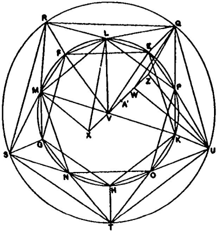
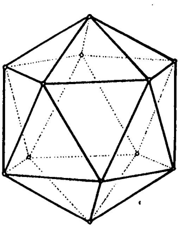
MA2BP_PKG: Konstrukční geometrie





Poslední aktualizace: 9. května 2018, Vojtěch Žádník

http://is.muni.cz/el/1441/jaro2018/MA2BP_PKG/um/prednaska.pdf

Plán

Celkově

- jaro 2018: konstrukční geometrie (syntetická) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2018: počítací geometrie (analytická) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Jaro 2018

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, další a další
- zobrazovací metody: myšleno 3D $\rightarrow$ 2D

Organizační věci

Preference

(1) celkový přehled
(2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
(3) konstrukce a technické záležitosti

Materiály

- IS[1]: osnova, přednáška, GeoGebra, odkazy, staré písemky

Zakončení

- zápočet ze cvičení → písemka → ústní

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce
- vítěz získá vliv na další průběh kurzu, nehynoucí slávu a věcnou cenu

---

[1] http://is.muni.cz/el/1441/jaro2018/MA2BP_PKG/um/

Základy

$=$ základy eukleidovské geometrie
$=$ geometrie Eukleidových Základů,[2] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[3]

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, (rovnoběžnost), shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, . . .*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů. . .*

---

[2] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Základy
[3] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

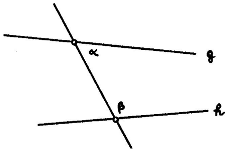
(I) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

(III) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

(V) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*



Eukleidův postulát (V): $\alpha + \beta < 2R \Longrightarrow$ *g a h se protínají.*

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce*.

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \Longrightarrow k = m$.
- $k = l$ a $m = n \Longrightarrow k + m = l + n$.
- apod.[4]

[4] `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html`

Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Několik axiómů, které nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány...

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok" a „mezera".*

Poznámka

V Hilbertově systému mezi axiómy **incidence** najdeme upřesnění, že

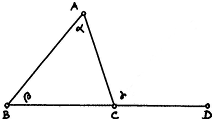
- *dvěma body je určena <u>právě jedna</u> přímka.*

Mezi axiómy **shodnosti** je věta SUS. Axióm **rovnoběžnosti**:

- *každým bodem ke každé přímce prochází <u>nejvýše jedna</u> rovnoběžka.*

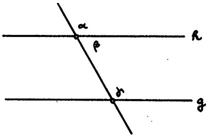
Co na postulátu (V) nezávisí

- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[5]



$\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$

- Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek[6] (odtud existence rovnoběžky).

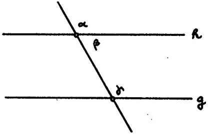


$\alpha = \gamma \Longrightarrow h \| g$

[5] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání.
[6] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku.

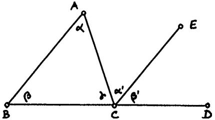
Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[7] (odtud jednoznačnost rovnoběžky).



$$h \| g \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[8]



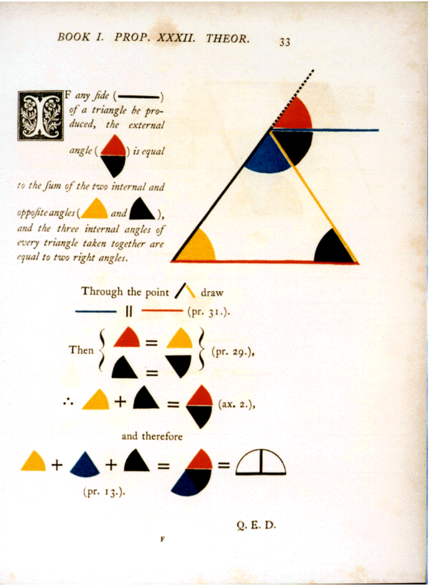
$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje. . .)

[7] Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \Longrightarrow 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné.

[8] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech.

Detail k větě o součtu úhlů v trojúhelníku[9]


BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

IF any ſide (——) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles (and), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw —— || —— (pr. 31.).

Then { = ; = } (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

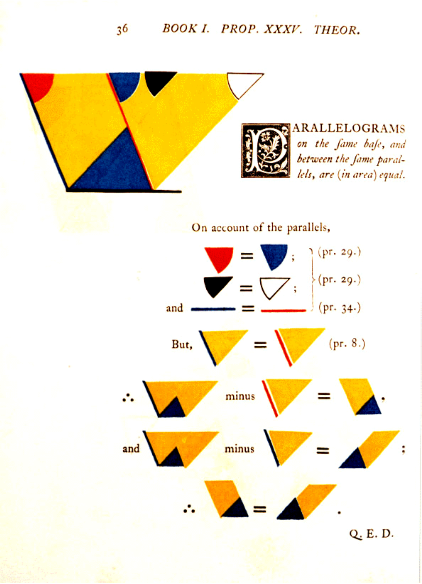
+ + = = (pr. 13.).

Q. E. D.

F

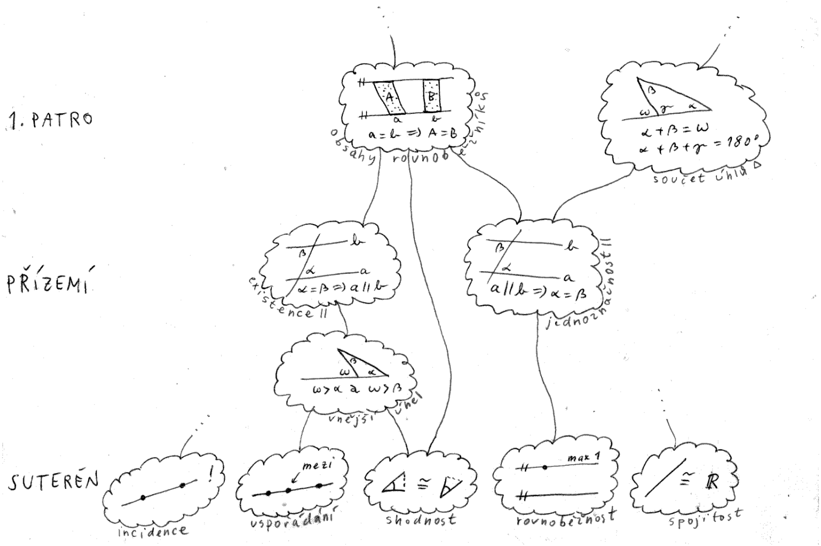
[9] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html

Detail k větě o obsazích rovnoběžníků[10]



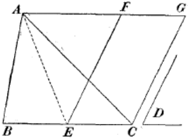
[10] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html

Mezishrnutí (pokračování na s. 34)

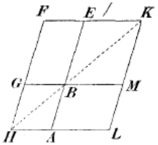


Základní tvrzení o rovnostech obsahů[11]

- Rovnoběžníky (resp. trojúhelníky) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah (viz s. 9).
- Trojúhelník ABC a rovnoběžník $ECGF$ mají stejný obsah ($E =$ střed BC a $BC \| AF$):



- Rovnoběžníky $BEFG$ a $BALM$ na mají stejný obsah (společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):



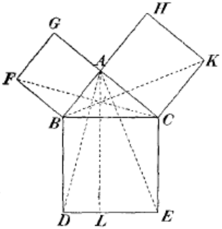
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta Pythagorova...

[11] Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky.

Eukleidova věta o odvěsně, resp. Pythagorova věta

Věta

V pravoúhlém trojúhelníku BAC, kde P = pata výšky z vrcholu A, platí $BP \cdot BC = BA^2$ *a* $CP \cdot CB = CA^2$*, tudíž* $BC^2 = BA^2 + AC^2$*.*



Důkaz.

FBAG je čtverec a úhel *BAC* je pravý $\Longrightarrow$ body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s *FB*.

Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. *FBC* a *ABD* a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec *FBAG* stejný obsah jako obdélník *PBDL*. . . [12] □

[12] http://www.youtube.com/watch?v=PoFMWJkY7r8

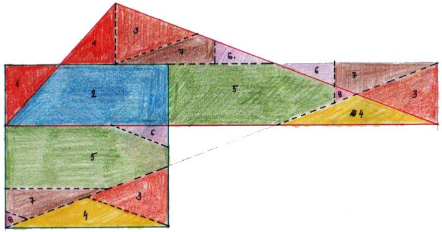
Kvadratura mnohoúhelníku

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[13]

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním.

