Kapitola 1

Posloupnosti

S pojmem posloupnosti jsme se již setkali na střední škole, zejména jsme procvičovali posloupnost aritmetickou a geometrickou. V této kapitole si dané poznatky zopakujeme a rozšíříme o další pojmy.

1.1 Definice a vlastnosti

Def. 1.1 *Posloupnost je zobrazení z množiny* $\mathbb{N}$ *do množiny* $\mathbb{R}$.

Tuto definici můžeme přepsat do tvaru *Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.*

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[n; f(n)]$. Místo $f(n)$ bývá zvykem psát a_n a mluvíme o n-tém členu posloupnosti. Posloupnost můžeme zadat výčtem členů, obecným vzorcem či rekurentním vzorcem. Tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

Příklad 1.1 $\{a_n\} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$. Zde je zřejmé, že členy posloupnosti jsou prvočísla seřazená podle velikosti. Vyjádření zbývajícími dvěma způsoby je prakticky nemožné. Pokud bychom chtěli být pedanti, měli bychom psát $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, tak se indexy vynechávají.

Příklad 1.2 Nám již známa aritmetická posloupnost je definována obecným vzorcem $a_n = a_1 + (n-1)d$, kde d je diference. Posloupnost geometrická je pak dána vzorcem $a_n = a_1 q^{n-1}$, kde q je kvocient.

Příklad 1.3 Nám již známá aritmetická posloupnost je definována rekurentním vzorcem $a_n = a_{n-1} + d, \quad a_1 = c$, kde d je diference. Posloupnost geometrická je pak dána vzorcem $a_n = a_{n-1} q, \quad a_1 = c$, kde q je kvocient.

Def. 1.2 *Posloupnost* $\{a_n\}$ *se nazývá*
rostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} > a_n$,
klesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} < a_n$,
nerostoucí, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} \leq a_n$,
neklesající, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} \geq a_n$,
ohraničená (omezená) shora, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$

platí $a_n \leq K$,
ohraničená (omezená) zdola, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq k$.
Posloupnost, která je ohranočená shora i zdola se nazývá ohraničená.

Příklad 1.4 Zjistěte, zda posloupnost $\{\frac{n+1}{n}\}$ má některou z uvedených vlastností.

Zkusíme si vypsat několik prvních členů posloupnosti: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$ $a_4 = \frac{5}{4}$. Vypadá to, že posloupnost bude klesající, přijměme tedy tuto hypotézu. Jelikož $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ a $a_n = \frac{n+1}{n}$, musí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platit $\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$. Snadnou úpravou dojdeme k nerovnosti $0 < 1$, která je pravdivá a nezávislá na n, naše hypotéza se tedy potvrdila.

Jelikož je posloupnost klesající, je první člen největší, tedy platí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq 2$ a posloupnost je omezená shora. Posloupnost obsahuje pouze kladná čísla, je tedy každý člen větší než nula a posloupnost je ohraničená i zdola. Abychom získali co nejlepší informace u posloupnosti, bývá zvykem jeti pikem, pardon, to patří do kartografie. Bývá zvykem uvádět hranice nejmenší či největší. Uvědomíme-li si, že čitatel zlomku je vždy o jedničku větší než jmenovate, je jasné, že všechny členy posloupnosti budou větší než jedna.

Z uvedeného postupu je také zřejmé, že ani špatný odhad hypotézy nás nemůže vykolejit. Pokud bychom předpokládali, že tato posloupnost je rostoucí, došli bychom k nepravdivé nerovnosti, musí tedy platit hypotéza opačná.

Navíc to, že si vypíšeme několik prvních členů posloupnosti, by nás nemělo vést k ukvapeným závěrům. Budeme-li vyšetřovat posloupnost $\{\frac{2214442^n}{n!}\}$ a napíšeme-li si několik prvních členů posloupnosti, můžeme přijít k ukvapenému závěru, že se jedná o posloupnost rostoucí, a to i v případě, že budeme mít dost trpělivosti a psací látky a vypíšeme-li třebas prvních padesát tisíc členů. Uvědomme si ale, že každý další člen posloupnosti získáme tak, že předchozí vynásobíme jistým zlomkem, jehož čitatel budou vždy stejný a jmenovatel se bude zvětšovat. Po určitém počtu kroků tedy dospějeme do stavu, že člen předchozí budeme násobit číslem menším než jedna a členy se budou zmenšovat.

Vraťme se však k posloupnosti $\{\frac{n+1}{n}\}$. Všechny členy posloupnosti budou čísla větší než jedna, pro velké hodnoty n se však čitatel a jmenovatel nebudou příliš lišit, zlomek tedy bude skoro roven jedné. Dejme tomu, že nám bude stačit počítat s přesností na dvě desetinná místa. Vyjádřeno matematicky musí platit $\frac{n+1}{n} - 1 < 0,01$. Snadnou úpravou zjistíme, tento požadavek je splněn pro všechny členy stoprvním počínaje. Řečeno mluvou inženýra stým prvním členem počínaje budou všechny v toleranci 0, 01 od středu reprezentovaném jedničkou. Sestrojíme graf posloupnosti a a sestrojme přímky $y = 1,01$ a $y = 0,99$. Tyto dvě přímky vytvoří pás o šířce 0,02 a stým prvním členem počínaje budou všechny v tomto tolerančním pásu. Samozřejmě se tolerance 0,01 může někomu zdát příliš hrubá. Zvolí-li si někdo toleranci jemnější, pak stejnou úvahou dojde k podobnému závěru, že od jistého členu všechny členy padnou do tolerančního pásu. tyto úvahy nás vedou k zavedení důležitého pojmu **limita posloupnosti**.

