .

1.11. Počítá se pomocí skalárního součinu dvou vektorů:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$ ,

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)]^{1/2}}$$

$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$  apod. pro  $b_1, b_2, b_3$ . Vychází  $\alpha = 46,6^\circ$ .

1.12. Vzhledem k výsledku příkladu 1.8a počítá se úhel mezi směry [123] a [321]. Postupem jako v příkladě 1.11 dostáváme  $\alpha = 44,4^\circ$ .

1.13. V případě stabilní konfigurace soustavy dvou atomů je potenciální energie  $E_p(r)$  minimální. Podmínky minima lze zapsat ve tvaru

$$\left(\frac{dE_p}{dr}\right)_{r=r_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2E_p}{dr^2}\right)_{r=r_0} > 0$$

čili

$$\frac{n\alpha}{r_0^{n+1}} - \frac{m\beta}{r_0^{m+1}} = 0, \quad -\frac{n(n+1)\alpha}{r_0^{n+2}} + \frac{m(m+1)\beta}{r_0^{m+2}} > 0.$$

Z první rovnice dostáváme

$$r_0^{m-n} = \frac{m}{n} \frac{\beta}{\alpha} \quad (A)$$

a ze druhé po dosazení z (A)

$$\frac{m\beta}{n\alpha} - \frac{m(m+1)\beta}{n(n+1)\alpha} < 0.$$

Po úpravě je  $m > n$ .

1.14. Madelungova konstanta je definována vztahem

$$A = \sum_{i \neq k} \frac{\pm 1}{q_{ik}}$$

kde  $q_{ik}$  jsou bezrozměrná čísla udávající vzdálenost mezi  $i$ -tým a  $k$ -tým iontem v jednotkách vzdáleností mezi ionty. Je tedy

$$A = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Tento součet určíme pomocí rozvoje funkce  $\ln(1+x)$ . Je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

a pro  $x = 1$  je  $A = 2 \ln 2 \approx 1,39$ .

2.1. Použije se vzorce z vektorového počtu

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}).$$

Dále je  $\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = V$  - objem rovnoběžnostěny tvořené vektory  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ .

Máme tedy (podle (2.3))

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2)(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3) - (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3).$$

Dále je (viz příklad 2.2)  $(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2) = (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3) = 2\pi$ ,  $(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2) = (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3) = 0$ .

$$\text{Vychází tedy } \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{2\pi}{V} (2\pi)^2 = \frac{(2\pi)^3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}.$$

2.2. Platí  $\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = V$  (viz příklad 2.1).

Podle (2.3) pak máme  $\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1) = (\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2) = (\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3) = 2\pi$ . Dále z (2.3) plyne, že vektor  $\vec{b}_1$  je kolmý na vektor  $\vec{a}_2$  a současně na vektor  $\vec{a}_3$ . Potom

$$(\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2) = (\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3) = 0. \text{ Stejně je tomu pro všechny ostatní indexy } i \neq j, \text{ tedy}$$

$$(\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j) = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

2.3. Z Braggy rovnic (2.14) a ze vztahu pro mezivrstevnou vzdálenost  $d_{hkl}$  (viz příklad 1.8) dostáváme  $a \approx 0,6 \text{ nm}$ .

2.4. Z Braggy rovnic dostáváme

$$d_{111} = \frac{\lambda}{2 \sin \Theta}$$

Podle výsledku příkladu 1.8b je  $d_{111} = a/\sqrt{3}$ , a tedy

$$a = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2 \sin \Theta}$$

Z výsledků příkladů 1.1 a 1.2 plyne

$$\sqrt[3]{\frac{pM_m}{\rho N_A}} = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2 \sin \Theta}$$

a pro  $p = 4$  (viz příklad 1.3e) vychází  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

2.5. Z Braggy rovnic a z příkladu 1.8 plyne pro  $d$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \Theta} = \frac{a}{(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}} \text{ a odtud } \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{2a \sin \Theta}{\lambda}$$

Pro různé hodnoty  $\Theta$  sestavíme tabulku

$\Theta$	$10,72^\circ$	$15,31^\circ$	$18,88^\circ$	$21,91^\circ$	$24,69^\circ$	$27,24^\circ$
$\sin \Theta$	0,1860	0,2640	0,3236	0,3731	0,4176	0,4577
$d/\text{nm}$	0,414	0,292	0,238	0,206	0,184	0,168
$\sqrt{h^2+k^2+l^2}$	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45
$h,k,l$	1,0,0	1,1,0	1,1,1	2,0,0	2,1,0	2,1,1

2.6. Pro  $v$  platí

$$\frac{1}{2} m v^2 = e_0 U, \quad v = \sqrt{2e_0 U/m}, \quad \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2me_0 U}} = \frac{1,2279 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot V^{1/2}}{\sqrt{U}}$$

Pro  $U = 80 \text{ kV}$  vychází  $\lambda = 4,34 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .

Pro průměr  $D$  difrakčního kroužku platí (viz hlavní text a Brož J a kol: Základy fyzikálních měření (II) A, SPN Praha 1974, str.233)

$$D = \frac{2L\lambda}{d}$$

kde  $d$  je mezivrstevná vzdálenost v krystalové mřížce. V našem případě  $d = a/\sqrt{3} = 2,087 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Výsledek je  $D = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 20,8 \text{ mm}$ .

3.1. Pro  $T \gg \Theta$  je ve vzorci (3.22)  $0 < x \ll 1$ , takže

$$\frac{x^3}{e^x - 1} \approx \frac{x^3}{1+x} = x^2, \quad \int_0^{\Theta/T} x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\Theta}{T}\right)^3,$$

$$U = 3RT, \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3R.$$

Pro  $T \ll \Theta$  je možno v integrálu v (3.22) nahradit horní mez nekonečnem.

Z matematické analýzy je známo, že

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 6 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Tím (3.22) přechází na tvar

$$U = \frac{3}{5} \frac{\pi^4 R}{\Theta^3} T^4$$

a derivováním podle teploty plyne vzorec (3.24) uvedený v hlavním textu.

3.2. Platí vzorec  $\Theta = h \nu_{\max} / k_B$ . Frekvenci  $\nu_{\max}$  odpovídá vlnová délka  $\lambda_{\min}$ , pro níž můžeme psát přibližně  $\lambda_{\min}/2 = d$ . Označíme-li  $c_z$  rychlost zvuku, máme pak  $\nu_{\max} = c_z / \lambda_{\min} = c_z / 2d$ , a dostáváme

$$c_z = \frac{2k_B \Theta d}{h} = 4,3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Jiný způsob s použitím modelu lineárního atomového řetězce:

$$\Theta = \frac{h \omega_{\max}}{2\pi k_B} = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B}, \quad \omega_{\max} = \frac{k_B \Theta}{\hbar},$$

$$c_z = \frac{a \omega_{\max}}{2} \quad (\text{viz 3.31}),$$

$$c_z = \frac{a k_B \Theta}{2\hbar} = 6,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tabelovaná hodnota  $c_z$  v neomezeném vzorku germania pro podélné zvukové vlny je  $4,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , pro příčné zvukové vlny  $2,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3.3. Odhad velikosti silové konstanty  $\beta$ : V atomovém řetězci je velikost síly  $F$  působící mezi dvěma sousedními atomy dána jako  $F = \beta \Delta x$ , kde  $\Delta x$  je změna rovnovážné meziatomové vzdálenosti (tj. změna mřížkové konstanty  $a$  v jednorozměrném modelu). Platí tedy

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{a}{\beta} \frac{F}{a^2}. \quad (\text{A})$$

$\frac{\Delta x}{a}$  je relativní změna meziatomové vzdálenosti, přibližně též relativní změna délky úseku atomového řetězce nebo soustavy takových úseků.  $F/a^2$  je síla působící na jednotku plochy kolmo ke směru atomových řetězců (na plochu  $a^2$  připadá jeden atomový řetězec a tedy na  $1 \text{ m}^2$  připadá  $1/a^2$  atomových řetězců). Vztah (A) představuje pak Hookův zákon, v němž Youngův modul je  $E = \frac{\beta}{a}$ . Ve struktuře NaCl mají nejbližší ionty vzdálenost rovnu polovině hrany elementární krychle, tedy pro náš jednorozměrný model  $a \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  a

$$\beta = aE \approx 3 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Pro uvažovanou oblast frekvencí je  $\lambda \approx 10^{-4} \text{ m}$ ,  $k = 2\pi/\lambda \approx 6 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ , kdežto hranice Brillouinovy zóny  $k_{\max} = \frac{\pi}{a} \approx 10^{10} \text{ m}^{-1}$ , můžeme tedy počítat s velmi malým  $k$  (případ  $k = 0$ ) a užít vzorce (3.37) pro  $\omega_+ \neq 0$ . Hmotnosti iontů  $m$  a  $M$  dostaneme vynásobením relativních atomových hmotností atomovou hmotností jednotkou  $x$ ), tj.:

x) Ekvivalentní způsob je předělení atomové hmotnosti Avogadrovou konstantou, viz příklad 6.5 a další.

pro Na ...  $m = 23,0166 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 0,382 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ ,  
 pro Cl ...  $M = 35,5166 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 0,589 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ .

Podle vzorce (3.37) vychází pak  $\omega \approx 3,6 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu \approx 0,6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ ,

$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 50 \mu\text{m}$  ( $c$  je rychlost světla). Ve skutečnosti maximum absorpce a reflexe se u NaCl posouvá při  $\lambda = 61 \mu\text{m}$ .

4.1. a) Při řešení postupujte shodně s textem článku 4.1.4.

b) Označme jako  $N$  hustotu mřížkových uzlů,  $N'$  hustotu možných meziuzlových poloh a  $n$  hustotu meziuzlových poloh obsazených atomy. Obsazení meziuzlové polohy znamená současně vytvoření vakance a  $n$  je také hustota Frenkelových poruch. Počet možných uspořádání (pravděpodobnost  $W_1$ )  $n$  vakancí do  $N$  uzlových bodů je (analogicky případu a)

$$W_1 = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Počet možných uspořádání  $n$  atomů do  $N'$  meziuzlových poloh je

$$W_2 = \frac{N'!}{n!(N'-n)!}$$

Pro celkový počet uspořádání (vytvoření) párů vakance + intersticiál platí

$$W = W_1 W_2 = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{N'!}{n!(N'-n)!}$$

Další postup je stejný jako v případě a). Za předpokladu, že  $n \ll N, N'$ , je

$$n = NN' \exp\left(-\frac{\Delta G^*}{2k_B T}\right)$$

4.2. Počet Schottkyových poruch v pevné látce je v rovnovážném stavu při teplotě  $T$  roven

$$n = N \exp\left(-\frac{\Delta G^*}{k_B T}\right)$$

Je-li  $\Delta v$  zanedbatelné, lze psát

$$n = N \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

Celková energie poruch v objemové jednotce bude

$$U_1 = n \Delta u = N \Delta u \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

a pro celkovou energii poruch v jednom molu je

$$U = U_1 V_m = U_1 \frac{M}{\rho} = N \frac{M}{\rho} \Delta u \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right) = N_A \Delta u \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

(Pro  $N$  platí  $N = \frac{\rho N_A}{M}$ ). Pro tepelnou kapacitu (molární) dostáváme

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{N_A (\Delta u)^2}{k_B T^2} \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

Po dosazení obdržíme pro molární tepelnou kapacitu

$$C = 2,04 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

4.3. Pro hustotu Schottkyových poruch v krystalu platí (za předpokladu, že  $\Delta v$  je zanedbatelné)

$$n = N \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

Po přepočtu na jeden atom

$$x = \frac{n}{N} = \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T}\right)$$

Po dosazení dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{Pro } T = 300 \text{ K: } x &= 2,6 \cdot 10^{-13} \\ \text{Pro } T = 873 \text{ K: } x &= 4,7 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

5.1. Hookův zákon pro kubický krystal se dá psát ve tvaru (viz (5.24)):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= s_{11} \sigma_1 + s_{12} \sigma_2 + s_{12} \sigma_3 \\ \epsilon_2 &= s_{12} \sigma_1 + s_{11} \sigma_2 + s_{12} \sigma_3 \\ \epsilon_3 &= s_{12} \sigma_1 + s_{12} \sigma_2 + s_{11} \sigma_3 \\ \epsilon_4 &= s_{44} \sigma_4 \\ \epsilon_5 &= s_{44} \sigma_5 \\ \epsilon_6 &= s_{44} \sigma_6 \end{aligned}$$

Protože napětí působí jen ve směru osy  $[100]$ , pak pouze  $\sigma_1 \neq 0$ , tedy:

$$\epsilon_1 = s_{11} \sigma_1, \quad \epsilon_2 = s_{12} \sigma_1, \quad \epsilon_3 = s_{12} \sigma_1$$

Poissonova konstanta je podle [1] v kapitole 5

$$\mu = -\frac{s_{11}}{s_{12}}$$

5.2. Při hydrostatickém stlačení je  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$  a

$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$ , takže lze z Hookova zákona (5.24) vyjádřit jednotlivá relativní prodloužení  $\epsilon_1$  až  $\epsilon_6$ . Protože pro kubické krystaly platí  $s_{11} = s_{22} = s_{33}$  a  $s_{12} = s_{23} = s_{13}$ , je např.  $\epsilon_1 = -(s_{11} + 2s_{12})p$ .