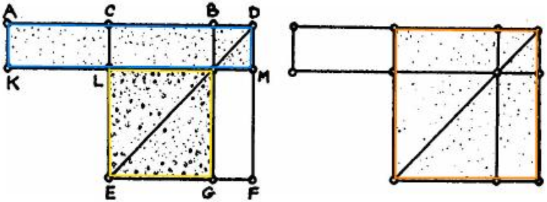
Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\iff$ *jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

[13] http://ggbtu.be/mkripDpYd



Obrázek 4.11: $\boxed{\text{A}}$ II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Poznámky

Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce.

Tyto úpravy jsou také prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice...

Speciálním případem je konstrukce zlatého řezu, viz s. 15.

Zlatý řez

Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

Konstrukce

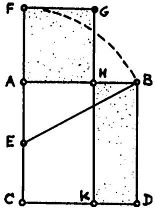
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$.

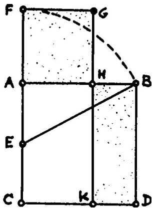
Potom AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 14) a z Pythagorovy věty (s. 12):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2, \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.



Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.

To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$

Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx - b^2 = 0.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2} b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2} b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} b.$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0\ldots$

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,[14]
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Úplná charakterizace sestrojitelných veličin říká, že to je všechno:

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\ } \quad (\quad)$$

[14] Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. 40.

Důkaz

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava dvou lineárních rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava lineární a kvadratické rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, . . .

Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Poznámka

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,

(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,

(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,

(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,

(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. 37)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[15]

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

- problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

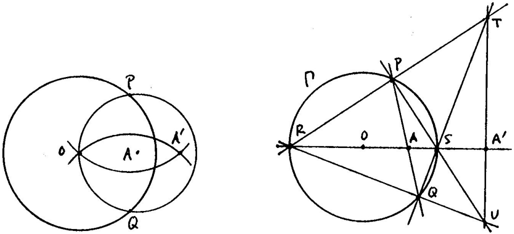
[15] r. 1767, resp. 1882

Mascheroniovské a steinerovské konstrukce

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

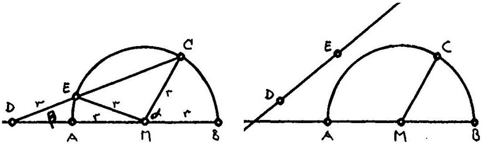
Poznámka

Platí, že konstrukce je proveditelná eukleidovsky
$\iff$ je proveditelná mascheroniovsky $\iff$ je proveditelná steinerovsky...[16]

[16]...ale jak?

Konstrukce *neusis*

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)

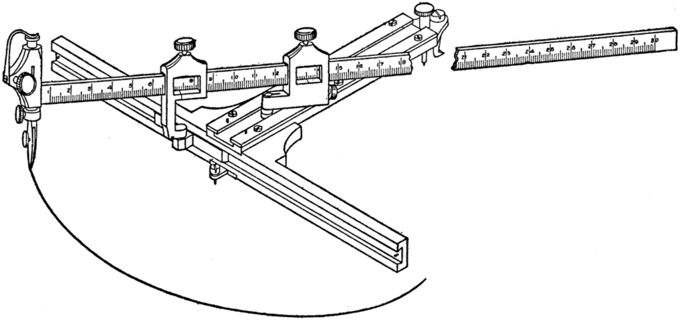


Archimédés: Trisekce úhlu s označeným pravítkem...

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 19...[17]

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction



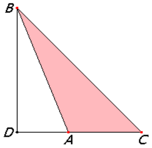
Konstrukce elipsy pomocí *neusis* udělátka.

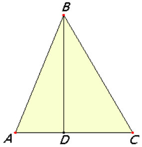
Kosinová věta

Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty představujeme větu kosinovou:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde $D =$ pata výšky z vrcholu B, platí:





$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC, \quad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Několikeré užití Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a algebraická úprava. . . □

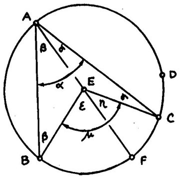
Poznámka

Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

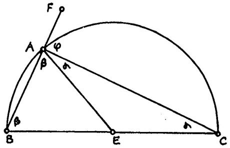
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 7) uvádíme:[18]

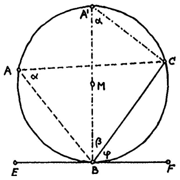
- větu o středovém a obvodovém úhlu,
- spec. případ — Thaletovu větu,
- větu o úsekovém úhlu,
- apod.



$\mu = 2\alpha =$ konst.



$\alpha + \beta = 90°$



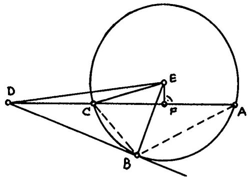
$\varphi = \alpha$

[18] https://ggbm.at/MtseAe67

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu jdoucí bodem D platí:*

$$DC \cdot DA = \textbf{\textit{konst}}.$$



Důkaz.

Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (zde pro trojúh. DBE, DFE, CFE) a alg. úpravou...[19]

Alternativně (univerzálně a elegantně) pomocí podobnosti trojúhelníků (zde trojúh. DCB a DCA)... □

Zejména pro D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí

$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

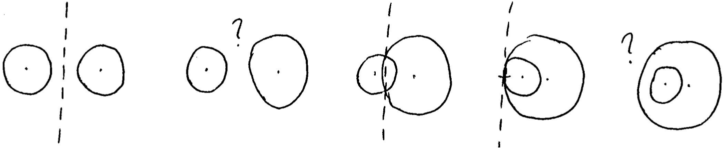
$$m := DB^2 - r^2.$$

[19] Třeba rozlišovat, zda je bod D uvnitř nebo vně kružnice...

Odvozený pojem, na který se budeme občas odkazovat:

Definice

Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá *chordála*.



Chordála

Věta

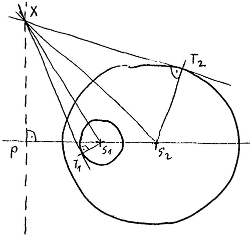
*Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.*

Důkaz.

$X =$ lib. bod na chordále;
$P =$ pata kolmice z bodu X na spojnici středů.

X má stejnou mocnost k oběma kružnicím:

$$\begin{aligned} |XS_1|^2 - r_1^2 &= |XS_2|^2 - r_2^2, \\ (|XP|^2 + |PS_1|^2) - r_1^2 &= (|XP|^2 + |PS_2|^2) - r_2^2, \\ |PS_1|^2 - r_1^2 &= |PS_2|^2 - r_2^2, \end{aligned}$$

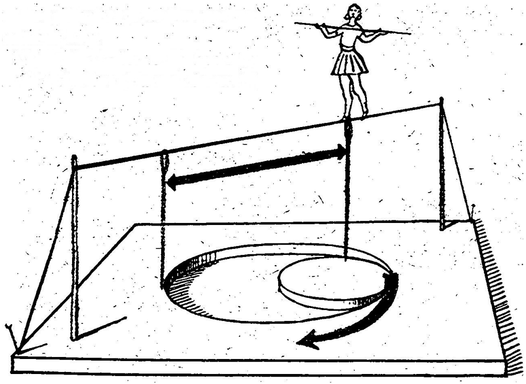


tedy bod P taky leží na chordále!

Chordála má se spojnicí středů společný právě jeden bod, tj. právě P.

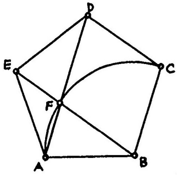
Pata kolmice z každého bodu na chordále splývá s P, tedy chordála $=$ kolmice ke spojnici středů jdoucí P. □

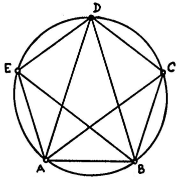
Užitek



Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý. . .

Pravidelný pětiúhelník





Postřehy

(1) $AD \| BC$ a $BE \| CD$, takže $BCDF$ je **kosočtverec**.

(2) Obvodové úhly BAC, CAD, DAE atd. jsou všechny shodné, takže trojúhelník ABD má tu vlastnost, že je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D, tzv. **zlatý trojúhelník**.

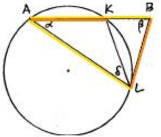
(3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu A, takže jsou **podobné**.

Zlatý trojúhelník

Věta

Nechť úsečka AK je delší částí zlatého řezu úsečky AB a bod L je takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$.

*Potom trojúhelník ABL je **zlatý**, tj. rovnoramenný a takový, že $\beta = 2\alpha$.*



Důkaz.

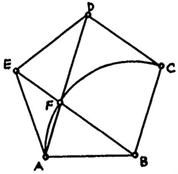
- K = zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ = obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \underline{\alpha = \delta}$.
- Celkem tedy

$$\beta = \alpha + \delta = 2\alpha. \qquad \square$$

Důsledek

Věta

Úhlopříčky v pravidelném 5-úhelníku
*se navzájem dělí v poměrech **zlatého řezu**,*
jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.



Jiný důkaz.

- Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu A $\Longrightarrow$ jsou podobné.
- Odpovídající si strany jsou úměrné $\Longrightarrow$ $AD : DE = EA : AF$.
- Současně však platí $DE = EA = DF$, tedy

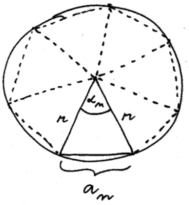
$$AD : DF = DF : FA. \qquad \square$$

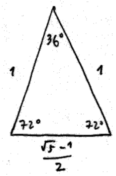
Výpočet a něco navíc

Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360°/n$.

Velikost strany pravidelného n-úhelníku
veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$





Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36°$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72°$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Po dosazení dostáváme

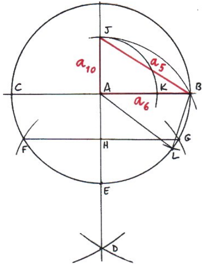
$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL:

Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku BAJ.

Navíc, odvěsnami trojúhelníku BAJ jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.



Důkaz.

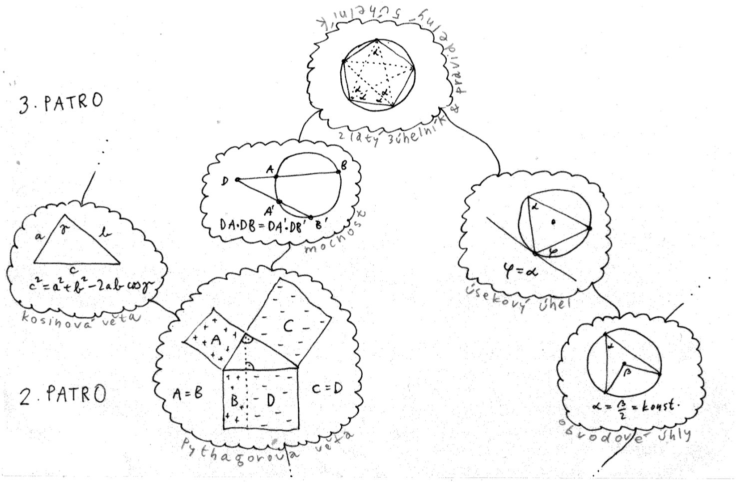
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \qquad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABJ platí

$$|BJ| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

Mezishrnutí (navazuje na s. 10, pokračování na s. 63)

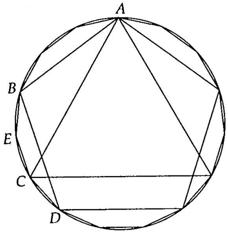


Další pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}$:

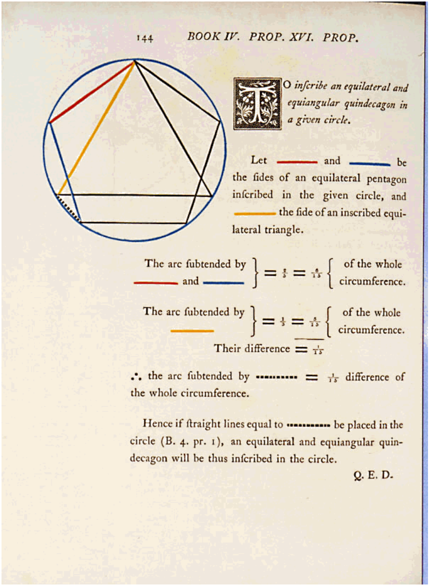


Věta

Pokud lze sestrojit pravidelný $\boldsymbol{k}$*-úhelník a* $\boldsymbol{l}$*-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný* $\boldsymbol{n}$*-úhelník, kde* $\boldsymbol{n} =$ *nejmenší společný násobek* $\boldsymbol{k}$ *a* $\boldsymbol{l}$*.*

Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Detail pro $k = 3$ a $l = 5$



144 BOOK IV. PROP. XVI. PROP.

TO inſcribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.

Let ——— and ——— be the ſides of an equilateral pentagon inſcribed in the given circle, and ——— the ſide of an inscribed equilateral triangle.

The arc ſubtended by ——— and ——— $\Big\} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Big\{$ of the whole circumference.

The arc ſubtended by ——— $\Big\} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \Big\{$ of the whole circumference.

Their difference $= \frac{1}{15}$

∴ the arc ſubtended by ·········· $= \frac{1}{15}$ difference of the whole circumference.

Hence if ſtraight lines equal to ·········· be placed in the circle (B. 4. pr. 1), an equilateral and equiangular quindecagon will be thus inſcribed in the circle.

Q. E. D.

Další sestrojitelné mnohoúhelníky

Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *n je součinem libovolné mocniny* 2 *a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni[20] je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

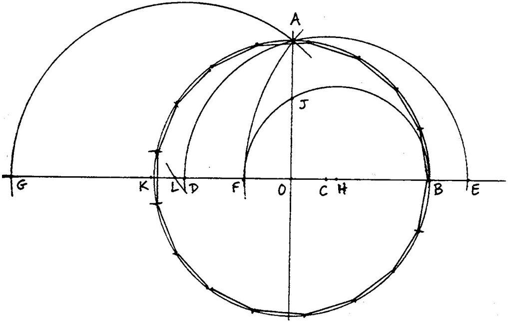
lze	**3**	4	**5**	6		8		10		12			15	16	**17**			20		
nelze					7		9		11		13	14				18	19		21	22

[20] 9. května 2018

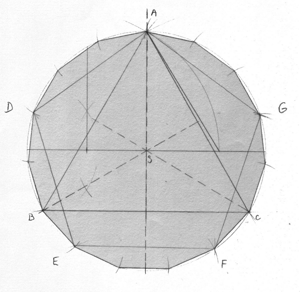
Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

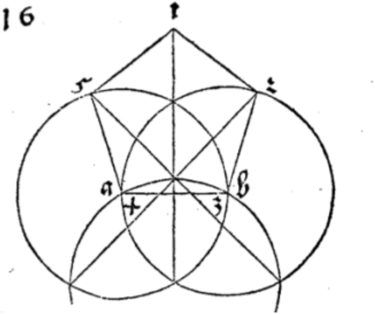
$$a_{17} = \frac{r}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}.$$

Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto[21]



[21] 30. března 1796





Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných. . .

Teorie podobnosti

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \gtreqqless mb \iff nc \gtreqqless md.$$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.

Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:[22]

Reálná čísla r $(= \frac{a}{b})$ a s $(= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo q $(= \frac{m}{n})$ platí

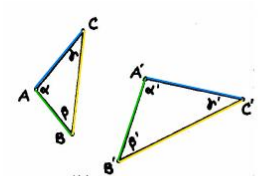
$$r \gtreqqless q \iff s \gtreqqless q.$$

[22] Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Podobné trojúhelníky

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

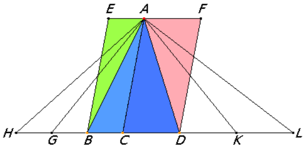
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti}.$$

Základní tvrzení o poměrech obsahů

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



obsah ACB : obsah $ACD = CB : CD$

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 11) a z definice rovnosti poměrů (s. 40)... □

Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

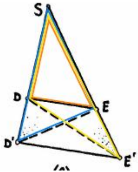
$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde $S =$ obsah trojúhelníku, $a =$ velikost strany, $v =$ velikost výšky na stranu a.

Základní tvrzení o poměrech ramen

Věta

Přímka je <u>rovnoběžná</u> s jednou stranou trojúhelníku $\iff$ protíná zbylé dvě strany <u>úměrně</u>.



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \| DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE.

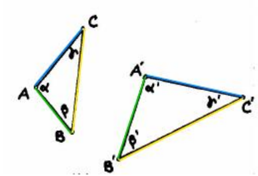
Tedy: rovnost poměrů $\iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D$ $\iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 11). $\square$

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 41) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c',\ c : a = c' : a',\ a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 43)...

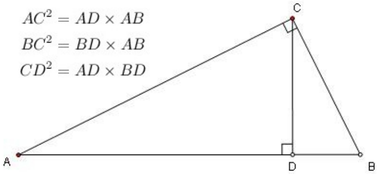
Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník *ABD*, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$. Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky *ABD* a *ABC* mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Poznámky

Implikaci „$\Longrightarrow$“ v předchozí větě s přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 25),
- věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 31),
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 12):



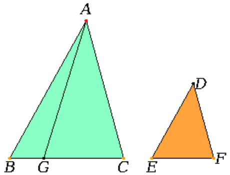
Důkaz.

Trojúhelníky *ADC* a *ACB* mají po dvou shodné vnitřní úhly $\Longrightarrow$ jsou podobné $\Longrightarrow$ $AC : AD = AB : AC$ $\Longrightarrow$ $AC^2 = AB \cdot AD$.
Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně. . . $\square$

O obsazích podobných útvarů

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.



Je-li $1 : k$ poměr podobnosti, potom poměr obsahů je $1 : k^2$.

Důkaz[23].

Pomocný bod $G \in BC$ je takový, že $EF : BG = BC : EF$.

Podle předpokladu je $AB : DE = BC : EF = 1 : k$.