Def. 1.3 *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}$ *a číslo* $L \in \mathbb{R}$. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* L, *jestliže ke každému* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové,* *že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$. Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že konverguje (k číslu L).*

Pokud jsme pojem vlastní limity správně pochopili, je nám jasné, že pro všechna $n > n_0$ se členy posloupnosti nemohou příliš lišit od jistého reálného čísla L (vlastní limity) a že tedy nemohou neomezeně růst či klesat, jinými slovy taková posloupnost musí být ohraničená. Máme tedy dobrý důvod vyslovit následující tvrzení, jehož důkaz lze najít v uvedené literatuře.

Věta 1.1 *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Musíme podotknout, že nepatří k právům posloupnosti mít vlastní limitu. Uvažujme posloupnost $\{n^2\}$. Snadno se přesvědčíme, že se jedná a posloupnost rostoucí a jelikož členy jsou pouze kladná čísla, tak je i zdola ohraničená. S ohraničeností shora je to již horší. Zvolíme-li si libovolné reálné číslo K, byť sebevíc velké, vždy dojdeme k nezvratnému závěru, že všechny členy, jejichž index je větší než $\sqrt{K}$ tuto závoru přeskočí. Můžeme tedy definovat nevlastní limitu následujícím způsobem:

Def. 1.4 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $K \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > K$. Podobným způsobem lze definovat nevlastní limitu $-\infty$. Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že diverguje.*

Podívejme se ještě na posloupnost$\{\cos n\pi\}$. Pro lichá n jsou členy posloupnosti rovny -1, pro sudá n zase +1. Tato posloupnost limitu nemá, neboť je zřejmé, že vzdálenost dvou sousedních členů na ose y je vždy dvě. Nepodaří se nám na ose y najít žádný bod takový, že by se nám do libovolného tolerančního pásu podařilo uzavřít všechny členy posloupnosti jistým indexem n_0 počínaje. Jelikož se jedná o ohraničenou posloupnost, nemůže mít ani limitu nevlastní. O takové posloupnosti říkáme, že *osciluje*.

Z posledního příkladu plyne, že posloupnost mít limitu nemusí. Pokud ji má, pak jen jednu, což můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

Věta 1.2 *Každá posloupnost má nejvýš jednu limitu.*

Některé limity můžeme počítat přímo z definice. Vrátíme-li se o pět odstavců výše a zopakujeme-li postup pro posloupnost $\{\frac{n+1}{n}\}$ s tím, že číslo 0,01 nahradíme obecným číslem $\varepsilon > 0$, máme důkaz, že $\lim\{\frac{n+1}{n}\} = 1$. Podobně dokážeme, že $\lim\{\frac{1}{n}\} = 0$, toto necháme čtenáři na samostané cvičení. Jelikož v případě posloupností se vždy jedná o limitu pro $n \to \infty$, bývá zvykem z úsporných důvodů tento symbol vynechávat. Tušíme však, že výpočet limity na základě definice nemusí být vždy tak jednoduchý jako ve výše uvedených případech. Je tedy na místě otázka, zda si můžeme při výpočtu limity počínat i jiným způsobem. Odpověď zní ano, pro výpočet limity máme řadu způsobů, které lze použít. Tak především limita kopíruje aritmetické operace jakož i absolutní hodnotu, platí tedy následující tvrzení.

Věta 1.3 *Nechť platí $\lim\{a_n\} = A$ a $\lim\{b_n\} = B$, přičemž platí $A, B \in \mathbb{R}$. Pak je*
1. $\lim\{|a_n|\} = |A|$,

2. $\lim(\{a_n\} \pm \{b_n\}) = A \pm B$,
3. $\lim(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = A \cdot B$,
4. $\lim \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{A}{B}$, *je-li* $B \neq 0$.

Zkusíme dokázat tvrzení č. 2. Chceme dokázat, že ke každéme $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $|(a_n+b_n)-(A+B)| < \varepsilon$. Existuje pro nějaké $\varepsilon_1 > 0$ n_a tak, že pro všechna $n > n_a$ je $|a_n - A| < \varepsilon_1$ a n_b tak, že pro všechna $n > n_b$ je $|b_n - B| < \varepsilon_1$. Zvolme n_0 větší z obou čísel n_a a n_b a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Pak pro všechna $n > n_0$ je $|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n+B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$. Zbývající tvrzení si zkuste dokázat sami či si jejich důkazy prostudujte v literatuře.

Další užitečnou větu pro výpočet limity uvedeme reálnou situací. Představme si, že tři lidé jdou vedle sebe úzkou chodbou držíce se za ruce. Pokud oba krajníci projdou aniž by se odřeli o stěny, je zřejmé, že ani ona osoba jdoucí uprostřed neutrpí žádnou újmu. Proto můžeme tvrdit, ačkoliv výše uvedené nelze považovat za matematický důkaz, že je správné následující tvrzení.