Pro objemovou deformaci platí

$$\frac{dV}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad \text{čili}$$

$$\frac{dV}{V} = -3(s_{11} + 2s_{12})p$$

Objemová stlačitelnost je v tomto případě definována vztahem  $\kappa = \frac{1}{p} \frac{dV}{V}$ . Je tedy

$$\kappa = -3(s_{11} + 2s_{12})$$

Dále (podle [1] z kapitoly 5) platí

$$c_{11} + 2c_{12} = \frac{1}{s_{11} + 2s_{12}} \quad \text{a proto}$$

$$K = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{-3} (c_{11} + 2c_{12})$$



5.3. Zebecněním vzorce (3.20) dostáváme

$$g(\nu) d\nu = 4\pi \left( \frac{1}{c_1^3} + \frac{2}{c_2^3} \right) \nu^2 d\nu$$

kde  $c_1$  je velikost rychlosti podélných (longitudinálních) vln,  $c_2$  velikost rychlosti příčných (transverzálních) vln; faktor dvě vyplývá ze dvou vzájemně kolmých směrů polarizace příčných vln. Potem (viz odvození vzorce (3.21))

$$3N_A = 4\pi V_A \left( \frac{1}{c_1^3} + \frac{2}{c_2^3} \right) \int_0^{\nu_{\max}} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi V_A}{3} \left( \frac{1}{c_1^3} + \frac{2}{c_2^3} \right) \nu_{\max}^3$$

$$a) \quad \nu_{\max} = \left( \frac{9N_A}{4\pi V_A} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{c_1^3} + \frac{2}{c_2^3} \right)^{-1/3} \quad (A)$$

Velikosti rychlostí  $c_1$  a  $c_2$  lze vyjádřit vztahy (viz [1] kapitola 5)

$$c_1^2 = \frac{3V_M}{M_m \chi} \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad c_2^2 = \frac{3V_M}{2M_m \chi} \frac{1-2\mu}{1+\mu}$$

Po dosazení do (A) dostaneme

$$\nu_{\max}^3 = \frac{9V_M^{1/2} N_A}{4\pi \chi^{3/2} M_m^{3/2} f(\mu)}$$

kde

$$f(\mu) = \left[ \frac{1+\mu}{3(1-\mu)} \right]^{3/2} + 2 \left[ \frac{2(1+\mu)}{3(1-2\mu)} \right]^{3/2}$$

Poněvadž (viz článek 3.4)

$$\Theta = \frac{h \nu_{\max}}{k_B}, \quad \Theta = \left( \frac{9}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{h}{k_B} N_A^{1/3} \left( \frac{V_M}{M_m} \right)^{1/6} \left( \frac{1}{M_m} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{\chi} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{f(\mu)} \right)^{1/3}$$

a po dosazení za  $\frac{M_m}{V_M} = \rho$ , kde  $\rho$  je hustota kovu, dostáváme

$$\Theta = \left( \frac{9N_A}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{h}{k_B} \left( \frac{1}{M_m} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{\chi} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{\rho} \right)^{1/6} \frac{1}{f(\mu)^{1/3}}$$

Po dosazení číselných hodnot vychází

$$f(\mu) = 9,2, \quad \Theta = 340 \text{ K}$$

5.4. Youngův modul a modul pružnosti ve smyku se dají určit z parametrů vzorku a z rezonanční frekvence pomocí vztahu v [7] v kapitole 5:

$$E = 1,6388 \cdot 10^{-1} \left( \frac{l}{d} \right)^4 \frac{m}{l} \nu^2, \quad G = 5,2 \cdot 10^3 \nu^2 \frac{l m}{d^2}$$

kde  $l$  je délka,  $d$  průměr,  $m$  hmotnost vzorku a  $\nu$  rezonanční frekvence.

Po dosazení

$$E = 2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad G = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

5.5. Hookův zákon pro anizotropní krystal lze psát ve tvaru (viz (5.24))

$$\epsilon_p = s_{pq} \sigma_q \quad (A)$$

$$\sigma_p = c_{pq} \epsilon_q \quad (B)$$

kde  $s_{pq}$  event.  $c_{pq}$  jsou matice elastických koeficientů event. matice elastických modulů ( $p, q \dots 1, 2, \dots 6$ ). Vztah mezi  $s_{pq}$  a  $c_{pq}$  lze nalézt z následujících vztahů

$$s_{qr} = \frac{\Delta c_{qr}}{\Delta c}, \quad c_{qr} = \frac{\Delta s_{qr}}{\Delta s}$$

kde  $\Delta c$  je hodnota determinantu vytvořeného z elastických koeficientů,  $\Delta c_{qr}$  vznikne z determinantu  $\Delta c$  vyškrtnutím  $q$ -tého řádku a  $r$ -tého sloupce.

Analogicky pro  $\Delta s_{qr}$  a  $\Delta s$ . Pro kubické krystaly je

$$\Delta c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}$$

Platí tedy

$$s_{44} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}^{-1}$$

Analogicky pro  $s_{11}$  a  $s_{12}$ . Po úpravách vychází

$$s_{44} = \frac{1}{c_{44}}, \quad s_{11} = \frac{c_{11} + c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}, \quad s_{12} = -\frac{c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}$$

Podobným způsobem lze vypočítat vztahy pro  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$ .

6.1.  $k_B T = 290,1, 38 \cdot 10^{-23}; 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ eV} = 0,025 \text{ eV}$  (vhodné k zapamatování!)

a)  $E - E_F = 0,05 \text{ eV} \dots (E - E_F)/k_B T = 2$

$$F_a(E) = \frac{1}{8,39} = 0,119$$

b)  $E - E_F = -0,05 \text{ eV} \dots (E - E_F)/k_B T = -2$

$$F_b(E) = \frac{1}{1,135} = 0,881$$

$$F_a(E) + F_b(E) = 1$$

Obecně:  $E - E_F = \begin{cases} \epsilon \\ -\epsilon \end{cases} \quad \frac{\epsilon}{k_B T} = \delta$

$$\frac{E - E_F}{k_B T} = \begin{cases} \delta \\ -\delta \end{cases}$$

$$\frac{1}{e^{\delta} + 1} + \frac{1}{e^{-\delta} + 1} = 1$$

6.2. Do vzorce (6.10) zavedeme energii místo hybnosti, tj. dosadíme

$$p^2 = 2mE, \quad p \, dp = m \, dE$$

a dostaneme

$$G(E)dE = KE^{1/2}dE, \quad K = 4\pi L^3(2m)^{3/2}/h^3.$$

Vynásobíme-li právě odvozený počet stavů pravděpodobností  $F(E)$ , že stav je obsazen elektronem, dostaneme počet elektronů  $dN_e$  ve stavech o energii mezi  $E$  a  $(E+dE)$  (tj. připadajících na energiový interval  $dE$ ):

$$dN_e = G(E)F(E)dE = KE^{1/2}F(E)dE.$$

Uvedme, že zpravidla počítáme s jednotkovým geometrickým objemem ( $L^3 = 1 \text{ m}^3$ ); v tom případě píšeme

$$dn = g(E)F(E)dE,$$

$$g(E) = CE^{1/2}, \quad C = 4\pi(2m)^{3/2}/h^3.$$

Funkce  $g(E)$  představující počet elektronových stavů vztažený na jednotkový interval energií a na objemovou jednotku se nazývá hustota stavů.

6.3.  $E_F$  je obsaženo ve funkci  $F(E)$ . Obecný návod na řešení zní

$$n = \int_{E=0}^{\infty} dn = C \int_0^{\infty} E^{1/2}F(E)dE.$$

Výpočet proveditelný v případě  $T = 0 \text{ K}$ , kdy

$$F(E) = 1 \text{ pro } 0 \leq E \leq E_{FO} \text{ a } F(E) = 0 \text{ pro } E > E_{FO}.$$

Máme

$$n = C \int_0^{E_{FO}} E^{1/2}dE = \frac{2}{3} CE_{FO}^{3/2}.$$

Po dosazení za  $C$  podle příkladu 6.2 vyjde

$$E_{FO} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

6.4. V souřadnicích kvantových čísel  $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$  představuje rovnice

$$R^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (\text{A})$$

kouli o poloměru  $R$ . Označíme-li  $G$  počet elektronových stavů v jednom oktantu této koule, platí (viz hlavní text)

$$G = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (\text{B})$$

Je-li  $N_e$  volných elektronů v krychli o hraně  $L$ , pak při  $T = 0 \text{ K}$  elektrony zaplní všechny stavy až do určitého poloměru  $R_{\max}$  uvažovaného oktantu, tedy

$$2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R_{\max}^3 = N_e.$$

Rovnice (6.8) přepsaná pomocí (A) a užitím  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  zní

$$E = R^2 \frac{h^2}{8mL^2}. \quad (\text{C})$$

Pro  $R = R_{\max}$  je  $E = E_{\max} = E_{FO}$ , tedy podle (C) a (B)

$$\begin{aligned} E_{FO} &= R_{\max}^2 \frac{h^2}{8mL^2} = \left( \frac{3N_e}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3}{8\pi} \frac{N_e}{L^3} \right)^{2/3} \\ &= \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

6.5. Hustota  $\rho$  každé látky se počítá podle vzorce

$$\rho = N \frac{M_m}{N_A},$$

v němž  $N$  je hustota (koncentrace) atomů (nebo iontů),  $M_m$  molekulová (atomová) hmotnost dané látky a  $N_A$  Avogadrova konstanta (zlomek  $M_m/N_A$  představuje hmotnost jednoho atomu nebo iontu). Sestává-li kov ze  $z$ -mocných iontů, pak koncentrace volných elektronů  $n$  je

$$n = zN = \frac{z\rho N_A}{M_m}.$$

Dosazením do vzorce pro  $E_{FO}$  z příkladu 6.3 a 6.4 dostáváme

$$E_{FO} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N_A}{8\pi} \right)^{2/3} \left( \frac{z\rho}{M_m} \right)^{2/3}.$$

V tomto vzorci jsou odděleny universální konstanty od konstant charakterizujících každý jednotlivý kov. Pro sodík ( $z = 1$ ) vyhledáme v tabulkách  $\rho = 968 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $M_m = 23,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$  (nikoli  $23,0 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ , 1 mol uhlíku je 12 g uhlíku, nikoli 12 kg uhlíku - toto je zdrojem častých chyb!). Vyjde  $E_{FO} = 5,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,1 \text{ eV}$ . Pro draslík ( $z = 1$ ) dostaneme  $E_{FO} = 2,1 \text{ eV}$ , pro hliník ( $z = 3$ )  $E_{FO} = 11,7 \text{ eV}$ .

6.6. Pro  $\bar{E}_0$  zřejmě platí

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{n} \int_0^{E_{FO}} E g(E) dE,$$

význam znaků podle příkladu 6.2 a 6.3, v intervalu 0 až  $E_{FO}$  všechny stavy obsazené. Vychází

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{n} \frac{2}{5} CE_{FO}^{5/2}$$

a podle příkladu 6.3

$$n = \frac{2}{3} CE_{FO}^{3/2}.$$

Eliminací  $C$  dostáváme

$$\bar{E}_0 = \frac{3}{5} E_{FO}.$$

V řádovém odhadu střední energie elektronového plynu můžeme tedy počítat s  $E_{FO}$ ,

jak uvedeno v hlavním textu.