Tzn. $AB : DE = EF : BG$, odkud vyplývá, že obsah ABG = obsah DEF (s. 43).

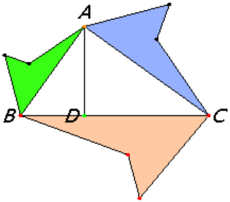
Odtud dostáváme

$$\text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF = \text{obsah } ABC : \text{obsah } ABG =$$
$$= BC : BG = (BC : EF) \cdot (EF : BG) = 1 : k^2. \quad \square$$

[23] ...bez infinitezimálních úvah pro obecné $k \in \mathbb{R}$!

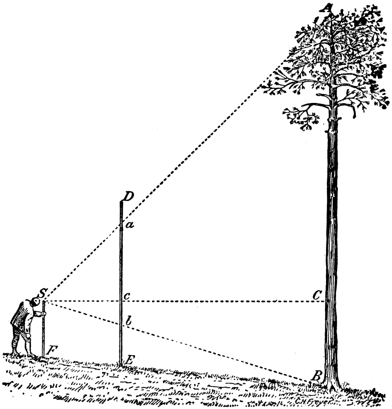
Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.



Důkaz.

Plyne z předchozího tvrzení (s. 46) a z Pythagorovy věty (s. 12)... □



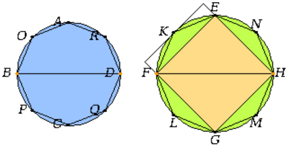
Výška stromu pomocí podobných trojúhelníků. . .

O obsazích kruhů

U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhneme. . .[24]

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.

Každé dva kruhy jsou podobné; pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.

Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 46). . . □

Poznámka

Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

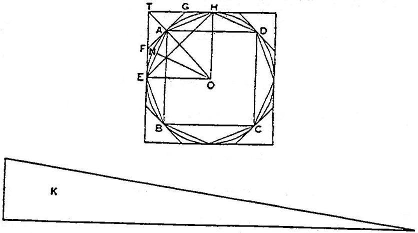
$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.}$$

[24] . . . v klasickém pojetí pomocí Eudoxovy metody.

O obsahu kruhu a obvodu kružnice

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



Poznámka

První část věty říká, že $S = \frac{1}{2} r \cdot o$, kde $r =$ poloměr kružnice a $o =$ její obvod.

To spolu s rovností na s. 49 dává

$$S = \frac{1}{2} r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!

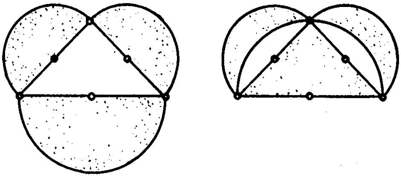
Tradičně se tato konstanta značí π, tudíž

$$S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.$$

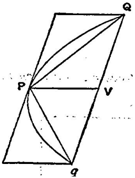
Poznámky ke kvadratuře

Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat umíme (s. 13), kruh neumíme (s. 19).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat lze:



Hippokratés: Vyznačené půlměsíce mají stejný obsah jako odpovídající pravoúhlý trojúhelník (s. 49 a s. 47).



Archimédés: Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq.

Známe z roviny:

- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud nemají žádný společný bod.
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma protínajícími se přímkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.

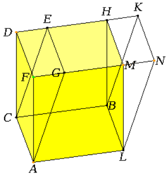
Nově v prostoru:

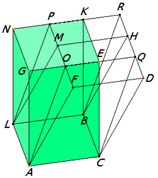
- Neprotínající se přímky jsou *kolmé*, pokud rovnoběžka k jedné přímce protínající přímku druhou je k ní kolmá.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud jedna z rovin obsahuje přímku, která je kolmá ke druhé rovině.
- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Roviny jsou *rovnoběžné*, pokud nemají žádný společný bod.
- Apod.

O objemech rovnoběžnostěnů (a hranolů)

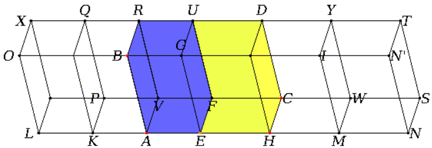
K tvrzením o rovnoběžnících (s. 11, s. 42, s. 46) máme tyto 3D analogie:

- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.





- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.

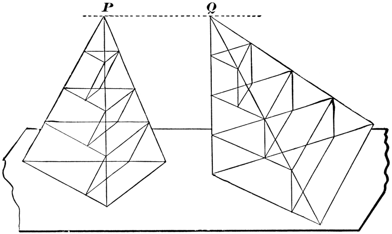


- Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázku jednu 3D analogii s naprosto **ne**analogickým důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



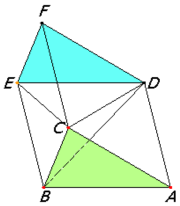
Idea důkazu.

Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem hranolů.

Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami.

Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 53)... □

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[25]



Z uvedeného např. vyvozujeme, že
objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde $V =$ objem jehlanu, $S =$ obsah podstavy
a $v =$ velikost odpovídající výšky.

Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů![26]

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 13) obecně **neplatí**.

[25] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

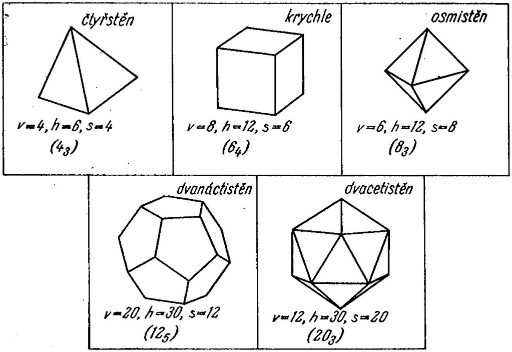
[26] M. Dehn, 1900

Platónská tělesa

= *pravidelné konvexní mnohostěny*
= konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky[27]

Věta

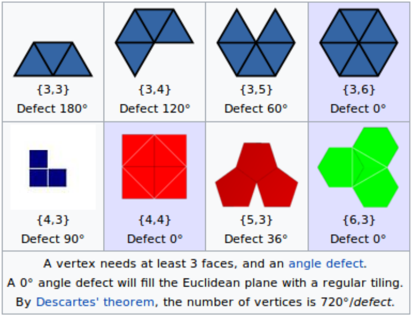
Platónských těles je právě pět druhů:



[27] $\Longrightarrow$ mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.

Důkaz

(1) Platónských těles není víc než pět druhů:[28]
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:



(2) Platónských těles je právě pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

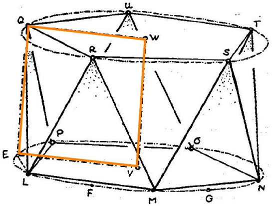
- čtyřstěn $\{3,3\}$, krychle $\{4,3\}$, osmistěn $\{3,4\}$ jsou snadné,
- pro rozbor dvacetistěnu $\{3,5\}$ a dvanáctistěnu $\{5,3\}$ budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 33)...

[28] `http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid`

Pravidelný dvacetistěn poprvé

$QL = QR =$ strana vepsaného 5-úhelníku,
$LE =$ strana vepsaného 10-úhelníku,
$LEQ =$ pravoúhlý trojúhelník.

Proto $EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku $=$ poloměr kružnice (s. 33).

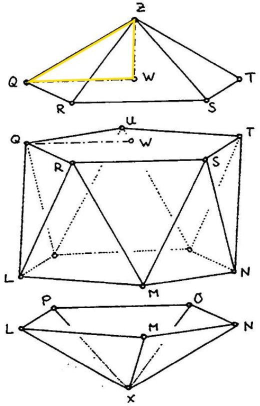


$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

Pravidelný dvacetistěn podruhé

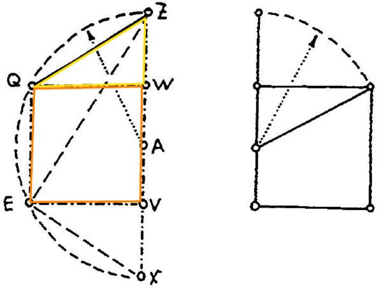
$QWZ =$ pravoúhlý trojúhelník,
$QZ = QR =$ strana vepsaného 5-úhelníku,
$QW =$ strana vepsaného 6-úhelníku.

Proto $WZ =$ strana vepsaného 10-úhelníku $=$ delší část zlatého řezu poloměru kružnice (s. 33).



$WZ =$ delší část zlatého řezu úsečky WQ.

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule. . .