Věta 1.4 *Nechť jsou dány posloupnosti* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$, *přičemž pro všechna* $n > n_0$ *platí* $a_n \leq b_n \leq c_n$. *Nechť dále* $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = L$, *kde* $L \in \mathbb{R}$. *Pak platí, že* $\lim\{b_n\} = L$.

Použití si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 1.5 Určete $\lim\{\frac{1}{n^3+6}\}$. Zřejmě platí $0 \leq \frac{1}{n^3+6} \leq \frac{1}{n}$. Jelikož limity obou krajních posloupností jsou rovny nule, musí platit $\lim\{\frac{1}{n^3+6}\} = 0$.

A ještě jedna věta, která nám může napomoci k výpočtu limity.

Věta 1.5 *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}$ *je ohraničená. Pak* $\lim a_n \cdot b_n = 0$.

A na demonstraci opět jednoduchý příklad.

Příklad 1.6 Vypočtěte $\lim \frac{\sin n}{n}$. Abychom dodrželi označení předchozí věty, máme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \sin n$. Jelikož je $\lim \frac{1}{n} = 0$ a posloupnost $\{\sin n\}$ je ohraničená čísly -1 a $+1$, je $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

Věta 1.6 *Nechť* $\lim\{a_n\} = \pm\infty$. *Pak* $\lim \frac{1}{\{a_n\}} = 0$. *Nechť dále platí* $\lim\{a_n\} = 0$ *a pro všechna* $n > n_0$ *platí* $a_n > 0$ *(*$a_n < 0$*). Pak* $\lim \frac{1}{\{a_n\}} = +\infty$ *(*$\lim \frac{1}{\{a_n\}} = -\infty$*).*

K této větě si dovolíme malý komentář. Někdy se také nepřesně říká, že $\frac{1}{\infty} = 0$ či $\frac{1}{0} = \pm\infty$. Musíme mít na paměti, že se v každém případě jedná o limitu posloupnosti či funkce, jak uvidíme v následující kapitole. Zatímco první situace je zřejmá, ve druhém případě musíme rozlišit, zda jsou od jisté meze všechny členy kladné (záporné). Například limita posloupnosti $a_n = \frac{1}{(-1)^n \frac{1}{n}}$ neexistuje, posloupnost totiž osciluje. Při výpočtu limity můžeme narazit i na podivné výrazy jako $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ apodobně. V případě těchto **neurčitých výrazů**, jak zní správné označení těchto podivností se již nelze spoléhat na intuici aříci že je to nula či jednička. Tyto limity někdy existují a někdy ne, musíme postupovat případ od případu. V kapitole o aplikacích derivace poznáme poměrně jednoduchý způsob, jak některé z nich vypočítat.

Věta 1.7 *Každá neklesající, shora ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, která je rovna suprému množiny tvořené všemi členy posloupnosti. Každá nerostoucí, zdola ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu,která je rovna infimu množiny tvořené všemi členy posloupnosti.*

Závěrem uvedeme ještě jednu důležitou limitu. Lze dokázat, že $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Příklad 1.7 Vypočtěte $\lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$. Podíváme-li se na daný výraz, zjistíme, že se hodně podobá výše uvedené limitě, problém je však v tom, že exponent neodpovídá jmenovateli zlomku. To snadno napravíme jednoduchým trikem, platí totiž $\lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\frac{3n}{3}} = \sqrt[3]{\lim \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}}$. Zavedeme-li substituci $3n = m$, máme $\lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sqrt[3]{e}$.

Vraťme se k posloupnosti $\{\cos \pi n\}$. Jak již zjistili znalci goniometrických funkcí vidí, že všechny liché členy posloupnosti mají hodnotu -1, kdežto sudé jsou rovny a posloupnost limitu nemá. Pokud bychom škrtli všechny sudé (liché) členy posloupnosti, dostali bychom opět nekonečnou posloupnost, tentokrát ovšem konvergetní s limitou -1 (1). Opticky to vypadá tak, že se členy této posloupnosti hromadí kolem těchto dvou čísel. Škrtání ponechme ministrům financím a definujme nyní pojem vybraná posloupnost.

Def. 1.5 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Nyní uvedeme jednu větu, která navazuje na předchozí úvahy.

Věta 1.8 *Nechť $\{a_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ a nechť platí $\lim \{a_n\} = L$. Pak i $\lim \{a_{n_k}\} = L$.*

Na základě této věty ukážem, že posloupnost $a_n = \cos n\pi$ nemá limitu. Pokud by totiž bylo limitou číslo 1, pak by toto číslo muselo být i limitou vybrané posloupnosti členů s lichými indexy. Tak tomu evidentně není a stejná úvaha platí i pro číslo -1. další čísla ani nepřicházejí v úvahu.

Než přistoupíme k definici hromadného bodu, musíme si uvědomit, že členy posloupnosti se mohou hromadit i nad (pod) určitou hranicí. Připomínáme rozšířenou reálnou osu, kdy k reálným číslům přidáme symboly $\pm\infty$. Rozšířenou reálnou osu obvykle značíme $\mathbb{R}^*$.