6.7. Z výsledků příkladu 6.5 a 6.6 plyne pro sodík  $\bar{E}_0 = 3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Podle ekvipartičního teorému klasické fyziky (3 stupně volnosti pohybu elektronu, viz čl. 3.2) by mělo platit

$$\bar{E}_0 = \frac{3}{2} k_B T.$$

Odtud

$$T = \frac{2\bar{E}_0}{3k_B} = 1,45 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

Pro srovnání: teplota tání sodíku je  $97,8 \text{ }^\circ\text{C}$ .

6.8. Pro celkovou měrnou tepelnou kapacitu kovu C platí za nízkých teplot

$$C = AT^3 + BT,$$

tedy

$$\frac{C}{T} = AT^2 + B.$$

Vynásíme-li  $\frac{C}{T}$  v závislosti na  $T^2$ , dostáváme přímku; směrnice přímkou určuje konstantu A, úsek přímkou na ose pořadnic konstantu B. V teorii mřížkové tepelné kapacity se učí, že  $A = 233,8 R/\theta^3$  (R a  $\theta$  plynová konstanta a Debyeova teplota, viz čl. 3.4), B je dáno vzorcem (6.16c), v němž  $n = N_A$ .

7.1. V magnetickém poli působí na elektron magnetická síla  $\vec{F} = -e_0 \vec{v}_g \times \vec{B}$ .  $\vec{v}_g$  je grupová rychlost elektronu v souhlase s výkladem v čl. 7.6. Zobecněním rovnice (7.28) dostáváme

$$\vec{v}_g = \hbar^{-1} \text{grad}_{\vec{k}} E;$$

index  $\vec{k}$  značí, že gradient se tvoří podle složek vlnového vektoru  $\vec{k}$ . Ze (7.8b) plyne pak hledaná pohybová rovnice

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\hbar^{-2} e_0 (\text{grad}_{\vec{k}} E) \times \vec{B}.$$

Tato rovnice popisuje pohyb elektronu v k-prostoru, tzn. že místo pozičního vektoru  $\vec{r}$  máme vlnový vektor  $\vec{k}$ , místo složek pozičního vektoru  $x, y, z$  složky  $k_x, k_y, k_z$  vlnového vektoru. Vektor  $\frac{d\vec{k}}{dt}$  je obdobou vektoru rychlosti  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Vektor  $\frac{d\vec{k}}{dt}$  je: 1) kolmý ke gradientu energie, tj. leží na ploše konstantní energie, 2) kolmý k indukci  $\vec{B}$ , tj. leží v rovině kolmé k indukci  $\vec{B}$ . Vektor  $\frac{d\vec{k}}{dt}$  tedy leží v průsečnici plochy konstantní energie a roviny kolmé k indukci  $\vec{B}$ . Jinak řečeno, v k-prostoru se elektron pohybuje po takovéto průsečnici.

7.2. Rozvedením determinantu získáme po úpravě

$$P(Y - X) - i\alpha aXY = 0. \quad (A)$$

Dále vypočteme:

$$1) \quad Y - X = -e^{-i(\alpha+k)a} + e^{i(\alpha-k)a} = e^{-ika} (-e^{-i\alpha a} + e^{i\alpha a}) = 2ie^{-ika} \sin \alpha a.$$

$$2) \quad XY = 1 - e^{i(\alpha-k)a} - e^{-i(\alpha+k)a} + e^{-2ika} = e^{-ika} (e^{ika} - e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a} + e^{-ika}) = 2e^{-ika} (\cos ka - \cos \alpha a).$$

Po dosazení do (A) a krácení nenulovým faktorem  $2ie^{-ika}$  dostáváme hledanou rovnici.

7.3. Podle předpokladu platí

$$E = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) (k_x^2 + k_y^2)$$

(viz čl. 7.4). Ve středu boční strany zóny je  $k_x = \frac{\pi}{a}$ ,  $k_y = 0$  (nebo naopak), tedy

$$E_1 = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right).$$

V rohu první zóny je

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = 2 \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right),$$

tedy

$$E_2 = 2 \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right) \text{ a } \frac{E_2}{E_1} = 2.$$

7.4. Atom Na má elektronovou konfiguraci  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ , atom Cl  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ . Při tvorbě iontové sloučeniny atom Na předává 1 elektron atomu Cl (vznik iontů  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ , které drží pohromadě v podstatě elektrostatickými silami). Oba ionty, tvořící sloučeninu mají pak plně obsazené elektronové slupky ( $\text{Na}^+$  má nejvyšší slupku  $2p^6$ ,  $\text{Cl}^-$   $3p^6$ ) a sloučenina jako celek plně obsazené pásy. Pás  $3s$ , vznikající z hladin  $3s$  atomu Na, sice existuje, ale přechod elektronu do tohoto pásu je energiově velmi nevýhodný (prakticky by to znamenalo převod elektronu k iontu  $\text{Na}^+$  a rozpad sloučeniny na její složky).

7.5. Je přirozené očekávat, že po určitých úsecích, obsahujících N atomových vzdáleností, se budou fyzikální vlastnosti v lineární atomové mřížce opakovat. Požadujeme tedy, aby byla splněna podmínka

$$\psi_{\vec{k}}(x + Na) = \psi_{\vec{k}}(x) \quad (A)$$

(toto je př. tzv. Bornových - Kármánových periodických okrajových podmínek). Protože  $\psi_{\vec{k}}$  je Blocheva funkce, musí podle (7.5) platit (viz též první poznámka pod čarou v čl. 7.2)

$$\psi_{\vec{k}}(x + Na) = \psi_{\vec{k}}(x) e^{ikNa}.$$

Má-li být splněno (A), musí nutně být

$$k = 0, \pm \frac{2\pi}{Na}, \pm \frac{2\pi n}{Na}. \quad (B)$$

Podle vztahu (7.25) a výkladu k němu může být k maximálně rovno  $\frac{\pi}{a}$  (je dosaženo hranice Brillouinovy zóny). Z (B) pak plyne rovnice pro maximální možné n,

$$n_{\max} = \frac{N}{2}.$$

Vzhledem ke znaménkům  $\pm$  je počet možných k (možných vlnových funkcí, stavů) roven  $2n_{\max}$ , tedy počet stavů = N.

(Poznámka: hranice  $+\left(\frac{\pi}{a}\right)$  a  $-\left(\frac{\pi}{a}\right)$  Brillouinovy zóny jsou fyzikálně ekvivalentní, počítá se jen se znaménkem +.)

7.6. Složením dvou harmonických vln dostáváme výsledný kmitový stav

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + A' \sin \omega' \left(t - \frac{x}{v'}\right)$$

(použité symboly mají svůj běžný význam). Maxima (tj. rázy) vznikají na výsledné vlně, je-li splněna podmínka stejných fází obou vln, tj.

$$\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \omega' \left(t - \frac{x}{v'}\right) \quad (A)$$

Vztah (A) váže mezi sebou časy  $t$  a místa  $x$ , v nichž vzniká zesílení výsledné vlny (tj. rázy). Ze vztahu (A) plyne pro rychlost šíření rázů (tj. pro grupovou rychlost  $v_g$ ) vzorec

$$\frac{1}{v_g} = \frac{t}{x} = \frac{\frac{\omega}{v} - \frac{\omega'}{v'}}{\omega - \omega'}$$

tedy v limitě vzorec (7.27) uvedený v hlavním textu.

7.7. S použitím výsledků příkladu 6.5 máme pro hledanou efektivní hmotnost elektronu

$$m_n^* = \frac{h^2}{2E_{FO}} \left(\frac{3N_A}{8\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho}{M_n}\right)^{2/3}$$

(pro Li je  $z = 1$ ).

Numerickým výpočtem dostaneme

$$m_n^* = 12,4 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

7.8. a) Označme  $e_0$  náboj,  $m_n^*$  efektivní hmotnost,  $\omega$  kruhovou frekvenci a  $r$  poloměr dráhy oběhu elektronu. Rovnost velikostí odstředivé a magnetické síly je při daném uspořádání pokusu vyjádřena rovnicí

$$m_n^* \omega^2 r = B e_0 \omega r$$

takže pro kruhovou frekvenci oběhu elektronu máme

$$\omega = \frac{B e_0}{m_n^*}$$

Rezonance nastává, je-li  $\nu_r = \frac{\omega}{2\pi}$ , neboli

$$\nu_r = \frac{B e_0}{2\pi m_n^*} \quad (A)$$

b) V řádovém odhadu klademe  $B \approx 1 \text{ T}$ ,  $e_0 \approx 10^{-19} \text{ C}$ ,  $2\pi \approx 10$ ,  $m_n^* \approx 10^{-30} \text{ kg}$ . Vychází tedy  $\nu_r \approx 10^{10} \text{ Hz}$ . Pro vlnovou délku  $\lambda$  platí

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

( $c$  = rychlost šíření světla), takže

$$\lambda \approx 10^8 / 10^{10} = 10^{-2} \text{ m}$$

Jde tedy o oblast centimetrových vln, užívanou v radiolokační technice. Pro úplnost uvedeme, že u cyklotronu je  $\lambda \approx 10 \text{ m}$ .

c) Ze vzorce (A) plyne pro  $m_n^*$

$$m_n^* = \frac{B e_0}{2\pi \nu_r}$$

Dosažením numerických hodnot podle zadání dostaneme

$$m_n^* = 1,83 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

d) Rovnost mezi velikostmi odstředivé a magnetické síly lze též napsat ve tvaru

$$\frac{m_n^* v^2}{r} = B e_0 v$$

kde  $v$  je rychlost elektronu. Odtud plyne

$$r = \frac{m_n^* v}{B e_0}$$

Dosažením numerických hodnot podle zadání ( $v = 3 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ ) a podle výsledku bodu c) dostaneme

$$r = 3,42 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

8.1.

$$j = \frac{I}{S} = n e_0 \bar{v}, \quad \bar{v} = \frac{I}{n e_0 S}$$

$$n = \rho \frac{N_A}{M_n}$$

(viz příklad 6.5, pro měď  $z = 1$ )

$$\bar{v} = \frac{I M_n}{\rho N_A e_0 S} = \frac{1,0,0635}{8960,6,023 \cdot 10^{23} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \text{ m.s}^{-1} = 3,7 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$$

8.2.

$$\rho = n e_0 \mu$$

$$\frac{\rho_{Ag}}{\rho_{Cu}} = \frac{n_{Ag} \mu_{Ag}}{n_{Cu} \mu_{Cu}} = \frac{6,12}{5,76}, \quad n = \rho \frac{N_A}{M_n}$$

$$\frac{\rho_{Ag} M_{Cu} \mu_{Ag}}{\rho_{Cu} M_{Ag} \mu_{Cu}} = \frac{6,12}{5,76}$$

$$\frac{\mu_{Ag}}{\mu_{Cu}} = \frac{6,12}{5,76} \frac{\rho_{Cu} M_{Ag}}{\rho_{Ag} M_{Cu}} = \frac{6,12 \cdot 8960,108}{5,76 \cdot 10500,63,5} = 1,5$$

8.3. Pro sodík vychází  $n = 2,53 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (způsob výpočtu viz oba předchozí příklady).

$$\rho = n e_0 \mu$$

$$\mu = \frac{\gamma}{ne_0} = \frac{2,3 \cdot 10^7}{2,53 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} =$$

$$= 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\gamma = \frac{ne_0^2 \tau_{FO}}{m},$$

$$\tau_{FO} = \frac{m \gamma}{ne_0^2} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 2,3 \cdot 10^7}{2,53 \cdot 10^{28} \cdot 2,56 \cdot 10^{-38}} \text{ s} = 3,24 \cdot 10^{-14} \text{ s}.$$

Relaxační doby řádu  $10^{-14}$  s svědčí o velmi rychlém přechodu mezi rovnovážným a stacionárním stavem (a naopak) při zapnutí (a vypnutí) elektrického pole.

$$v_{FO} = \left( \frac{2E_{FO}}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \right)^{1/2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\lambda_{FO} = v_{FO} \tau_{FO} = 1,05 \cdot 10^6 \cdot 3,24 \cdot 10^{-14} = 34 \text{ nm}$$

Povšimněte si, že  $\lambda_{FO}$  převyšuje o dva řády běžné hodnoty mřížkových konstant.