Řez dvacetistěnu a řez zlatý.[29]

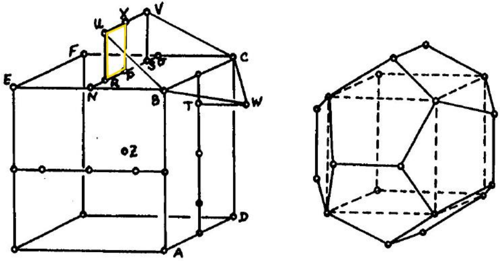
[29] viz konstrukci na s. 15

Pravidelný dvanáctistěn stručně

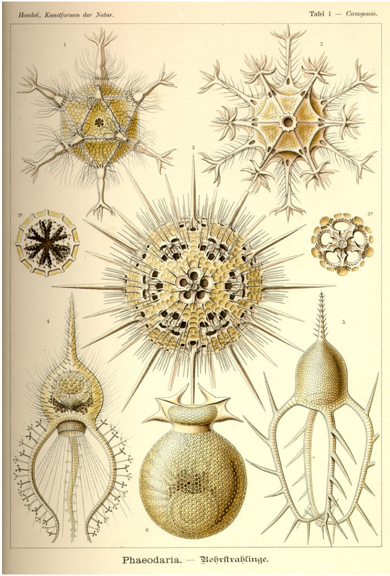
Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy U, V, W podle obr.

Zájemci snadno zdůvodní, že:

- body $UBCWV$ leží v jedné rovině,
- pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný,
- vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná. . .



$RU = RP =$ delší část zlatého řezu úsečky PN.



Circogonia icosahedra vlevo nahoře.

Shrnutí (navazuje na s. 34)

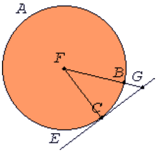
. . .

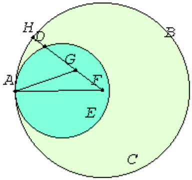
Dotykové úlohy

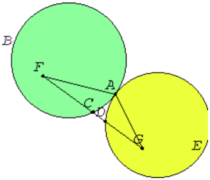
= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.







Věta

Přímka se dotýká kružnice v bodě C $\iff$ je kolmá k průměru FC.

Kružnice se dotýkají v bodě A $\iff$ spojnice jejich středů prochází bodem A.[30]

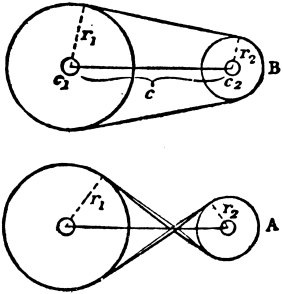
---

[30] Důkazy zpravidla nepřímo, viz např. `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII11.html`

Dotyk vs. orientovaný dotyk

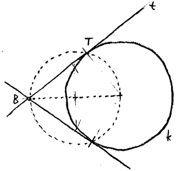
Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

- *cyklus* = orientovaná kružnice,
- *paprsek* = orientovaná přímka,
- *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.

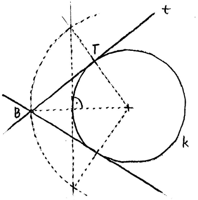


Základní úlohy s tečnami

Tečna z bodu ke kružnici:

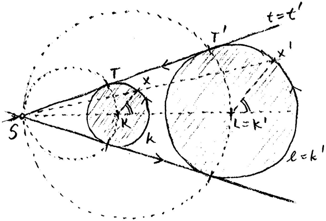


(a) pomocí Thaletovy kružnice

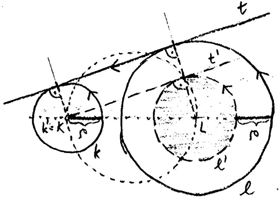


(b) pomocí **souměrnosti**

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



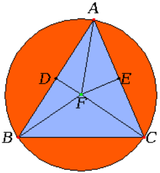
(a) pomocí **stejnolehlosti**

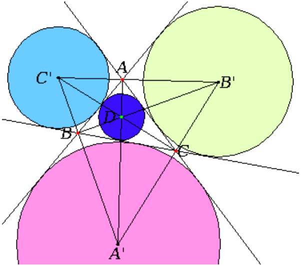


(b) pomocí **dilatace**

Základní úlohy s kružnicemi

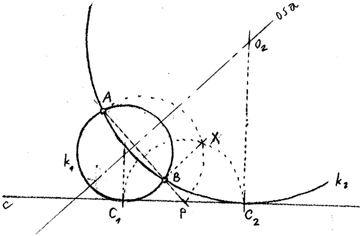
Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:



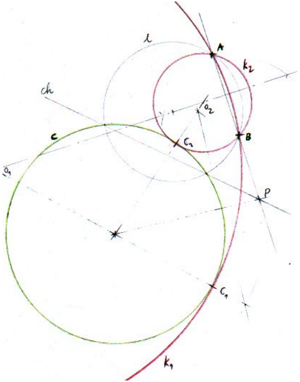


pomocí <u>os úseček</u>, <u>os úhlů</u>

Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:

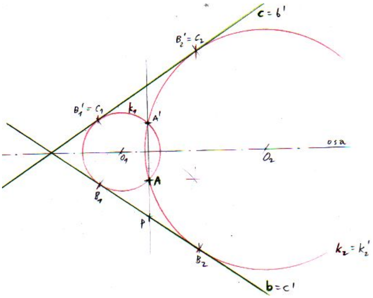


(a) pomocí <u>mocnosti</u>

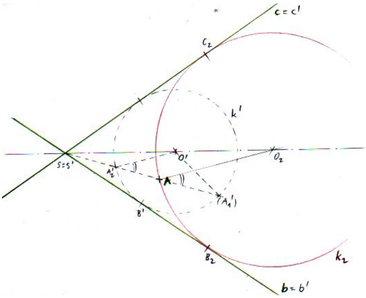


(b) ještě uvidíme...

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



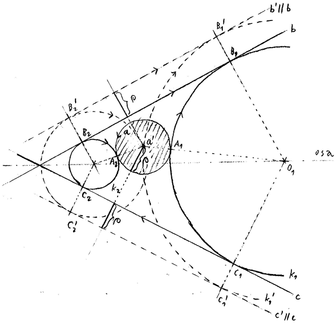
(a) pomocí **souměrnosti**[31]



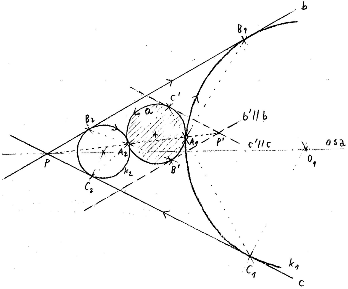
(b) pomocí **stejnolehlosti**

[31] ... redukováno na předchozí případ (s. 69).

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímek:



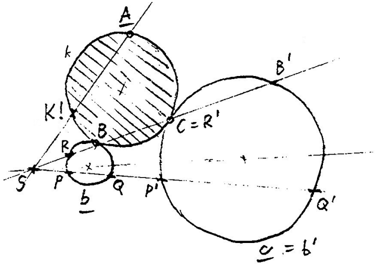
(a) pomocí **dilatace**[32]



(b) pomocí **stejnolehlosti**

32 . . . redukováno na předchozí případ (s. 70).

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou kružnic:



Pomocí **stejnolehlosti** a <u>mocnosti</u> lze ukázat, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Tím je bod K jednoznačně určen, umíme jej sestrojit, ...[33]

[33] ... a tím redukováno na předchozí případ (s. 69).

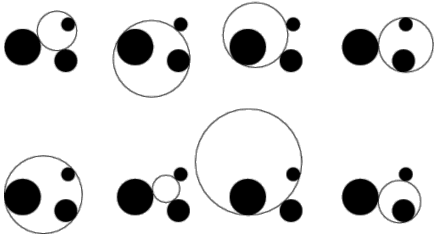
Obecná Apollóniova úloha

$=$ dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

$$\lim_{r\to 0}(\text{kružnice}) = \text{bod}, \qquad \lim_{r\to \infty}(\text{kružnice}) = \text{přímka}.$$

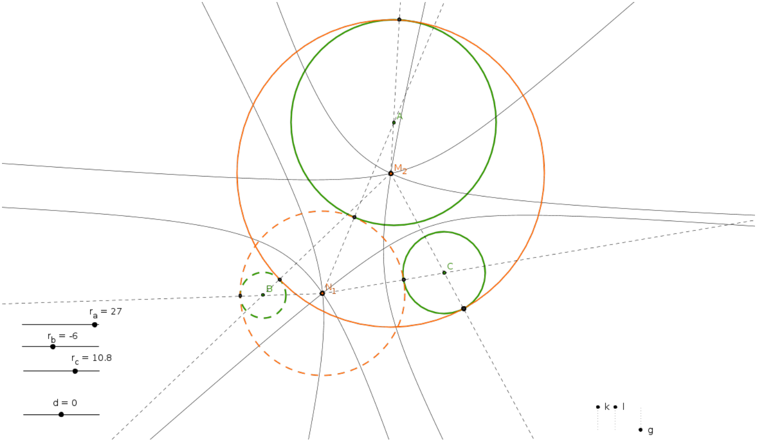
Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po dvojicích:



Poznámky

Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací. . . [34]

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace*. . .