Def. 1.6 *Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $H \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod H, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $|a_n - H| < \varepsilon$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $a_n > K$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má hromadný bod $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro nekonečně mnoho $n > n_0$ platí $a_n < K$.*

Uvedeme dvě věty o hromadných bodech.

Věta 1.9 *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Má-li posloupnost více hromadných bodů, lze je seřadit podle velikosti. Máli posloupnost pouze jeden hromadný bod, je tento současně jak nejmenší, tak i největší. Předchozí větu můžeme uvést i ve znění, že každá posloupnost má největší a nejmenší hromadný bod. Definujeme následující pojmy:

Def. 1.7 *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}$. *Největší z hromadných bodů nazveme* limita superior *a značíme* $\limsup a_n$. *Nejmenší z hromadných bodů nazveme* limita inferior *a značíme* $\liminf a_n$.

Platí věta:

Věta 1.10 *Posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu právě tehdy, když platí* $\limsup a_n = \liminf a_n$. *Tato společná hodnota je limitou posloupnosti.*

Věta 1.11 *Číslo* $H \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$ *právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost* $\{a_{n_k}\}$ *taková, že* $\lim \{a_{n_k}\} = H$.

Následující věta je nazývána Bolzanova- Weierstrassova a má velký význam v řadě oblastí matematické analýzy.

Věta 1.12 *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.*

Závěrem uvedeme ještě jeden důležitý pojem, s nímž se můžeme setkat především v teorii.

Def. 1.8 *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *je cauchyovská, jestliže pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$ *platí* $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Závěrem uvedeme ještě jednu větu, která je známa jako Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergence.

Věta 1.13 *Posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.*

Kapitola 2

Limita a spojitost funkce

Úvodem mi dovolte několik slov. V současných učebnicích diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné se začíná výkladem pojmu limita. Moje dlouhodobá zkušenost však ukazuje, že studenti tento pojem nechápou, je jím cizí a jeho výpočet chápou formálně. Je historickou pravdou, že se již dvě století vesele a úspěšně derivovalo, aniž existoval pojem limity. pokusím se vysvětlit, jak je to možné a proč tedy bylo nutno vynalézt limitu.

Vraťme se do 17. století a vyřešme jednen problém, který se týká stanovení vzorce pro okamžitou rychlost, známe-li vztah pro dráhu. Snad to velikán vědy přežije, použiji-li jeho jméno v následujícím výkladu. Newton znal vzorec pro dráhu pohybu rovnoměrně zrychleného, speciálním případem je pak volný pád. Koneckonců není ani problém si tento vzorec experimentálně ověřit ve fyzikálním praktiku. Vyjděme tedy ze znalosti vzorce $s = \frac{1}{2}at^2$ (pro volný pád platí $a = g = 9,81 m.s^{-2}$ a ptejme se, jaká je okamžitá rychlost pohybujícího se těles v čase t_0. Otázku lze formulovat i jinak, například jakou rychlostí dopadneme, spadneme-li z jisté výšky s_0. Na danou otázku nemůžeme odpovědět, neboť patřičný vzorec nemáme k dispozici. Známe však vzorec pro průměrnou rychlost, spočtěme tedy alespoň tuto veličinu.

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t} = \frac{at_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}.$$

Newton a jeho pomocník dlouho vyšetřovali tento pohyb, avšak žádných výsledků se nedobrali. Teprve až pomocník onemocněl a poslal za sebe svoji sličnou choť došlo k pokroku. Je lidské, že Newton postavil svoji pomocnici do své blízkosti, čímž se časový interval Δt velice zmenšil. V té chvíli si vědec uvědomil, že pokud bude tento časový úsek skoro roven nule, bude průměrná rychlost takřka rovna rychlosti okamžité, neboť pohybující se těleso nebude mít možnost rychlost téměř změnit.

Pomocí kalkulačky lze demonstrovat, že pro dostatečně malé Δt můžeme její druhou mocninu vypustit, aniž by to změnilo výsledek. Pokud druhou mocninu zanedbáme, dostaneme po zkrácení Δt vzorec $v = at$, což je správný vzorec.

Zkusme se abstrouhat od fyzikální podstaty. Mějmě tedy kvadratickou funkce $y = x^2$. Zopakujme si, že okamžitá rychlost je číselně rovna změně (přírůstku) dráhy za jednotku času. Určíme přírůstek kvadratické funkce $y = x^2$ vztažený na jednotkovou změnu proměnné x. Postup je obdobný jako při stanovení průměrné rychlosti.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Pojem derivace bývá často motivován i úlohou nalázt tečnou ke grafu funkce $y = f)x)$ v bodě x_0. Jelikož přímka je dána dvěma body, musíme vyjít z rovnice sečny v bodě x_0. Hledaná sečna bude bude dána body $T[x_0; f(x_0)]$ a $X[x; f(x)]$ a její rovnice bude

$$y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

přičemž zlomek $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí této přímky. S tímto zlomkem jsme se však setkali výše a interpretovali ho jako přírůstek funkce vztažený na jednotkový přírůstek proměnné x v bodě x_0.