8.4. Pro měď dostáváme  $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  ( $z = 1$ , způsob výpočtu viz příklad 8.1 a 8.2).

a)  $\bar{v} = \mu \mathcal{E} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Poznámka: V tomto příkladě vychází proudová hustota

$$j = ne_0 \bar{v} = 6 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2},$$

což je nejvyšší trvale možné proudové zatížení mědi při volně umístěném vodiči. V příkladu 8.1 je proudová hustota  $j = 0,05 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ . Proto v obou příkladech dostáváme různé střední unášivé rychlosti  $\bar{v}$ , a to v poměru příslušných proudových hustot.

b) Způsobem podle příkladu 8.3 vypočteme

$$v_{FO} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\frac{\bar{v}}{v_{FO}} = \frac{4,4 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^6} = 2,75 \cdot 10^{-10}$$

Rychlost udělená elektronu vnějším elektrickým polem je tedy zanedbatelná vůči složkám rychlosti  $v_x, v_y, v_z$  chaotického pohybu elektronů. Toho je použito při odvozování vzorce (8.19).

c)  $\gamma = ne_0 \mu = 8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,4 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} =$   
 $= 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$

8.5. Podle vztahu (8.34) je

$$K = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e_0} \right)^2 \gamma T = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2 \cdot \text{K}^{-2} \gamma T = 2,44 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^7 \cdot$$

$$\cdot 273 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \doteq 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Poznámka: V tomto numericky velmi jednoduchém příkladě věnujte se zejména správnému odvození rozměru měrné tepelné vodivosti.

8.6. Uvnitř supravodiče nemůže existovat magnetická indukce, je tedy v soulase s rovnicí (8.35) všude uvnitř drátu proud  $I = 0$  a veškerý proud prochází povrchem drátu. Indukční čáry vně drátu jsou soustředné kružnice v rovině kolmé k drátu a se středy v ose drátu. Z rovnice

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

plyne, označíme-li  $r$  kolmou vzdálenost od osy drátu, pro magnetickou indukci vně drátu vzorec

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \quad (A)$$

$B_0$  nabývá maximální hodnoty na povrchu drátu, tj. pro  $r = R$ . Aby drát zůstal supravodivým, může  $B_0$  dosáhnout nejvýše kritické hodnoty  $B_{ok}$ . Z rovnice (A) plyne pak pro maximální proud  $I_{max}$  vzorec (Silsbeeův)

$$I_{max} = \frac{2 \pi R B_{ok}}{\mu_0} = \frac{2 \pi R B_{ok}}{4 \pi \cdot 10^{-7}} = 10^7 R B_{ok} / 2.$$

Pro drát s obsahem příčného řezu  $1 \text{ mm}^2$  je  $R = 5,64 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Podle tabulky 8.1 dostáváme pak v limitě  $T \rightarrow 0 \text{ K}$  např. pro Ti hodnotu  $I_{max} = 15,8 \text{ A}$ , pro Nb hodnotu  $I_{max} = 581 \text{ A}$ .

Poznámka: Omezujeme se na supravodiče 1. typu, protože u nich existuje při každé teplotě připouštějící supravodivost pouze jedna hodnota kritické indukce  $B_{ok}$ . Pro srovnání s normálními (konvenčními) vodiči si povšimněte, že např. u mědi maximální použitelná proudová hustota je za normálních okolností  $j \approx 6 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$  (tj.  $I_{max} \approx 6 \text{ A}$ ), viz příklad 8.4a. Vyššímu proudovému zatížení brání enormní vývin Jouleova tepla.

9.1.

$$\langle \mu_{AH} \rangle = A \left( \frac{\mu_A}{x} \right)^2 \int_{-x}^x y(1+y) dy = \frac{2}{3} A \mu_A^2 x,$$

$$1 = A \frac{\mu_A}{x} \int_{-x}^x (1+y) dy = 2A \mu_A,$$

$$\langle \mu_{AH} \rangle = \frac{1}{3} \mu_A x, \quad M = \frac{1}{3} N \mu_A x.$$

Po dosazení za  $x$  podle (9.7) plyne ihned (9.12a) a také (9.12b-c).

x)

Tento vzorec je znám z elementární fyziky pro případ, že proud prochází celým příčným řezem normálního (konvenčního) vodiče.

9.2. V blízkosti počátku lze pro  $L(x)$  v (9.19) použít aproximace (9.10). Máme tedy podle (9.18) a (9.19)

$$\frac{k_B T_C}{\mu_0 \mu_A W} = \frac{1}{3} N \mu_A, \quad T_C = \frac{N \mu_0 \mu_A^2}{3 k_B} W.$$

Po dosazení podle (9.12c) plyne (9.17).

9.3. a) Železo: 2 atomy/elementární buňku  
Počet atomů v  $1 \text{ m}^3$

$$N = \frac{2}{(0,286 \cdot 10^{-9})^3} = 0,855 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$M = N \cdot 2,2 \mu_B = 0,855 \cdot 10^{29} \cdot 2,2 \cdot 9,27 \cdot 10^{-24} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$J = \mu_0 M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,74 = 2,19 \text{ T}$$

b) Nikl: 4 atomy/elementární buňku

$$N = \frac{4}{(0,352 \cdot 10^{-9})^3} = 0,918 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$M = N \cdot 0,6 \mu_B = 0,918 \cdot 10^{29} \cdot 0,6 \cdot 9,27 \cdot 10^{-24} = 0,51 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$J = \mu_0 M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,51 \cdot 10^6 = 0,64 \text{ T}.$$

9.4. Kubická struktura (viz článek 9.6), na 1 elementární buňku připadá 8 molekul  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , tj. též 8 atomů Co.  
Počet atomů Co v  $1 \text{ m}^3$

$$N = \frac{8}{(0,838 \cdot 10^{-9})^3} = 1,36 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

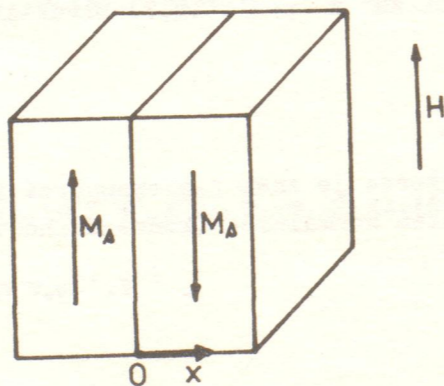
Magnetický moment na atom Co

$$\mu = \frac{4,25 \cdot 10^5}{N} = 3,12 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Je-li Bohrov magneton  $9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , pak na atom kobaltu připadá 3,4 Bohrova magnetonu.

9.5. V nulovém poli nechť je krychle rozdělena na dvě stejné části s antiparalelně orientovanou spontánní magnetizací (obr.11). Magnetický moment krychle pozorovaný navenek je pak nulový. Při aplikaci pole o intenzitě velikosti  $H$  posune se stěna z polohy 0 do polohy  $x$ . Tím vznikne v krychli magnetický moment

$$\mu = 2a^2 M_A x.$$



Obr.11. K odvození magnetické susceptibilitě při posuvu doménové stěny

(směna z  $-M_A$  na  $+M_A$ , srov. s odvozením rovnice (9.24)) a magnetizace  $M$  pozorovaná navenek ve směru pole je

$$M = \frac{\mu}{a^3} = \frac{2M_A x}{a}.$$

Dále z rovnice (9.24) při  $\gamma = kx^2$  plyne

$$kx = \mu_0 H M_A.$$

Vyloučením  $x$  z obou rovnic dostáváme

$$M = \frac{2\mu_0 H M_A^2}{ak}, \quad \chi_m = \frac{M}{H} = \frac{2\mu_0 M_A^2}{ak}.$$

Skutečnost, že susceptibilita  $\chi_m$  nezávisí na velikosti intenzity pole  $H$ , je dána speciálním tvarem závislosti  $\gamma = \gamma(x)$ .

10.1. Výklad podle vzorce (10.23). Např. vrstva zlata žluté světlo silně odráží i pohlcuje. Potom v prošlém světle chybí z bílého světla žlutá složka, prošlé světlo se jeví jako modré (doplňková barva ke žluté).

10.2. Ve vzorci (10.33b) je  $N$  počet iontů v objemové jednotce kovu (hustota iontů) a současně počet volných elektronů v objemové jednotce kovu (hustota volných elektronů). Jak bylo uvedeno v příkladu 6.5, počítá se  $N$  podle vzorce

$$N = \frac{\rho N_A}{M_M}.$$

Tím (10.33b) nabude tvaru

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi e}{e_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0 M_M}{N_A}} \sqrt{\frac{M_M}{\rho}}$$

a po dosazení číselných hodnot

$$\lambda_{\max} = 4,31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1/2} \cdot \text{mol}^{1/2} \sqrt{\frac{M_M}{\rho}}.$$

Hodnoty veličin  $M_M$  a  $\rho$  pro jednotlivé alkalické kovy vyhledáme v tabulkách. Výpočtem dostaneme výsledky ve velmi dobré shodě s tabulkou 10.1.

10.3. Hledaná rovnice je

$$m\ddot{x} = -Kx - gm\dot{x} - e_0 \dot{\epsilon} e^{i\omega t}$$

neboli

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e_0 \dot{\epsilon}}{m} e^{i\omega t}, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$x = A e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Po výpočtu  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  a dosazení dostáváme z imaginární a reálné části vztahy pro  $\text{tg} \varphi$  a  $A$ . Z imaginární části plyne

$$\text{tg} \varphi = \frac{g \omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{g\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}}$$

Z reálné části s použitím výsledků pro  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  odvodíme

$$A = -\frac{e_0 \xi_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}} \cdot x)$$

Uvažíme-li, že  $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$  (dopadající vlna), máme podle rovnice (10.28)

$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \xi_0 e^{i\omega t} = (n^2 - 1)\epsilon_0 \xi_0 e^{i\omega t}$$

a dále podle (10.27) pro  $f = 1$

$$P = -Ne_0 x = -Ne_0 A e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Porovnáním posledních dvou rovnic a dosazením za  $A$  dostáváme

$$n^2 - 1 = \frac{Ne_0^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}} e^{-i\varphi}$$

Jelikož  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$  a pro  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  platí výše odvozené vzorce, vychází

$$\tilde{n}^2 - 1 = \frac{Ne_0^2}{\epsilon_0 m} \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}} - i \frac{g\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}} \right]$$

Ke znaku  $\tilde{n}$  přecházíme proto, že index lomu je zřejmě komplexní číslo. Užijeme-li rozkladu na reálnou a imaginární část podle (10.18), plynou z poslední rovnice vzorce (10.36) uvedené v hlavním textu.

10.4. Pod polárním úhlem  $\vartheta$  vymežíme na povrchu kulové dutiny poloměru  $R$  prstenec šířky  $Rd\vartheta$  a poloměru  $R \sin \vartheta$  (obr. 12). Plošnou hustotu elektrického náboje  $\sigma$  na prstenci dostaneme jako normálovou složku polarizace  $P$  vzhledem k ploše prstence, tj.

$$\sigma = P \cos \vartheta$$

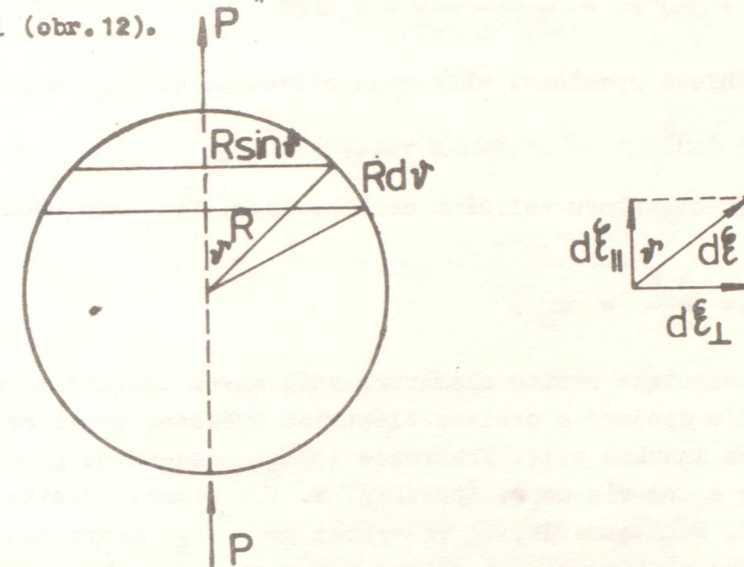
Elektrický náboj na prstenci je pak

$$dQ = 2\pi R \sin \vartheta Rd\vartheta P \cos \vartheta$$

Každý element prstence vyvolává uprostřed dutiny příspěvek k intenzitě elektrického pole o velikosti  $d\mathcal{E}$  ve směru spojnice elementu prstence se středem dutiny (ve směru průvodiče).

x) Ohledně záporného znaménka viz poznámka ke vzorci (10.27).