Středy všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku.

[34] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

Náš přístup

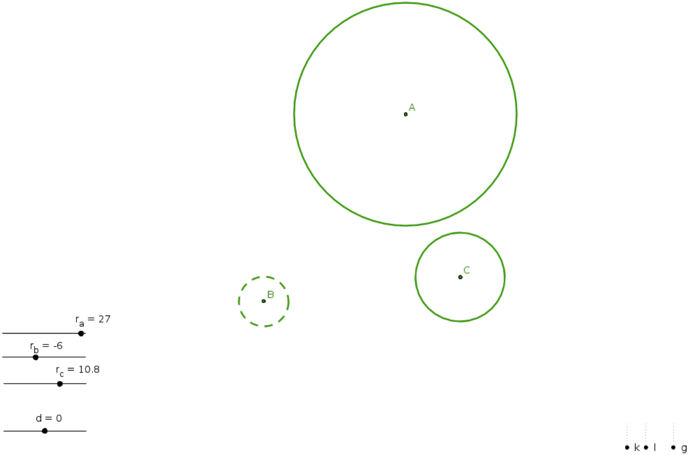
Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

- souměrnosti,
- stejnolehlost,
- dilatace,
- kruhová inverze,
- apod.

Podrobnosti k jednotlivým transformacím začínají na s. 84; ukázka typického použití na následující straně. . . [35]

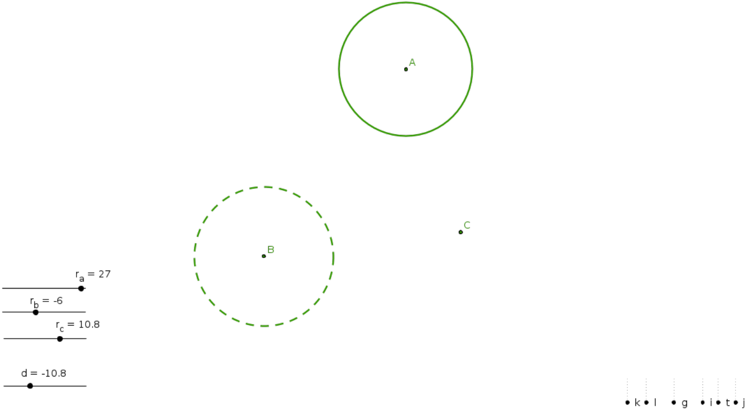
[35] http://ggbtu.be/mrFsNSnbN

Orientovaná Apollóniova úloha



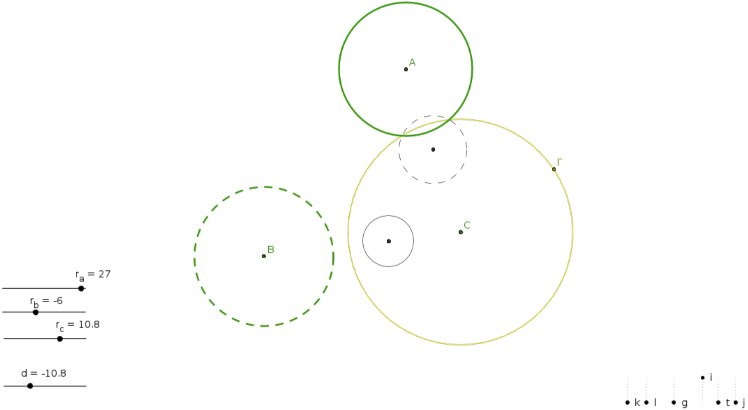
Sestrojit cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.[36]

[36] orientace je vyznačena typem čáry



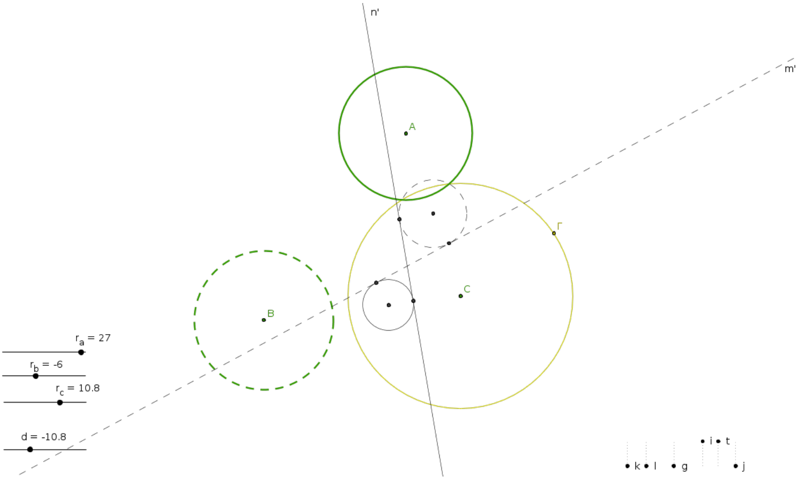
(1) **dilatace**,[37]

[37]. . . tím je sice redukováno na předchozí případ (s. 72), my teď pokračujeme jinak . . .



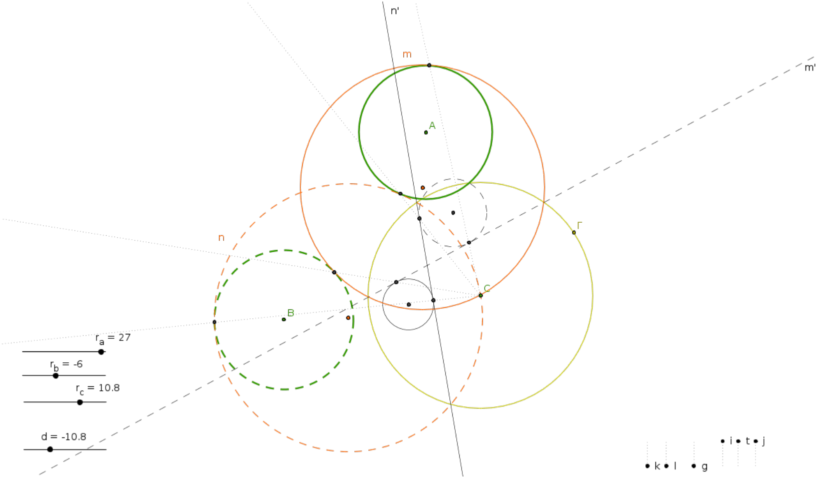
(2) **kruhová inverze,**[38]

[38]. . . se středem v bodě C, . . .



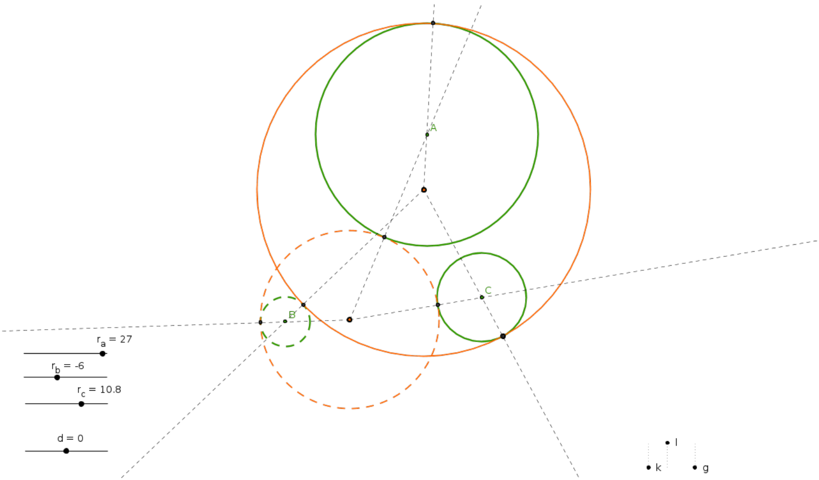
(3) společné tečny,[39]

[39] . . . základní úloha (s. 67), . . .



(4) kruhová inverze zpět,[40]

[40] . . . snadné, . . .

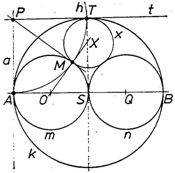


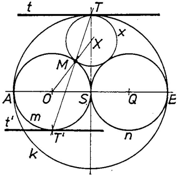
(5) dilatace zpět.[41]

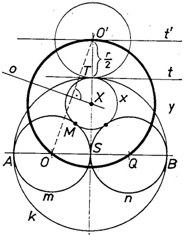
[41] . . . snadné.

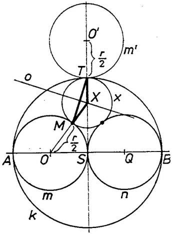
Poznámka

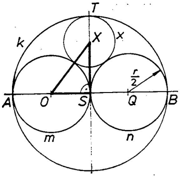
Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:[42]











atd.

[42] např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

Osová souměrnost

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o.[43]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$AA_o = A_oA',$$

kde $A_o =$ průsečík AA' s osou o.

Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou samodružných bodů, základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

[43] tzv. *osa*

Definice

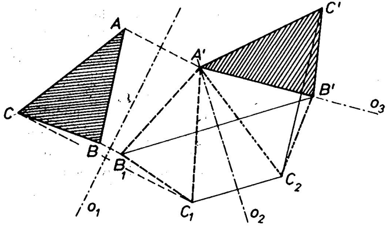
Shodné zobrazení zobrazuje každou úsečku na úsečku s ní shodnou.

Tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:



. . . proto je osová souměrnost *základní* shodností v rovině.

Klasifikace v rovině

Odtud klasifikace shodností v rovině:

(a) *identita* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 = o_2$,

(b) *posunutí* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \| o_2$,

(c) *otáčení* $=$ složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,

(d) *středová souměrnost* $=$ složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \perp o_2$,

(e) *osová souměrnost* $=$ jedna os. soum.,

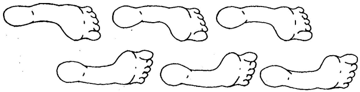
(f) *posunutá souměrnost* $=$ složení tří obecných os. soum.

Poznámky

Shodnost s přímkou samodružných bodů je právě osová souměrnost (e).

Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci),
shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:



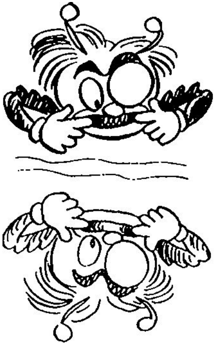
Poznámky

Obdobné úvahy platí pro shodnosti v prostoru (dim 3), resp. na přímce (dim 1). . .

Např. 3-rozměrnou analogií osové souměrnosti je souměrnost podle roviny aneb *zrcadlení*.

Každé shodné zobrazení:

- zachovává vzdálenosti bodů (definice),
- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává odchylky přímek,
- zachovává obsahy, resp. objemy,
- je prosté (tj. injektivní).



Souměrnosti jsou všude. . .

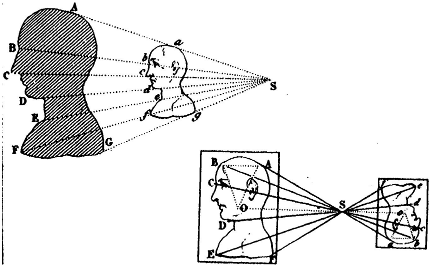
Stejnolehlost aneb škálování

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k.[44]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží přímce SA, a to tak, že

$$\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}, \quad \text{neboli} \quad A' = S + k \cdot \overrightarrow{SA}.$$



Jaké má vlastnosti? Transformace se samodružným bodem, základní podobnost, v rovině přímá transformace, . . .

[44]tzv. *střed* a *koeficient* = poměr škálování

Speciální a mezní případy

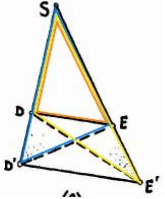
Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- *identita*, pokud $k = 1$,
- *středová souměrnost*, pokud $k = -1$.

Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- *zobrazení do jednoho bodu*.

Základní vlastnosti a skládání stejnolehlostí



Základní poznatek je na s. 43!

Zejména, každá stejnolehlost je

- podobné zobrazení, které
- každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.

Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

Složení dvou stejnolehlostí se středy S_1, resp. S_2 a koeficienty k_1, resp. k_2 je:

(a) *identita, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,*

(b) *posunutí, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,*[45]

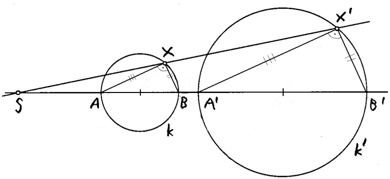
(c) *obecná stejnolehlost, právě když $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.*[46]

---

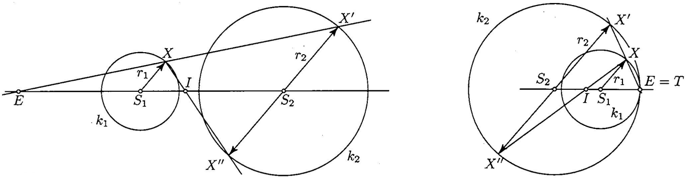
[45] Vektor posunutí je pak násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1 S_2}$.

[46] Pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnolehlosti nutně leží na přímce $S_1 S_2$.

Stejnolehlý obraz kružnice

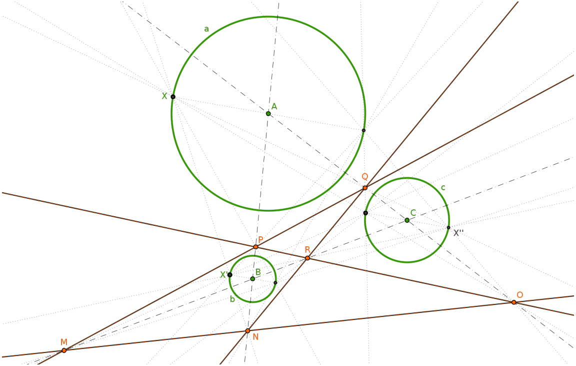


Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice.



Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, a to dvojím způsobem.

Jako důsledek předchozích poznatků pro zajímavost uvádíme:



Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou čtyři kolineární trojice.

Obecná podobná zobrazení

Definice

Podobné zobrazení zachová poměry vzdáleností.

Tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = \mathbf{konst} \cdot |AB|.$$

Tato **konst.** je tzv. *koeficient podobnosti* a je to kladné reálné číslo.

Věta

Každé podobné zobrazení je složením nějaké shodnosti a stejnolehlosti.

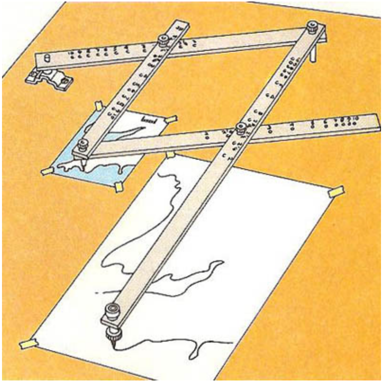
. . . proto je stejnolehlost *základní* podobností.

Poznámky

Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).

Každé podobné zobrazení:

- zachovává poměry vzdáleností (definice),
- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává odchylky přímek,
- obsahy se mění k^2-krát, resp. objemy se mění k^3-krát,
- je prosté (tj. injektivní).



Pantograf[47]

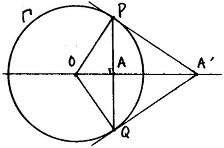
[47] http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph

Co to je? Transformace roviny vyjma jednoho bodu, ozn. O.[48]

Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r.[49]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA, a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2, \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí samodružných bodů, základní konformní transformace v rovině, nepřímá, …

[48]tzv. *střed kruhové inverze*
[49]tzv. *řídící kružnice*

Zřejmé vlastnosti[50]

(a) *Kruhová inverze je involutivní transformace.*

(b) *Všechny body na řídící kružnici jsou samodružné.*

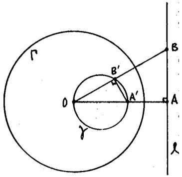
(c) *Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*

(d) *Každá přímka procházející středem inverze je samodružná; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a*

$$\lim_{X\to\infty} X' = O, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{X\to O} X' = \infty.$$

[50] https://ggbm.at/Zxal0Fay

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*



Důkaz.

Předp. $OA \perp \ell$, $A' =$ obraz A vzhledem ke Γ, $\gamma =$ kružnice s průměrem OA'.

Dokážeme, že $\gamma = \ell'$, tj. pro $B \in \ell$ lib. a $B' = OB \cap \gamma$ dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ:

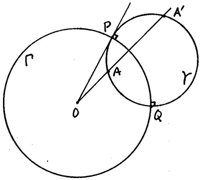
Thaletova věta $\implies$ úhel $OB'A'$ je pravý $\implies$ trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou podobné $\implies$

$$OB' : OA = OA' : OB, \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ, takže B a B' taky:

$$\underline{OB' \cdot OB} = OA' \cdot OA = \underline{r^2}. \qquad \square$$

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.



Důkaz.

Kružnice γ protíná řídící kružnici Γ kolmo[51]

$\Longleftrightarrow$ poloměr OP je tečnou ke kružnici γ

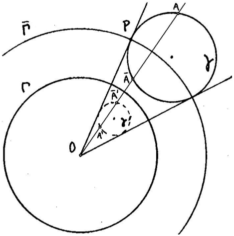
$\Longleftrightarrow$ pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí[52]

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$$

$\Longleftrightarrow$ body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ. □

[51] tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé
[52] podle věty o mocnosti bodu ke kružnici (s. 25)

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*



Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je stejnolehlost:[53]

Ozn. $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

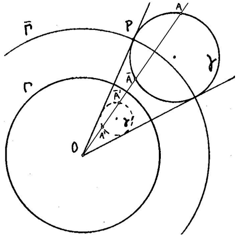
$$OA \cdot O\bar{A} = \bar{r}^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = r^2.$$

Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = r^2 : \bar{r}^2 = \textbf{konst.}, \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \textbf{konst} \cdot OA. \qquad \square$$

[53]. . . zbytek je jasný: vzhledem ke $\bar{\Gamma}$ se γ zobrazuje na sebe (s. 100), tedy na kružnici, a stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice (s. 92). Proto i obraz γ vzhledem ke Γ musí být kružnice.