Sami cítíme, že výpočet tohoto přírůstku metodou kdy se to hodí je Δx rovno nule nebo různé od nuly není hodno matematika 21. století. Tento problém hýbal matematikou více než dvě století a vyústil v zavedení pojmu limita funkce. Než přistoupíme k zavedení tohoto pojmu, uvedeme definici důležitého pojmu *okolí bodu.*

Def. 2.1 *Nechť je dán bod x_0 a reálné číslo $\delta > 0$. Interval $O(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ nazveme (delta) okolím bodu x_0. Interval $[x_0; x_0 + \delta)$ resp. $(x_0 - \delta; x_0]$ nazveme pravým (levým) okolím bodu x_0. Množinu $O(x_0) - \{x_0\}$ nazveme ryzím (prstencovým) okolím bodu x_0. Interval $(a; +\infty)$ resp. $(-\infty; a)$, $a \in \mathbb{R}$ nazveme okolím bodu ∞ resp. $-\infty$.*

Nyní můžeme přistoupit k zavedení pojmu limity funkce v bodě x_0.

Def. 2.2 *Řekneme, že funkce má v bodě x_0 limitu rovnou $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje ryzí δ - okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí*

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Nahradíme-li pojem ryzí δ okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o limitě zprava (zleva). Značit budeme $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ či $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Přečteme-li si pozorně definici limity pozorně, zjistíme, že se v ní vůbec nemluví o hodnotě $f(x_0)$.

Výše uvedená definice nám určuje vlastní limitu ve vlastním bodě. Co však taková funkce $y = \frac{1}{x^2}$ v bodě $x = 0$? Budeme-li počítat funkční hodnoty pro $x \sim 0$, pak nám budou vycházet velká čísla. To nás vede k zavedení pojmu nevlastní limita ve vlastním bodě.

Def. 2.3 *Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nevlastní limitu ∞ $(-\infty)$, jestliže pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje ryzí delta okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) > K$ $(f(x) < K)$. Nahradíme-li pojem okolí pojmem pravé (levé) okolí, budeme opět hovořit o limitě zprava (zleva).*

Jelikož posloupnost je speciální příklad funkce, tak nás určitě nepřekvapí některé analogie. První z nich je následující věta.

Věta 2.1 *Funkce f má v daném bodě nejvýš jednu limitu.*

Stejně tak nás nepřekvapí, že limita funkce kopíruje aritmetické operace.

Věta 2.2 *Nechť platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, přičemž platí $A, B \in \mathbb{R}$. Pak je*
1. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *je-li* $B \neq 0$.

Samozřejmě platí i věta o sevření.

Věta 2.3 *Nechť existuje okolí bodu x_0 v němž platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$. Pak i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.*

Rovněž pro počítání limit typu $\frac{1}{\infty}$ a podobně platí táž pravidla jako v případě posloupností.

Pro výpočet limity nám pomůže i následující věta.

Věta 2.4 *Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(y) = L$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto oklolí platí $\varphi(x) \neq \alpha$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = L$.*

Vraťme se k pojmu limity. Jak už bylo řečeno, v definici se vůbec nezmiňujeme o tom, jaká je hodnota funkce v bodě x_0. V tomto bodě nemusí být funkce vůbec definována či může mít jakoukoliv hodnotu, dokonce může být funkční hodnota rovna přímo limitě. A právě tento případ nás bude eminentně zajímat, jelikož funkce s nimiž od základní školy jsou většinou tento případ. Uvedeme proto následující definici.

Def. 2.4 *Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá, jestliže platí $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$. Nahradíme-li pojem limita pojmem limita zprava (zleva), mluvíme o spojitosti zprava (zleva).*

Pojem spojitosti však můžeme zavést, aniž bychom přímo mluvili o limitě. Stačí totiž definici spojitosti upravit následujícím způsobem.

Def. 2.5 *Řekneme, že funkce je v bodě x_0 spojitá, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje ryzí δ - okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Nahradíme-li pojem ryzí δ okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o spojitosti zprava (zleva).

Podobně jako v případě limity spojitost kopíruje aritmetické operace.

Věta 2.5 *Nechť funkce f g jsou spojité v bodě x_0. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a v případě $g(x_0) \neq 0$ i funkce $\frac{f}{g}$.*

Následující věta má význam pro počítání limit složených funkcí.

Věta 2.6 *Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \alpha$ a funkce f je spojitá v bodě α. Pak platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$.*

Funkce s nimiž pracujeme bývají obvykle definovány na jistém intervalu. Měli bychom se tedy zajímat, jak je to se spojitostí funkce na intervalu. začneme definicí.

Def. 2.6 *Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li levý (pravý) koncový bod do I, pak je zde spojitá zprava (zleva).*

Nyní uvedeme dvě věty, které jsou velmi důležité a pomáhají nám osvětlit pojem spojitosti. První věta je také známa jako věta Weierstrassova).

Věta 2.7 *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak je zde ohraničená a nabývá zde největší a nejmenší hodnoty.*

Druhá věta je pojmenována podle českého matematika a filozofa Bernarda Bolzana.

Věta 2.8 *Nechť funkce f je definována na uzavřeném intervalu I. Pak zde nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledkem této věty je toto tvrzení.

Věta 2.9 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a;b)$ takový, že platí $f(\xi) = 0$.*

Budeme běžně pracovat také s funkcemi inverzními, proto se nám hodí i tato věta.