Příspěvek  $d\mathcal{E}$  má složku  $d\mathcal{E}_{||}$  rovnoběžnou s polarizací a složku  $d\mathcal{E}_{\perp}$  kolmou k polarizaci (obr. 12).



Obr. 12. K výpočtu Lorentzova pole

Při integraci po obvodu prstence se složky  $d\mathcal{E}_{\perp}$  vyruší. Složka  $d\mathcal{E}_{||}$  přispívající k Lorentzovu poli  $\mathcal{E}_{LOR}$  (rovnoběžnému s polarizací) je dána jako

$$d\mathcal{E}_{||} = d\mathcal{E} \cos \vartheta$$

Užijeme-li pro velikost intenzity elektrického pole známého vzorce

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

( $Q$  = celkový náboj), dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{LOR} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^\pi 2\pi R \sin \vartheta Rd\vartheta P \cos \vartheta \cos \vartheta = \\ &= \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{P}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Poznámka: Lze ukázat, že Lorentzovo pole je uvnitř kulové dutiny homogenní (tj. má v celé dutině velikost  $P/3\epsilon_0$  a směr polarizace  $P$ ).

10.5. Označíme-li  $m$  a  $e_0$  hmotnost a náboj elektronu,  $\omega$  úhlovou rychlost a  $r$  poloměr oběžné dráhy elektronu, máme pro rovnající se velikosti odstředivé a elektrické síly za nepřítomnosti pole vztah

$$m\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{r^2}$$

Po zapojení magnetického pole o indukci v uvedeném směru bude elektron vystaven ještě magnetické síle o velikosti  $F_{mag} = e_0 \omega r B$  působící ve směru nebo proti směru elektrické síly v závislosti na tom, v jakém směru elektron obíhá. Platí pak obecněji

$$m(\omega + \Delta\omega)^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{r^2} + e_0 \omega r B,$$

kde  $\Delta\omega$  je změna úhlové rychlosti elektronu vlivem pole. Dále máme

$$(\omega + \Delta\omega)^2 = \omega^2 + 2\omega\Delta\omega + \dots,$$

kde tečky značí zanedbatelnou veličinu druhého řádu. Spojením obou rovnic dostáváme

$$\Delta\omega = \frac{e_0 B}{2m} = \omega_L.$$

V případě obecné orientace orbitu elektronu vůči směru indukce magnetického pole koná souřadný systém spojený s orbitem elektronu precesní pohyb kolem osy precese shodné se směrem indukce pole. Frekvence tohoto precesního pohybu je opět rovna  $\omega_L$ . Blíže o tom viz např. Špolskij, E. V.: Atomová fyzika I. SNTL, Praha 1957, s. 196. Podstatné je, že ve vzorci pro  $\omega_L$  nevystupuje ani poloměr  $r$  oběžné dráhy elektronu, ani úhlová rychlost  $\omega$  oběhu elektronu, tj. veličiny vázané s výchozí modelovou představou.

Frekvence  $\omega_L$  dává vznik dodatečnému (neindukovanému) proudu v orbitálním pohybu elektronů, je tedy též příčinou diamagnetismu (čl. 9.2.1).

Frekvence  $\omega_L$  je rovna právě polovině rezonanční frekvence

$$\omega_r = 2\pi\nu_r$$

při cyklotronové rezonanci (čl. 7.6 a př. 7.8). Obě frekvence jsou v běžně užívaných polích o několik řádů nižší než frekvence oběhu elektronu v Bohrově modelu atomu nebo frekvence světla vyzařovaného atomy. To opravňuje aproximace užitá ve vzorci (10.50).

11.1. Podle zadání platí

$$E - E_F = \pm 3k_B T.$$

Ze vztahu (11.24) vychází

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp 3} = 0,047 \quad \text{pro } (E - E_F) = 3k_B T$$

a

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp(-3)} = 0,953 \quad \text{pro } (E - E_F) = -3k_B T.$$

Z výsledků úlohy je vidět, že energiové hladiny nacházející se  $3k_B T$  pod  $E_F$  jsou prakticky obsazeny všechny a hladiny nacházející se  $3k_B T$  nad  $E_F$  jsou prakticky prázdné.

11.2. Ze vztahu (11.45) vychází pro  $E_F$ :

$$\text{Pro } T = 0 \text{ K} \quad \text{je} \quad E_F = -0,5 \text{ eV},$$

$$\text{pro } T = 300 \text{ K} \quad \text{je} \quad E_F = (-0,5 + \frac{3}{4} \cdot 8,3333 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \ln 5) \text{ eV} = -0,47 \text{ eV}.$$

Dále ze vztahu (11.41) platí

$$\begin{aligned} &\text{pro } T = 300 \text{ K} \quad n_1 = 1,60 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} \\ &\text{a} \quad \text{pro } T = 600 \text{ K} \quad n_1 = 7,09 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

11.3. (Analogický případ pro polovodič typu N je řešen v článku 11.7.5). Platí (viz vztah (11.69))

$$p = N_a \left( 1 + 2 \exp \frac{E_A - E_G - E_F}{k_B T} \right)^{-1}$$

a také se vztahu (11.44)

$$p = N_V \exp \frac{-E_F - E_G}{k_B T}.$$

Řešením rovnic dostáváme pro  $p$

$$p = \frac{-N_V + \sqrt{N_V^2 + 8N_a N_V \exp(E_A/k_B T)}}{4 \exp E_A/k_B T}$$

a pro  $E_F$

$$E_F = -k_B T \ln \frac{-1 + \sqrt{1 + (8N_a/N_V) \exp(E_A/k_B T)}}{4} + E_A - E_G.$$

11.4. a) Protože As je pěticečný, jedná se o polovodič typu N.

b) Protože pro  $T = 300 \text{ K}$  je  $k_B T > E_D$  ( $k_B T = 0,025 \text{ eV}$ ), jsou prakticky všechny donorové příměsi ionizovány. Pak je  $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$  (zanedbáme-li vlastní vodivost). Dále platí

$$\begin{aligned} np &= n_1^2 & p &= \frac{n_1^2}{n}, \quad n_1^2 = N_C N_V \exp(-E_G/k_B T) \quad \text{a tedy} \\ p &= \frac{4 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \left( \frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}}{n} \exp\left(-\frac{E_G}{k_B T}\right). \end{aligned}$$

Číselně  $N_C = 6,7 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ ,  $N_V = 2,54 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ ,  $p = 9,67 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$ .

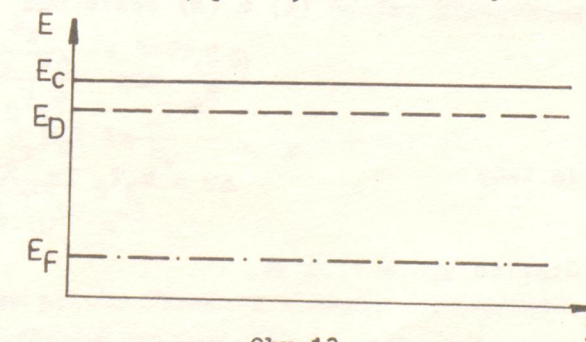
c) Vzhledem k výpočtu v části b) je  $n_1 = 9,83 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$

d) Pro  $E_F$  platí

$$n = N_D = N_C \exp \frac{E_F}{k_B T}$$

$$E_F = k_B T \ln \frac{n}{N_C} = -0,1 \text{ eV}.$$

Grafické znázornění příměsových hladin je na obr. 13.



Obr.13.

11.5. Hustotu atomů v Ge označme  $N$  a hustotu elektronů  $n$ . Platí (viz příklad 6.5)

$$\text{a) } N = \frac{N_A \bar{\rho}}{M_m},$$

kde  $N_A$  je Avogadrova konstanta,  $M_m$  molární hmotnost a  $\bar{\rho}$  je hustota látky. Podle předpokladu je



$$n = 10^{-6} N = 10^{-6} \frac{N_A \bar{\rho}}{M_m} = 4.6 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}.$$

Ze vztahu (11.49) je

$$n_1 = \left[ \frac{4(2\pi m k_B T)^3 \exp(-E_g/k_B T)}{h^6} \right]^{1/2} = 6.04 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$p = n_1^2/n = 7.93 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

b) Pro měrný odpor platí podle vztahu (12.8)

$$\rho = \frac{1}{n e_0 \mu_n + p e_0 \mu_p}$$

Vzhledem k velikostem  $p$ ,  $n$ ,  $n_1$  je

$$\rho \approx \frac{1}{n e_0 \mu_n} \approx 3.7 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}.$$

11.6. a) Vzhledem k tomu, že vakance tvoří příměsí akceptorového typu a protože došlo při žíhání ke zvětšení měrné vodivosti, jednalo se o polovodič typu P. I další předpoklad, že nedošlo ke změně znaménka Hallovy konstanty, je v souladu s určením typu vodivosti.

b) Protože  $k_B T = 0.025 \text{ eV}$  a  $E_A = 0.01 \text{ eV}$ , budou při pokojové teplotě prakticky všechny akceptorové příměsí vytvořené vakancemi ionizovány. Platí

$$\gamma_2 = (p + n_v) e_0 \mu_p, \quad \gamma_1 = p e_0 \mu_p \quad (\text{A})$$

Pro hustotu vakancí vytvořenu při teplotě  $T_2$  platí (při splnění uvedených předpokladů)

$$n_v = N \exp\left(-\frac{N_V}{k_B T_2}\right) = \frac{\rho N_A}{M_m} \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T_2}\right), \quad (\text{B})$$

kde  $\rho$  je hustota germania, význam ostatních symbolů je zřejmý. Vzhledem k velmi rychlé změně teploty z  $T_2$  na  $T_1$ , je při této teplotě hustota vakancí také  $n_v$  (nestačí dojít ke snížení jejich hustoty).

Porovnáním vztahů (A) a (B) dostáváme

$$\frac{\rho N_A}{M_m} \exp\left(-\frac{\Delta u}{k_B T_2}\right) e_0 \mu_p = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{e_0 \mu_p}.$$

Je tedy

$$\Delta u = k_B T_2 \ln \frac{e_0 \mu_p \rho N_A}{(\gamma_2 - \gamma_1) M_m}.$$

Číselně  $\Delta u = 1.35 \text{ eV}$ .

11.7. (Výpočet  $p$  je analogický výpočtu  $n$  v článku 11.7.5.)

Rovnici neutrality píšeme ve tvaru

$$p + N_a^- = N_a.$$

Dosazením ze vztahu (11.67) máme

$$p + N_a \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_F + E_g - E_A}{k_B T}\right)\right)^{-1} = N_a. \quad (\text{A})$$

Dosazením ze vztahu (11.48) je

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_F + E_g}{k_B T}\right). \quad (\text{B})$$

Spojením vztahů (A) a (B) dostáváme po úpravě

$$p = -\frac{1}{4} N_V \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} N_V^2 \exp\left(-\frac{2E_A}{k_B T}\right) + 2N_a N_V \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right)} \quad (\text{C})$$

Číselně  $p = 1.1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ .

Pro měrnou vodivost je  $\gamma = p e_0 \mu_p = 0.18 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Poznámka: Vztah (C) lze upravit na tvar

$$p = \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8N_a}{N_V} \exp\left(\frac{E_A}{k_B T}\right)}\right] \frac{1}{4} N_V \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right).$$

Pro  $T$  malé je  $\exp\left(\frac{E_A}{2k_B T}\right) \gg 1$  a proto i

$$p = \left[-1 + \left(\frac{8N_a}{N_V}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{E_A}{2k_B T}\right)\right] \frac{1}{4} N_V \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right) \approx \left(\frac{N_a N_V}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{E_A}{2k_B T}\right).$$

Je to analogie vztahu pro  $n$  v příkladu 11.10c.