Věta 2.10 *Nechť funkce f je ryze monotónní a spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$. Pak inverzní funkce je spojitá a ryze monotónní na intervalu $J = f(I)$.*

Závěrem se ještě podrobněji podíváme na body, v nichž je funkce nespojitá. Ten bod budeme označovat x_0. Rozlišujeme tři případy:
1) Existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Tento případ nazveme *odstranitelná nespojitost* . Název je případný, neboť nespojitost lze snadno odstranit definováním nové funkce dle níže uvedeného vzoru.

$$g(x) = \begin{cases} a & x = x_0 \\ f(x) & x \in D(f) - \{x_0\} \end{cases}$$

Příkladem budiž již zmíněná funkce $y = \frac{\sin x}{x}$. Tato funkce není definována pro $x = 0$, leč $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tuto nespojitost lze odstranit dodefinováním

$$y = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} - 0 \end{cases}$$

2. Limita funkce sice neexistuje, ale existují obě jednostranné limity, jsou vlastní a různé. Tento případ nazveme *bod nespojitosti prvního druhu.* Příkladem budiž funkce definovaná následujícím způsobem.

$$y = \begin{cases} x-1 & x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Limita neexistuje, jednostranné limity jsou rovny -1 resp. +1.
3. Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní. Tento případ nazveme *bod nespojitosti druhého druhu.* Příkladem budiž funkce $y = \frac{1}{x}$.

Kapitola 3

Derivace funkce

V motivačních úlohách, ať se již jednalo o určení okamžité rychlosti, rovnici tečny a další hrál klíčovou roli podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jestliže jmenovatel byl prakticky roven nule. Jelikož jsme se již seznámili s pojmem limity, kterémuž dobře rozumíme, je nám jasné, že můžeme opustit čachry s Δx a definovat pojem derivace.

Def. 3.1 *Derivaci funkce v bodě x_0 nazveme limitu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f(x)'$ resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Následující věta uvádí vztah mezi spojitostí a derivací.

Věta 3.1 *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci (derivaci zprava, derivaci zleva). Pak je zde spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva).*

Musíme si uvědomit, že tato věta je implikace, nemusí tedy platit implikace obrácená. Jednoduchým příkladem je funkce $y = |x|$, která má derivaci zprava rovnu 1 a derivaci zleva rovnu -1, derivaci tedy nemá.

V další větě uvedeme postup pro derivaci součtu, součinu a podílu funkcí. Zatímco u součtu či rozdílu je to stejné jako u limity, v případě součinu resp. podílu funkcí je již situace složitější.

Věta 3.2 *1.* $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$
2. $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{f^2(x_0)}$

Abychom nemuseli pořád psát u x index, nadefinujeme si derivaci na intervalu a pak již přistoupíme k některým vzorcům pro derivace elementárních funkcí.

Def. 3.2 *Řekneme, že funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Je-li interval na některé straně uzavřený, musí mít patřičnou jednostrannou derivaci.*

Nyní si uvedeme vzorce pro derivaci elementárních funkcí.

3.1. $(c)' = 0$

3.2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.3. $(\sin x)' = \cos x$

3.4. $(\cos x)' = -\sin x$

3.5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

3.6. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

3.7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3.8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

3.9. $(e^x)' = e^x$

3.10. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

3.11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3.14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Bohužel, věršina funkcí s nimiž budeme pracovat jsou funkce složené, musíme si tedy říci, jak se derivuje funkce složená.

Věta 3.3 *Nechť funkce $u = g(x)$má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní dervaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$\acute{F}(x_0) = \acute{f}(x_0) \cdot \acute{g}(x_0) = \acute{f}[g(x_0)] \cdot \acute{g}\,(x_0).$$

Přidáme ještě větu o derivaci funkce složené.

Věta 3.4 *Nechť funkce $x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má funkce f v bodě y_0 derivaci $\acute{f}\ (y_0)$. Pak má inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $x_0 = f(y_0)$ rovněž derivaci.*
Je-li $\acute{f}\ (y_0) \neq 0$, je derivace inverzní funkce vlastní a platí

$$(f^{\acute{-1}})\ (x_0) = \frac{1}{\acute{f}\ (y_0)}.$$

Je-li $\acute{f}\ (y_0) = 0$, je derivace funkce inverzní nevlastní a rovna $+\infty$ pro funkci rostoucí a $-\infty$ pro funkci klesající.

Derivace funkce na intervalu I je funkce, neboť každé hodnotě $x \in I$ přísluší právějedna hodnota y' . Tuto funkci můžeme opět derivovat, je tedy namístě následující definice.

Def. 3.3 *Druhou derivací funkce f rozumíme funkce $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme $n-$tou derivaci (derivaci $n-$tého řádu) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.*

Kapitola 4

Aplikace derivace

Důležitou úlohou nejen v matematice je nalezení tečny a normály ke grafu funkce v jistém bodě. Na základě toho, co jsme dosud probrali o derivaci a vzpomínek na analytickou geometrii můžeme formulovat následující větu.

Věta 4.1 *Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0; y_0]$ má tvar*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Rovnice normály má tvar

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$f'(x)$

Nyní se vrátíme k výpočtu limity neurčitých výrazů. Máme k dispozici poměrně účinný prostředek známý jako L´Hospitalovo (nemocniční) pravidlo.