11.8. a) Protože převládá hustota atomů india a protože indium je trojmocný prvek, jedná se o vodivost typu P

b) Pro hustotu děr platí

$$p = N_a - N_d = 10^{22} \text{ m}^{-3}.$$

Hustotu elektronů lze vypočítat ze vztahu

$$n = \frac{n_1^2}{p} = \frac{N_C N_V \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right)}{p} = \frac{4 \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^3 \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right)}{p}$$

Číselně  $N_C = N_V = 2.53 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ,  $n = 2.21 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$ .

c) Platí

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_g - E_F}{k_B T}\right). \text{ Je tedy}$$

$$-E_g - E_F = k_B T \ln \frac{p}{N_a}, \quad E_F = -E_g - k_B T \ln \frac{p}{N_a}, \quad E_F = -0.9 \text{ eV}$$

d) Vzorek sestává polovodičem typu P. Platí

$$p = 2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}, \quad n = n_1^2/p = 1.1 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}.$$

11.9. Je-li splněna podmínka týkající se polohy Fermiovy energie (nedegenerovaný polovodič), platí s využitím vztahů (11.47) a (11.48)

$$np = N_C N_V \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right) = 4 \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^3 T^3 \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right).$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme výše uvedený vztah.

11.10a. Podle vztahu (11.2a) je po dosazení číselných hodnot  $E_D = 6.6 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

b) Ze vztahu (11.2b) vychází  $r = 64 \text{ nm}$ .

V porovnání s mřížkovou konstantou ( $\sim 10^{-1}$  nm) se elektron pohybuje ve značné vzdálenosti od jádra, což vysvětluje např. i značně malou ionizační energii  $E_D$ .

c) Vyjdeme ze vztahu (11.79), kde podle zadání je  $N_a = 0 \text{ m}^{-3}$  a  $n \ll N_d$  (velmi nízké teploty). Pak

$$n = \sqrt{\frac{N_d N_C}{2}} \exp\left(-\frac{E_D}{2k_B T}\right) = 2,18 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}.$$

12.1. Derivováním  $F_0(E)$  dostáváme

$$\frac{\partial F_0}{\partial T} = \frac{1}{\left(1 + \exp\frac{E - E_F}{k_B T}\right)^2} \frac{1}{k_B} \frac{\partial(E - E_F)}{\partial T} \exp\frac{E - E_F}{k_B T}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial E} = \frac{1}{\left(1 + \exp\frac{E - E_F}{k_B T}\right)^2} \frac{1}{k_B T} \exp\frac{E - E_F}{k_B T}.$$

Po úpravách je

$$\frac{\partial F_0}{\partial T} = \frac{1}{\left(1 + \exp\frac{E - E_F}{k_B T}\right)^2} \frac{1}{k_B T} \exp\frac{E - E_F}{k_B T} T \frac{\partial}{\partial T}(E - E_F) = \frac{\partial F_0}{\partial T} T \frac{\partial}{\partial T}(E - E_F)$$

12.2. Podle vztahu (12.30) je

$$r_H = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} \quad \text{a} \quad \tau = aE^{-s},$$

kde pro rozptyl na ionizovaných příměsích platí  $s = -\frac{3}{2}$ .

Podle (12.45) je

$$\langle \tau \rangle = a(k_B T)^{-s} \Gamma\left(\frac{5}{2} - s\right) / \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Dále (viz (12.42))

$$\langle \tau^2 \rangle = a^2 \int_0^\infty E^{2s} E^{3/2} \exp(-E/k_B T) dE / \int_0^\infty E^{3/2} \exp(-E/k_B T) dE.$$

Zavedením substituce

$$t = \frac{E}{k_B T}$$

a po úpravách je

$$\langle \tau^2 \rangle = a^2 (k_B T)^{-2s} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - 2s\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

Pro  $s = -\frac{3}{2}$  dostáváme

$$\langle \tau^2 \rangle = a^2 (k_B T)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}.$$

$$\text{Platí } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \pi^{1/2}, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \pi^{1/2}, \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \pi^{1/2},$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \pi^{1/2}, \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2} \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \pi^{1/2}.$$

Je tedy

$$\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{9}{2} \frac{7}{2} \frac{5}{2} \quad \text{a} \quad \langle \tau^2 \rangle = a^2 (k_B T)^3 \frac{9 \cdot 7 \cdot 5}{2^3}.$$

Po dosazení z (12.37) dostáváme

$$\langle \tau \rangle^2 = a^2 (k_B T)^3 \frac{3! 3! 2^2}{3^2 \pi} \quad \text{a} \quad r_H = \frac{315}{512} \pi.$$

12.3 a) Ze vztahu (12.40) a (12.2a) dostáváme

$$-\frac{\Delta \gamma}{\gamma_0} = B^2 \mu_n^2 \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^4} = 0,16.$$

b) Vzhledem k předchozímu platí

$$\frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} = 0,16 \quad \text{a} \quad \text{tedy} \quad \gamma = 0,84 \gamma_0.$$

Před umístěním vzorku do magnetického pole prochází vzorkem proud

$$I_0 = bcne_0 \mu_n \frac{U}{a} = 2,18 \text{ A. Proud se změní o } 0,35 \text{ A, tj. o } 16\%.$$

12.4. Platí

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{a}{ac}} = U \gamma c = U n e_0 \mu c = 48 \text{ mA}.$$

12.5. Pro vlastní polovodič platí

$$\gamma = n_i e_0 (\mu_n + \mu_p), \quad n_i = \frac{\gamma}{e_0 (\mu_n + \mu_p)} = \frac{1}{\rho e_0 (\mu_n + \mu_p)}.$$

Číselně  $n_i = 2,4 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ .

12.6. Platí:

$$\gamma = n e_0 \mu_n, \quad |R_H| = \frac{1}{n e_0}.$$

Řešením těchto rovnic vychází

$$n = \frac{1}{e_0 |R_H|} = 6,25 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \quad \mu_n = 4 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \gamma |R_H|.$$

12.7. a) Podle předpokladu

$$R = \frac{p \mu_p^2 - n \mu_n^2}{e_0 (n \mu_n + p \mu_p)^2} = 0. \quad \text{Je tedy } p \mu_p^2 = n \mu_n^2 \text{ čili}$$

$$p = n \frac{\mu_n^2}{\mu_p^2}.$$

Pak

$$\frac{j_d}{j} = \frac{p \mu_p}{n \mu_n + p \mu_p} = \frac{\mu_n^2}{\mu_n \mu_p + \mu_n^2} = \frac{\mu_n}{\mu_n + \mu_p} = 0,692$$

b) Platí  $p = \frac{\mu_n^2}{\mu_p^2} n$ ,  $np = n_i^2$ ,

$$n = \frac{\mu_p}{\mu_n} n_i = \frac{\mu_p}{\mu_n} 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right) = 2,57 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$p = \frac{\mu_n^2}{\mu_p^2} n = 1,30 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

12.8. a) K tomu, aby se vytvořil pár elektron - díra je potřeba energie

$$E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Vzhledem k tomu, že kvantový výtěžek je jedna, platí pro počet párů  $n$  vztah

$$n = \frac{E}{E_1} = \frac{E\lambda}{hc}, \text{ kde } E \text{ je pohlcená světelná energie.}$$

Číselně  $n = \frac{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{-8}} = 1 \cdot 10^{14}$

b) Pro celkový náboj, který se vytvoří světlem, platí  $Q = ne_0$ .

Číselně  $Q = 16 \mu\text{C}$ .

12.9. Pro difuzní délku  $\mathcal{L}_n$  platí (viz (12.90) a (12.68))

$$\mathcal{L}_n = \sqrt{D_n \tau_n} = \sqrt{\frac{\mu_n k_B T}{e_0} \tau_n}$$

Číselně pro případ neleptaného povrchu  $\tau_n = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$   
a pro případ leptaného povrchu  $\tau_n = 1,78 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

12.10. a) Ze vztahu (12.62) je vidět, že  $\alpha_n$  není konstantní, ale je závislé na teplotě. Proto je potřeba pro větší teplotní rozdíly upravit vztah (12.53) na tvar

$$U_{12} = \int_{T_2}^{T_1} \alpha_n dT$$

Pro rozptyl na kmitech mřížky platí  $s = 1/2$ , a tedy

$$U_{12} = -\frac{k_B}{e_0} \int_{T_2}^{T_1} \left[ 2 + \ln \left\{ 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{N_d} \right\} \right] dT =$$

$$= -\frac{k_B}{e_0} (T_1 - T_2) \left[ 2 + \ln \left\{ 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{N_d} \right\} \right] - \frac{3}{2} \frac{k_B}{e_0} \int_{T_2}^{T_1} \ln T dT =$$

$$= \frac{k_B}{e_0} (T_1 - T_2) \left[ 2 + \ln \left\{ 2 \left( \frac{2\pi m_n^* k_B}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{N_d} \right\} \right] - \frac{3}{2} \frac{k_B}{e_0} (T_1 \ln T_1 - T_2 \ln T_2)$$

Číselně:  $U_{12} = -0,442 \text{ V}$ .

b) Levá část tyče má vyšší potenciál než pravá.

13.1. Ze vztahu (13.6a) platí

$$U_D = k_B T / e_0 \cdot \ln p_p / p_n$$

Protože je  $p_p = N_a$  a také  $n_d = N_a$  (symetrický přechod), pak

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{4(2\pi m_n^* k_B T)^3}{h^3 N_a} \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right)$$

Číselně:  $p_n = 2,2 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}$ ,  $U_D = 0,8 \text{ V}$ .

13.2. a) Podle zadání platí pro  $U_{\min}$

$$\frac{j_0 \exp\left(\frac{e_0 U_{\min}}{k_B T}\right) - j_0 (\exp\left(\frac{e_0 U_{\min}}{k_B T}\right) - 1)}{j_0 \exp\left(\frac{e_0 U_{\min}}{k_B T}\right)} = 0,05$$

Po úpravě vychází  $U_{\min} = 0,08 \text{ V}$

b) Platí  $U_{\min} = 0,12 \text{ V}$ .

13.3. a) Platí (vztah (13.24))

$$j_0 = \frac{e_0 D_n n_p}{\mathcal{L}_n} + \frac{e_0 D_p p_n}{\mathcal{L}_p}$$

Dosazením ze vztahů (12.90) a (12.68) vychází po úpravě

$$j_0 = \sqrt{\frac{e_0 \mu_n k_B T}{\tau_n}} n_p + \sqrt{\frac{e_0 \mu_p k_B T}{\tau_p}} p_n$$

Protože

$$n_p = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{n_i^2}{N_d} = p_n, \text{ je po úpravě}$$

$$j_0 = \sqrt{e_0 k_B T} \frac{4(2\pi m_n^* k_B T)^3}{h^6 N_d} \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right) \left[ \sqrt{\frac{\mu_n}{\tau_n}} + \sqrt{\frac{\mu_p}{\tau_p}} \right]$$

Číselně:  $j_0 = 2,94 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$

b) V propustném směru platí

$$j = j_0 (\exp\left(\frac{e_0 U}{k_B T}\right) - 1)$$

a vzhledem k výsledkům příkladu 13.2 je

$$j \approx j_0 \exp\left(\frac{e_0 U}{k_B T}\right)$$

Číselně:  $j = 7863,7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Pro  $U = 0,9 \text{ V}$  je  $j = 3,75 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

e)  $I = jS = 78 \text{ mA}$  ... pro  $U = 0,8 \text{ V}$

$I = 3,75 \text{ A}$  .... pro  $U = 0,9 \text{ V}$

13.4. a) Předpokládejme změnu hustoty příměsí jen ve směru osy  $x$ . Protože difuzní pole je pouze v oblasti prostorového náboje (tj. v přechodu PN), bude celkový záporný náboj ionizovaných akceptorů stejně velký jako celkový kladný náboj ionizovaných donorů. Platí tedy (viz obr. 13.1)

$$N_d x_n \mathcal{V} = N_a x_p \mathcal{V} \quad (A)$$

kde  $\mathcal{V}$  je plošný obsah přechodu (rovina řezu kolmá na osu  $x$ ).

Souvislost mezi potenciálem a hustotou prostorového náboje udává Poissonova rovnice. Má tvar

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} [p(x) + N_d^+(x) - n(x) - N_a^-(x)] \quad (B)$$

V oblasti přechodu je hustota volných částic s nábojem zanedbatelná a všechny příměsi jsou ionizovány. Pak pro hustotu prostorového náboje v polovodiči typu N platí ( $0 < x \leq x_n$ )

$$\rho_N = e_0 N_d$$

a v oblasti typu P ( $-x_p \leq x < 0$ )

$$\rho_P = -e_0 N_a$$

Integrací rovnice (B) pro konkrétní případ a s přihlédnutím k okrajovým podmínkám  $\mathcal{E}(x_p) = \mathcal{E}(x_n) = 0$  v  $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$  dostáváme

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x + x_p) N_a \quad (-x_p \leq x < 0) \quad (C)$$

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d (x - x_n) \quad (0 < x \leq x_n) \quad (D)$$

Jak je z těchto vztahů zřejmé, je intenzita elektrického pole maximální pro  $x = 0$ . Pro její velikost platí

$$\mathcal{E}_{\max} = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_a x_p = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d x_n$$

Rozložení potenciálu podél přechodu se vypočítá druhou integrací rovnice (B). Vychází (po dosazení okrajových podmínek  $\varphi(0) = 0$ )

$$\varphi(x) = \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_a \left( \frac{x^2}{2} + x_p x \right) \quad (-x_p \leq x < 0)$$

$$\varphi(x) = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d \left( \frac{x^2}{2} - x_n x \right) \quad (0 < x \leq x_n)$$

Dále

$$\varphi(x_n) = -\frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d \left( -\frac{x_n^2}{2} \right)$$

$$\varphi(-x_p) = \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_a \left( -\frac{x_p^2}{2} \right)$$

a proto (s přihlédnutím k (A))

$$U_D = \varphi(x_n) - \varphi(-x_p) = \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d x_n \frac{x_n}{2} + \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_a x_p \frac{x_p}{2} = \frac{e_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} N_d x_n \frac{x_n}{2} \quad (E)$$

Po úpravách

$$U_D = \frac{e_0}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{N_d x_n}{x_n + x_p} x_b^2 = \frac{e_0}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{N_d \frac{x_n}{x_p} N_d}{N_d \left( \frac{x_n}{x_p} + 1 \right)} x_b^2 = \frac{e_0}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{N_a N_d}{N_a + N_d} x_b^2$$

Proto

$$x_b = \left[ \frac{2 \epsilon_0 \epsilon_r}{e_0} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} U_D \right]^{1/2} \quad (E)$$

Je-li na přechodu připojeno vnější napětí  $U$  v propustném směru, sníží se difuzní napětí o  $U$  a pak platí

$$x_b = \left[ \frac{2 \epsilon_0 \epsilon_r}{e_0} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} (U_D - U) \right]^{1/2} \quad (F)$$

a pro směr závěrný ( $U_D$  se zvýší o  $U$ )

$$x_b = \left[ \frac{2 \epsilon_0 \epsilon_r}{e_0} \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} (U_D + U) \right]^{1/2} \quad (G)$$

Vztah (G) je totožný ze vztahem (13.28).

b) Pro kapacitu přechodu platí vztah (viz str. 295)

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{V} / x_b$$

Po dosazení ze vztahu (G) dostáváme vztah pro kapacitu přechodu v závěrném směru. Je

$$C = \mathcal{V} \left[ \frac{\epsilon_0 \epsilon_r e_0 N_a N_d}{2(N_a + N_d)} \right]^{1/2} (U_D + U)^{-1/2}$$

13.5. a) Změnu hustoty příměsí se souřadnicí  $x$  ( $(N_d - N_a) = f(x)$ ) lze aproximovat přímkou, tj. uvažovat  $(N_d - N_a) = ax$ , kde  $a$  je gradient hustoty příměsí.

Úvahami podobnými jako v příkladu 13.4 se dojde ke vztahu pro  $x_b$ . Platí

$$x_b = \left[ \frac{12 \epsilon_0 \epsilon_r (U_D + U)}{e_0 a} \right]^{1/3}$$

b) Po dosazení do vztahu pro kapacitu ze str. 295 vychází

$$C = \mathcal{V} \left[ \frac{e_0 a \epsilon_0^2 \epsilon_r^2}{12(U_D + U)} \right]^{1/3}$$

což je v souladu s tvrzením na str. 296.

14.1. Podle zadání je

$$\frac{I_0}{2} = \frac{I_0}{(1 + n_0 \beta t_{1/2})^2}$$

Po úpravě je

$$t_{1/2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{n_0 \beta}$$

Protože  $I_0 = \beta n_0^2$  dostáváme

$$t_{1/2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{I_0^{1/2}} (\beta)^{1/2}$$

14.2. Vyjdeme z případu, kdy je atom excitován. Elektron z excitované hladiny se může zachytit na metastabilní hladině. Může dojít k vyzáření světelného kvanta tepelným vybuzením elektronu z hladiny M do excitovaného stavu E a je-

ho návratu na hladinu Z.

Intenzita luminescence je úměrná časové změně hustoty elektronů na základní hladině, tj. změně hustoty elektronů na metastabilní hladině. Tato změna hustoty na metastabilní hladině. Tato změna hustoty na metastabilní hladině je vyvolána tepelnou excitací elektronů na hladině E. Použitím vztahu (14.1) vychází

$$I = -\frac{dN}{dt} = Np = Ns \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (A)$$

Integrací této rovnice vychází

$$\ln N = \left[ s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right] t + C$$

Užitím okrajových podmínek  $I = I_0$  pro  $t = 0$  s a  $N = N_0$  pro  $t = 0$  s dostaneme po úpravě

$$N = N_0 \exp \left[ s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right] t$$

Pro I tedy platí

$$I = -\frac{dN}{dt} = N_0 s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \exp \left[ s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right] t = I_0 s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (B)$$

Rovnice (B) má podobný tvar jako rovnice (14.3). Ve vztahu (B) je vyjádřena teplotní závislost  $\alpha = 1/T$ .

Pro dostatečně hluboké záchytné hladiny nebo nízké teploty může být  $\tau$  libovolně velké a doznívání se značně prodlouží (nebo se může prakticky zastavit).

14.3. V ustáleném stavu je pravděpodobnost zachycení elektronů na záchytném centru stejně velká jako pravděpodobnost zachycení a rekombinace na aktivátoru. Pro pravděpodobnost zachycení elektronu na aktivátoru platí vztah

$$P = \frac{N}{N + (M - N)} = \frac{N}{M} \quad (A)$$

Hustota elektronů uvolněných tepelnou excitací ze záchytného centra je  $Np$ , kde  $p$  je dáno vztahem (14.1), a hustota elektronů uvolněných ze záchytného centra a jeho zachycení na aktivátoru je  $PNp$ . Platí tedy

$$I = -\frac{dN}{dt} = PNp = \frac{N}{M} Ns \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (B)$$

Integrací této rovnice vychází (užitím okrajových podmínek  $I = I_0$ ,  $N = N_0$  pro  $t = 0$  s) po úpravě

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_0} + \frac{s}{M} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) t, \quad N = \frac{N_0}{1 + N_0 \frac{st}{M} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)} \quad (C)$$

Dosazením (C) do (B) vychází

$$I = \frac{N_0^2 s \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)}{M \left[ 1 + N_0 \frac{st}{M} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right]^2} = \frac{I_0}{\left[ 1 + N_0 \frac{st}{M} \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \right]^2} \quad (D)$$

Rovnice (D) je analogická vztahu (14.8), je v ní vyjádřena i teplotní závislost  $\beta$ .

Předmluva .....	3
Význam symbolů univerzálních (společných) pro celé skriptum .....	5
1. Struktura pevných látek .....	6
1.1 Definice fází, pevná fáze .....	6
1.1.1 Krystalické a amorfní látky .....	6
1.2 Krystalické pevné látky .....	8
1.2.1 Prostorová krystalová mřížka .....	9
1.2.1.a Translační symetrie .....	9
1.2.1.b Jednoduché a složené krystalové mřížky .....	10
1.2.1.c Bravaisovy mřížky .....	11
1.2.1.d Příklady konkrétních krystalových struktur .....	14
- Kubická prostorově centrovaná mřížka .....	14
- Kubická plošně centrovaná mřížka .....	14
- Struktura typu diamantu .....	15
- Struktury s nejtěsnějším uspořádáním .....	16
1.2.2 Označení rovin, směrů a uzlů v krystalech .....	17
1.3 Meziatomové síly. Klasifikace pevných látek z hlediska vazeb ...	19
1.3.1 Odpudivé síly .....	20
1.3.2 Van der Waalovy síly .....	20
1.3.3 Iontová vazba .....	23
1.3.4 Kovalentní vazba .....	25
1.3.5 Kovová vazba .....	28
1.3.6 Vodíková vazba .....	29
1.3.7 Porevnání různých typů vazeb .....	31
1.4 Anizotropie fyzikálních vlastností pevných látek .....	32
1.5 Výroba monokrystalů pevných látek .....	34
1.5.1 Pěstování monokrystalů z roztoku .....	34
1.5.2 Krystalizace z taveniny .....	35
1.5.3 Růst krystalů v pevné fázi .....	38
1.5.4 Růst z plynné fáze .....	38
1.5.5 Epitaxe .....	38
Literatura .....	39
Význam použitých symbolů .....	40
2. Experimentální metody určování krystalových struktur .....	41
2.1 Reciproká mřížka .....	41
2.2 Braggova podmínka difrakce rentgenového záření na krystalu .....	44
2.3 Laueova podmínka difrakce rentgenového záření na krystalu .....	45
2.4 Experimentální metody rentgenové strukturní analýzy .....	47
2.4.1 Ewaldova konstrukce .....	47
2.4.2 Laueova metoda .....	48
2.4.3 Metoda otáčivého krystalu .....	49
2.4.4 Metoda Debyeova-Scherrerova .....	49
2.5 Elektrenová mikroskopie a difrakce .....	51
2.6 Neutronová difrakce .....	53
Literatura .....	55
Význam použitých symbolů .....	55

3. Měrná tepelná kapacita pevných látek a kmity mřížky .....	56
3.1 Úvodní poznámky .....	56
3.2 Klasická teorie .....	56
3.3 Einsteinova teorie .....	58
3.4 Debyeova teorie .....	60
3.5 Šíření kmitů v krystalové mřížce .....	65
3.5.1 Řetězec složený z atomů jedné hmotnosti .....	66
3.5.2 Řetězec složený z atomů s dvěma různými hmotnostmi .....	68
Literatura .....	71
Význam použitých symbolů .....	71
4. Poruchy krystalové mřížky .....	72
4.1 Bodové poruchy krystalové mřížky .....	72
4.1.1 Vakance .....	72
4.1.2 Atomy příměsí v substitučních a intersticiálních polohách ....	73
4.1.3 Migrace bodových poruch .....	73
4.1.4 Rovnovážná hustota bodových poruch .....	75
4.1.5 Bodové poruchy v iontových krystalech .....	78
4.1.6 Experimentální metody určení hustoty vakancí .....	79
4.2 Čarové poruchy krystalové mřížky .....	79
4.2.1 Teoretické a reálné kritické skluzové napětí .....	80
4.2.2 Hranová a šroubová dislokace .....	82
4.2.3 Pohyb dislokací .....	85
4.2.4 Protínání dislokací .....	87
4.2.5 Síly působící na dislokaci .....	88
4.2.6 Energie dislokace .....	89
4.2.7 Tah v dislokační čáře .....	91
4.2.8 Zdroje dislokací .....	91
4.2.9 Experimentální metody pozorování dislokací .....	93
4.3 Dvojměrné (plošné) poruchy .....	95
4.3.1 Vrstevné chyby .....	95
4.3.2 Hranice zrn a subzrn .....	97
Literatura .....	100
Význam použitých symbolů .....	100
5. Mechanické vlastnosti pevných látek .....	101
5.1 Pružná deformace pevných látek .....	102
5.1.1 Tenzor deformace .....	102
5.1.2 Tenzor napětí .....	104
5.1.3 Hookův zákon .....	106
5.1.4 Metody měření elastických konstant .....	107
5.2 Plastická deformace pevných látek .....	107
5.2.1 Plastická deformace monokrystalů .....	108
- Deformační zpevnění .....	109
- Zpevnění legováním .....	111
5.2.2 Plastická deformace polykrystalů .....	114
5.2.3 Metody měření plastických deformací pevných látek .....	115
- Tahové zkoušky při konstantní rychlosti stroje .....	115
- Relaxace napětí .....	115