Věta 4.2 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a je splněna jedna ze dvou následujících podmínek*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x_0)}$, pak existuje i $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x_0)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x_0)}$$

V následující částí se budeme věnovat průběhu funkce, čímž se míní nalezenení důležitých údajů o fukci (definiční obor, obor hodnot, monotonie, extrémy, inflexní body, asymptoty). Z toho, co již víme o derivaci, můžeme formulovat následující větu.

Věta 4.3 *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak pplatí:*

4.1. Funkce f je neklesající na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I.

4.2. Funkce f je rostoucí na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.

Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.

Platnost této věty lze rozšířit na interval I libovolného typu. Stačí předpokládat, že f je spojitá na I a f' existuje uvnitř I. Věta platí i v případě, když f má někde nevlastní derivaci, pokud se předpokládá, že funkce f je spojitá. Z této věty snado odvodíme postačující podmínku pro monotónii funkce.

Věta 4.4 *Nechť f má konečnou derivaci na otevřeném intervalu I. Je-li $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí (klesající) na I.*

Definujme lokální extrém.

Def. 4.1 *Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:*

- *lokální maximum, existuje-li okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,*
- *lokální minimum, existuje-li okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,*
- *ostré lokální maximum, existuje-li ryzí okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$,*
- *ostré lokální minimum, existuje-li ryzí okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$.*

Tvrzení předchozí věty nám dává návod, jak nalézt lokální extrémy.

Věta 4.5 *Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $O(x_0)$. Je-li pro všechna $x < x_0$ z tohoto okolí $f'(x) > 0$ a pro všechna $x > 0$ z tohoto okolí $f'(x) < 0$, pak má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Obdobné tvrzení platí i pro ostré lokální minimum, zobáčky jsou obrácené.*

Máme ještě jeden prostředek na nalezení lokálních extrémů.

Věta 4.6 *Nechť $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 osré lokální maximum. Je-li $f''(x_0) > 0$ má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Shrneme-li tyto dvě věty, máme souvislost mezi derivací a lokálními extrémy.

Věta 4.7 *Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť je v tomto bodě vlastní derivace. pak je $f'(x_0) = 0$.*

Tuto větu jsem uvedl jen pro první a druhou derivaci, mohl jsem ji ovšem formulovat obecněji zhruba tímto způsobem. Je-li lichá derivace rovna nule a následující sudá je kladná (záporná), má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum (maximum). Praktického smyslu to však moc nemá, snad jen u jednodušších funkcí má smysl počítat dervace vyšších řádů.

Zatím jsme zdůrazňovali, že se jedná o extrémy lokální, tedy že se jedná o záležitost bodu x_0 a jeho blízkého okolí. Můžeme se také ptát, zda má funkce na nějaké množině největší či nejmenší hodnotu. Odpověď nalezneme v následující definici.

Def. 4.2 *Nechť funkce f je definována na množině M. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 absolutní (globální) maximum, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 absolutní (globální) minimum, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.*

Vykreslíme-li si graf nějaké funkce, pak většinou dojdeme k ladným křivkám. Definujeme

Def. 4.3 *Řekneme, že funkce f je konvexní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí*

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Řekneme, že funkce f je konkávní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

pokud nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostaneme definici pojmů ostré kovexnosti (konkávnosti) na intervalu I.

Zkusme si tuto krkolomnou definici rozklíčovat jak se teď říká hezky česky. Spojme body x_1 a x_3 přímkou. Ta bude mít rovnici

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Znamená to, že všechny body funkce jsou pod touto přímkou, graf funkce je vypouklý směrem dolů všude tam, kde je vypouklý.

Zajímat nás musí jak zjistíme tuto vlastnost grafu. Odpověď nám dá následující věta.

Věta 4.8 *Nechť funkce f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Funkce f je konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy když je funkce f' neklesající (rostoucí) na I. Funkce f je konkávní (ostře konkávní) na I právě tehdy když je funkce f' nerostoucí (klesající) na I.*

Uvědomíme-li si jak zkoumáme monotónii, tak můžeme formulovat tuto větu.

Věta 4.9 *Nechť I je otevřený interval a funkce f má na I vlastní derivaci.*
Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je funkce na I ostře konvexní.
Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je funkce na I ostře konkávní.

Uvedeme ještě jednu větu, která nám tyto pojmy více objasní.

Věta 4.10 *nechť funkce f má vlastní derivaci na intervalu I. Pak je f konvexní (konkávní) na I právě tehdy, když pro každé dva různé body x, $x_0 \in I$ platí:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nahradíme-li ve výše uvedených rovnicíc $f(x)$ písmenem y a nerovnosti rovností, obdržíme rovnici tečny. Graf funkce konvexní je tedy nad tečnou, u funkce konkávní pak pod tečnou.

Tyto vlastnisti se mohou na nějakém intervalu střídat, ten bod, v němž tato změna nastane se nazývá bodem inflexním. Definujme si ho přesněji.

Def. 4.4 *Nechť f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. je-li tato derivace nevlastní, musí zde být navíc spojitá. řekneme, že x_0 je inflexním bodem funkce f, existuje-li δ-okolí bodu x_0 takové, že je funkce na intervalu $(x_0 - \delta; x_0)$ ryze konvexní a na intervalu $(x_0; x_0 + \delta)$ ryze konkávní nebo naopak.*

Abychom mohli nakreslit graf funkce, musíme se ještě seznámit s pojmem asymptota (tečna v nekonečnu).

Def. 4.5 *Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá asymptotou bez směrnice funkce f, jestliže má funkce v bodě x_0 alespoň jednu limitu nevlastní. Přímka $y = ax+b, a,\ b \in \mathbb{R}$ se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f, jestliže platí nebo $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.*

Problém, jak vypočítat koeficienty a, b řeší následující věta.

Věta 4.11 *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $f(x)$, je-li $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax)$. Analogickou větu můžeme zformulovat pro $x \to -\infty$.*

Nyní si ukážeme, jak asymptoty počítat.

Příklad 4.1 Najděte asymptoty ke grafu funkce $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, nemá tedy asymptoty bez směrnice. Podívejme se tedy, zda bude mít asymptoty se směrnicí. Nejdříve budeme hledat směrnici.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = 0.$$

Úsek na ose y určíme podle vzorce

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 0 \cdot x\right) = 1.$$

Ke stejnému výsledku bychom došli i pro $x \to -\infty$, přímka $y = 1$ je tudíž asymptotou se směrnicí.

Jiná situace nastane v následujícím příkladu.

Příklad 4.2 Určete asymptoty ke grafu funkce $y = xe^x$. I tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, proto nemá asymptoty bez směrnice. S asymptotami se směrnicí je to ale jiné. Je totiž rozdíl, počítáme-li limitu pro plus či mínus nekonečno. Zatímco $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x} = \infty$, je $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = 0$. Dopočítáme ještě $q = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$. Použitím L'Hopitalova pravidla snadno zjistíme, že se rovná nule a přímka $y = 0$ je asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$.

Závěrem této kapitoly si řekneme věty o střední hodnotě. První z nich je věta Rolleova.

Věta 4.12 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$. Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní) a nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje $c \in (a;c)$ takové, že je $f'(c) = 0$.*

Zobecněním této věty je věta Lagrangeova.

Věta 4.13 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$. Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní). Pak existuje $c \in (a;c)$ takové, že platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Se svou troškou do mlýna přišel i pan Cauchy.

Věta 4.14 *Nechť funkce f a g jsou definovány na intervalu $[a;b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a;b)$ existují vlastní derivace $f')x)$, $g'(x)$. Pak existuje $c \in (a;b)$ tak, že platí*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

Kapitola 5

Přibližné vyjádření funkce

Na závěr si něco řekneme o přibližném vyjádření funkce. Problém spočívá v tom, že někdy je přesné vyjádření funkce dosti složité, přičemž v praxi bychom vystačili i s méně přesným, zato jednodušším vyjádřením funkce v okolí nějakého bodu. Budeme preferovat vyjádření pomocí polynomu, neboť tato funkce se mimo jiné snadno derivuje i integruje.

Def. 5.1 *Nechť funkce f je definována v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 a platí $x_0 + h \in O(x_0)$. Pak číslo h nazýváme přírůstkem nezávisle proměnné a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme přírůstkem funkce f v bodě x_0 s krokem h nebo též přírůstkem závisle proměnné.*

Pokusíme se nyní vyjádřit přírůstek funkce v závislosti na čísle h. Jednu z možností udává následující definice.

Def. 5.2 *Řekneme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce, pro niž platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.

Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, nazývá se výraz $A \cdot h$ diferenciál funkce f v bodě x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ či stručněji $\mathrm{d}f(x_0)$.

Nyní se pokusíme zjistit význam konstanty A. Pracujeme s funkcemi spojitými, které moho mít v bodě x_0 derivaci. Pokud tomu tak je, pak máme vyhráno, nebt byla dokázána následující věta.

Věta 5.1 *Funkce f má v bodě x_0 diferenciál právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Konstanta A z předchozí definice je dána vztahem $A = f'(x_0)$, je tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

Může se stát, že přibližné vyjádření funkce diferenciálem není dostatečně přesné. V tomto případě můžeme hledat vyjádření polynomem stupně n ve tvaru $P_n(x) = a_0 + A_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$. Je rozumné požadovat, aby platilo

$$\begin{array}{rcrcr} f(x_0) & = & P_n(x) & = & a_0 \\ f'(x_0) & = & P_n'(x) & = & a_1 \\ f''(x_0) & = & P_n''(x) & = & 2a_2 \\ & & & \vdots & \\ f^{(n)}(x_0) & = & P_n^{(n)}(x) & = & n!a_n \end{array}$$

Hledaný polynom má tvar

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_n(x)$$

Polynom $T_n(x)$ se nazývá Taylorův polynom se středem x_0. Pan Taylor, po němž je pojmenována následující věta, dokázal, že funkci $f(x)$ lze nahradit polynomem.

Věta 5.2 *Nechť funkce f má v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některá $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:*

$$f(x) = T_n(x_0) + R_n(x).$$

$$R_n x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo mezi x a x_0 je zbytek (chyba). Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom nazývá Maclaurinův.