- Tahové zkoušky při konstantním zatížení .....	115
- Tvrdost pevných látek .....	116
5.3 Současné metody zlepšování mechanických vlastností pevných látek .....	117
5.3.1 Deformace za studena .....	118
5.3.2 Zpevnění stárnutím .....	118
5.4 Perspektivy zlepšování a využití mechanických vlastností pevných látek .....	119
5.4.1 Složené materiály (kompozity) .....	119
5.4.2 Superplastické materiály.....	119
5.4.3 Tvarová paměť kovových slitin .....	120
5.4.4 Kovová skla .....	121
5.4.5 Materiály budoucnosti .....	122
Literatura .....	122
Význam použitých symbolů .....	123
6. Vlastnosti kovů a teorie volných elektronů .....	124
6.1 Elektron v potenciálové jámě .....	124
6.1.1 Jednozměrný případ .....	124
6.1.3 Trejrozměrný případ .....	126
6.2 Fermiova-Diracova statistika. Aplikace na elektronovou měrnou tepelnou kapacitu .....	127
6.3 Termoemise elektronů z kovu .....	129
6.4 Studená (tunelevá) emise a fotoemise .....	132
6.5 Kontaktní potenciál. Termodynamický význam Fermiovy energie ..	134
Literatura .....	136
Význam použitých symbolů .....	136
7. Pásová teorie pevných látek .....	137
7.1 Vznik energetických pásm v pevných látkách .....	137
7.2 Blocheva věta. Kvazihybnost elektronu .....	139
7.3 Model Kronigův-Penneyův .....	142
7.4 Způsoby zobrazení energetických pásm. Dvojměrný a trejrozměrný případ .....	146
7.5 Štěpení energetických hladin atomu. Rozlišení kov- izolant- polovodič .....	150
7.6 Efektivní hmotnost elektronu. Pojem díry v téměř zaplněném pásmu .....	156
Literatura .....	159
Význam použitých symbolů .....	159
8. Vodivost kovů .....	161
8.1 Elementární odvození Ohmova zákona .....	161
8.2 Boltzmannova transportní rovnice .....	162
8.3 Sommerfeldova teorie elektrické vodivosti .....	165
8.4 Výklad relaxační doby podle srážkového mechanismu. Střední velná dráha elektronu .....	168
8.5 Výklad elektrického odporu kovů podle rozptylových mechanismů	169
8.5.1 Výklad zbytkového odporu .....	170

8.5.2	Výklad intrinzičního odporu .....	171
8.6	Tepelná vodivost kovů .....	172
8.7	Supravodivost. Josephsonovy jevy .....	174
	Literatura .....	180
	Význam použitých symbolů .....	180
9.	Magnetické vlastnosti pevných látek .....	182
9.1	Magnetické veličiny a jednotky .....	182
9.2	Elementární rozdělení a vlastnosti magnetik .....	183
9.2.1	Diamagnetika .....	183
9.2.2	Paramagnetika .....	183
9.2.3	Feromagnetika .....	183
9.3	Langevinův výklad paramagnetizmu .....	185
9.4	Paramagnetismus volných elektronů v kovech .....	189
9.5	Weissův výklad feromagnetizmu .....	190
9.6	Obecnější magnetická uspořádání .....	192
9.7	Atomový původ magnetizmu .....	195
9.8	Doménová struktura a magnetizační procesy .....	198
	Literatura .....	201
	Význam použitých symbolů .....	201
10.	Optické vlastnosti pevných látek .....	203
10.1	Interakce světla a prostředí .....	203
10.2	Elektromagnetická vlna ve vodivém prostředí .....	205
10.3	Základní myšlenky Lorentzova-Drudeova modelu .....	208
10.3.1	Případ dielektrika (izolantu) .....	208
10.3.2	Případ kovu (vodiče) .....	211
10.4	Upřesnění Lorentzova-Drudeova modelu. Výsledky kvantověmechanického řešení .....	212
10.4.1	Případ více absorpčních frekvencí .....	212
10.4.2	Započtení interakce s okolními atomy .....	213
10.4.3	Započtení tlumících jevů .....	214
10.4.4	Nástin kvantověmechanického řešení .....	215
10.5	Mezipásové přechody v polovodičích .....	217
10.6	Magnetooptické jevy .....	220
10.6.1	Faradayův jev .....	220
10.6.2	Přehled jiných magnetooptických jevů .....	223
	- Jevo Cottonův-Moutonův neboli Voigtův .....	223
	- Faradayův jev v látkách se spontánním magnetickým uspořádáním .....	223
	- Kerrův magnetooptický jev .....	223
	Literatura .....	224
	Význam použitých symbolů .....	224
11.	Rozdělení volných částic s nábojem v polovodičích a izolantech .....	226
11.1	Úvodní poznámky .....	226
11.2	Valenční polovodiče .....	227
11.3	Vliv poruch na elektrické vlastnosti polovodičů .....	229
11.4	Fermiova-Diracova statistika - aplikace na volné elektrony a díry .....	235

11.5	Jednoduchý model izolantu .....	239
11.6	Vlastní polovodiče .....	240
11.7	Příměsové polovodiče .....	245
11.7.1	Plná ionizace příměsí - donorové příměsí .....	245
11.7.2	Plná ionizace příměsí - akceptorové příměsí .....	247
11.7.3	Plná ionizace příměsí - donorové a akceptorové příměsí ....	247
11.7.4	Neúplná ionizace příměsí .....	249
11.7.5	Neúplná ionizace - nekompensovaný polovodič .....	251
11.7.6	Neúplná ionizace - kompenzovaný polovodič .....	252
	- Slabě kompenzovaný polovodič .....	253
	- Silně kompenzovaný polovodič .....	254
	Literatura .....	254
	Význam použitých symbolů .....	254
12.	Transportní jevy v polovodičích .....	256
12.1	Vedení proudu v polovodičích .....	256
12.2	Rozdíl mezi kovem a polovodičem .....	259
12.3	Hallův jev .....	260
12.3.1	Hallův jev - slabá magnetická pole .....	260
12.3.2	Hallův jev - silná magnetická pole .....	263
12.4	Rozptylové mechanismy .....	264
12.5	Magnetořizistance .....	266
12.6	Termoelektrické jevy .....	267
12.6.1	Seebeckův jev .....	267
12.6.2	Peltierův jev .....	270
12.7	Difúze elektrenů a děr .....	271
12.7.1	Nehomogenní polovodiče .....	271
12.7.2	Einsteinův vztah .....	272
12.7.3	Nerovnovážné stavy a návrat k termodynamické rovnováze ....	273
12.7.4	Rovnice kontinuity .....	275
12.7.5	Difúzní délka minoritních částic s nábojem .....	276
12.8	Fotovodivost .....	277
12.8.1	Vlastní fotovodivost .....	277
12.8.2	Příměsová fotovodivost .....	279
12.8.3	Vliv příměsí na fotoelektrickou vodivost .....	280
12.9	Některé metody určování charakteristických parametrů polovodičů .....	281
12.9.1	Pásová struktura .....	281
12.9.2	Určování $E_g$ .....	281
12.9.3	Určování pohyblivosti .....	282
12.9.4	Určování hustoty částic s nábojem .....	284
12.9.5	Určování $E_D$ , $E_A$ .....	284
	Literatura .....	284
	Význam použitých symbolů .....	285
13.	Polovodičové prvky .....	287
13.1	Přechody .....	287
13.1.1	Přechod PN .....	287
	- Průraz přechodu .....	296

- Tepelný průraz .....	296
- Zenerův průraz .....	296
- Nárazová ionizace .....	297
13.1.2 Kontakt kov - polovodič .....	297
13.1.3 Přechody P <sup>+</sup> P, N <sup>+</sup> N .....	299
13.1.4 Heterogenní přechody .....	300
13.2 Vliv elektrického pole na rozložení volných částic s nábojem v polovodičích .....	302
13.3 Polovodičové prvky bez přechodu PN .....	305
13.3.1 Termistor .....	305
13.3.2 Hallovy součástky .....	307
13.3.3 Varistory .....	307
13.3.4 Tenzoelektrické prvky .....	308
13.3.5 Fotorezistory .....	308
13.4 Součástky s jedním přechodem PN .....	310
13.4.1 Polovodičové diody .....	311
- Hrotové diody .....	311
- Výkonové usměrňovací diody .....	311
13.4.2 Stabilizační diody .....	312
13.4.3 Tunelové a inverzní diody .....	313
13.4.4 Varikapy a varaktory .....	315
13.4.5 Fotodiody .....	316
13.4.6 Luminiscenční diody .....	317
13.4.7 Laserové diody .....	319
13.5 Prvky s dvěma přechody PN .....	320
13.5.1 Bipolární tranzistor .....	321
13.5.2 Technologie výroby tranzistorů .....	325
- Difundované tranzistory .....	326
- Difúzně slitinové tranzistory .....	326
- Epitaxní a planární tranzistory .....	326
- Označování tranzistorů .....	328
13.5.3 Speciální druhy tranzistorů .....	329
13.5.4 Diak .....	330
13.5.5 Unipolární tranzistory .....	330
- Tranzistory s hradlem odděleným přechodem PN .....	331
- Tranzistory s hradlem odděleným dielektrikem .....	333
13.6 Součástky s více než dvěma přechody PN .....	335
13.7 Integrované obvody .....	340
Literatura .....	341
Význam použitých symbolů .....	341
14. Luminiscence .....	344
14.1 Obecné poznatky .....	344
14.2 Obecné mechanismy luminiscence .....	346
14.3 Doznívání luminiscence .....	351
14.3.1 Nerekombinační luminiscence .....	351
14.3.2 Rekombinační luminiscence .....	351
14.4 Absorpční a emisní spektra luminoforů .....	352

14.5 Užití luminiscence .....	353
14.5.1 Luminofory v osvětlovací technice .....	353
14.5.2 Obrazovky .....	353
14.5.3 Detekce neviditelného záření .....	354
14.5.4 Obrazové měniče .....	355
- Vakuový měnič infračerveného záření .....	355
- Elektroluminiscenční měnič .....	355
Literatura .....	356
Význam použitých symbolů .....	356

Dodatky:

A. Neuspořádané pevné látky .....	357
A.1 Příměsi v krystalu .....	357
A.2 Slitiny .....	357
A.3 Náhodné vrstvení .....	358
A.4 Dislokace .....	359
A.5 Hranice zrn .....	359
A.6 Amorfni kovy (kovová skla) .....	359
A.7 Amorfni (sklovité) polovodiče .....	359
A.8 Makromolekulární látky .....	361
B. Struktura a vlastnosti kapalných krystalů .....	363
B.1 Mezofáze smektická .....	364
B.2 Mezofáze nematická .....	365
C. O významu fyziky pevných látek .....	367
C.1 Význam fyziky pevných látek v technických a jiných aplikacích .....	367
C.2 Význam fyziky pevných látek pro poznání zákonů přírody ...	369
C.3 Zvláštní přínosy fyziky pevných látek všeobecnému vzdělání a formování osobnosti žáků .....	370
Výslovnost jmen některých fyziků .....	372
Cvičení z fyziky pevných látek	
Zadání příkladů .....	373
Řešení a návody k řešení příkladů .....	382
Obsah .....	417



**FYZIKA PEVNÝCH LÁTEK II.**  
(pro učitelské studium)

Doc. RNDr. Miroslav Svoboda, CSc.,  
RNDr. Vladislav Navrátil, CSc.,  
Doc. RNDr. Jiří Šernberk, CSc.

Lektoroval: RNDr. Lubomír Dvořák, CSc.

Vydala Univerzita Karlova, Praha 1986  
jako skriptu pro posluchače matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy

Dáno do tisku: květen 1986

Vytiskly Tiskařské závody, n. p., Praha 1, provoz 53

AA 24,70 - VA 25,63 - 1. vydání - Náklad 300 výtisků

MŠ - MK 21 514/79

60 - 93 - 86 17/32

Brož. Kčs 20,-