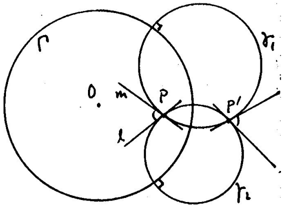
Při stejnolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ zobrazuje na střed γ'.



Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ **nezobrazuje** na střed γ'!

(Viz obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma}$...)

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*[54]



Důkaz.

Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě P = odchylka jejich tečen m a ℓ.

Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.

Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2, které jsou kolmé k řídící kružnici Γ!

Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují samy do sebe, obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic a odchylka v bodě P je stejná jako odchylka v bodě P'. □

[54] Tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Poznámky

Každé podobné zobrazení je konformní.

Každé konformní zobrazení v rovině je složením shodných zobrazení a kruhových inverzí.[55]

…proto je kruhová inverze *základním* konformním zobrazením v rovině.

Limitním případem kruhové inverze je osová souměrnost (pro $r \to \infty$).

3-rozměrnou analogií kruhové inverze je kulová inverze…

Kruhová inverze (a obecné konformní zobrazení):

- **ne**zachovává vzdálenosti ani poměry vzdáleností,
- **ne**zobrazuje přímky na přímky,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- ale zachovává odchylky protínajících se křivek,
- je prosté (tj. injektivní).

[55] V důkaze na s. 101 jsme se naučili, že složením dvou kruhových inverzí se společným středem je stejnolehlost, tedy základní podobnost.

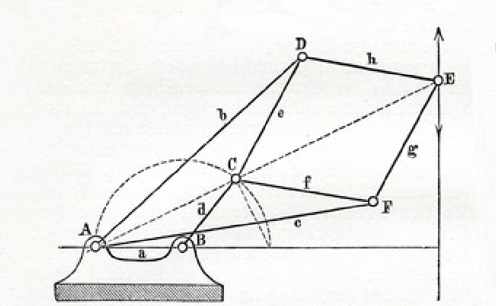


Fig. 1. Gerabführung von Peaucellier.

Peaucellierův–Lipkinův mechanizmus převádí přímočarý pohyb na otáčivý a naopak. . . [56]

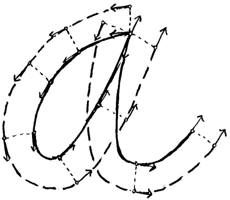
[56] http://en.wikipedia.org/wiki/Peaucellier%E2%80%93Lipkin_linkage

Dilatace jakožto příklad **kontaktního** zobrazení[58]

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.[57]

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ.

Jak je určena? Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem $\boldsymbol{v}$ je reprezentován vektorem $\boldsymbol{v}'$, který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k $\boldsymbol{v}$, a to na správnou stranu v závislosti na orientaci...



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 67, s. 71, **s. 77**, ...)!

[57] Nemá smysl mluvit o obrazu bodu, pouze o (orientovaných) *dotykových*, neboli *kontaktních elementech*. Ty jsou reprezentovány přímkami (polopřímkami, resp. vektory)...

[58] Všechna ostatní zobrazení v tomto kurzu jsou **bodová**!

Osová afinita aneb škálování v jednom směru

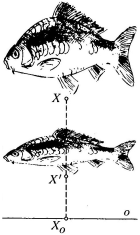
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a nenulovým reálným číslem m.[59]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce se směrem $\boldsymbol{s}$, a to tak, že

$$\overrightarrow{A'A_o} = m \cdot \overrightarrow{AA_o},$$

kde A_o = průsečík AA' s osou o.



Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou samodružných bodů, základní afinní transformace v rovině, přímá/nepřímá podle znaménka m, ...

[59] tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:[60]

- *osová souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\boldsymbol{s} \perp o$,
- *šikmá souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\boldsymbol{s} \not\perp o$,
- *elace* aneb *naklonění*, pokud $\boldsymbol{s} \| o$ ($\Longrightarrow m = 1$),

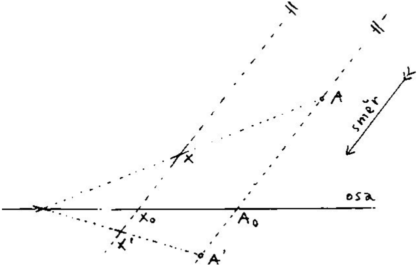
   

Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- *rovnoběžné promítání* do přímky o ve směru $\boldsymbol{s}$.

[60] $m = -1 \iff$ involuce

Obecná osová afinita:



(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,[61]

(c) zachovává rovnoběžnost přímek.

Důkaz.

Variace na podobné trojúhelníky. . . □

[61] tzv. *dělicí poměry* bodů

Obecná afinní zobrazení

Definice

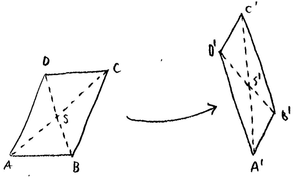
Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) ze s. 109.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita* (viz osová afinita).[62]

Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmá souměrnost nebo elace).

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní. . .



[62] Afinní zobrazení nemusí být prosté (viz *rovnoběžné promítání*)!

Obecná afinní zobrazení

Analogicky k tvrzení na s. 85 máme:

Věta

Každá afinita v rovině je složením nejvýše tří osových afinit.

. . . proto je osová afinita *základní* afinitou v rovině.

Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit. . .

Poznámky

K vyjádření neinjektivních zobrazení potřebujeme také rovnoběžná promítání. . .

Afinní zobrazení v rovině s přímkou samodružných bodů je právě osová afinita nebo rovnoběžné promítání do přímky.

O určenosti afinního zobrazení

Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy dvou různých bodů...

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze...

Věta

Prosté[63] *afinní zobrazení prostoru dimenze* n *je jednoznačně určeno obrazy* $n+1$ *bodů v obecné poloze.*

Důkaz.

Konstruktivní — pomocí rovnoběžek a přenášení dělicích poměrů...[64] □

[63] resp. „ne příliš degenerované"...
[64] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

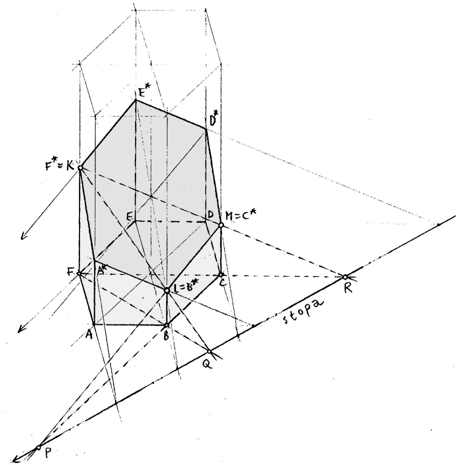
3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s rovinou samodružných bodů...

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je rovnoběžné promítání do roviny...[65]

Obecné afinní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- **nemusí** být prosté (tj. injektivní).

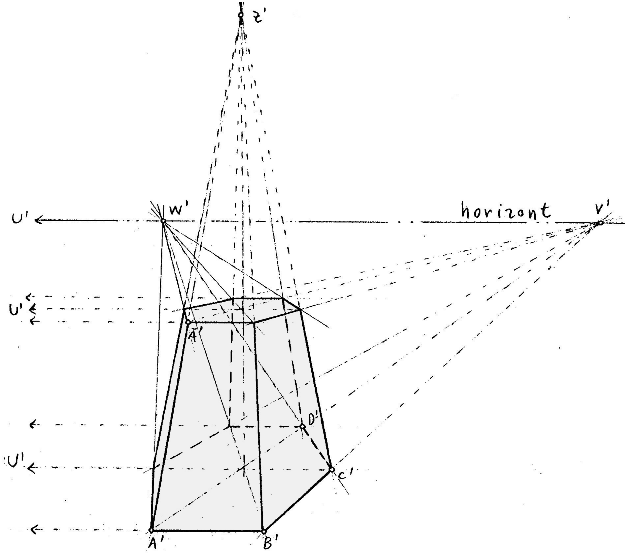
[65]...viz dále!



Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou *KLM*.[66]

[66] Mezi změtí bodů v rovině můřeme vidět několik známých korespondencí: posunutí, osová afinita, ...

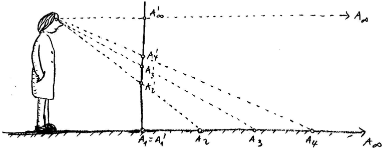
Ale …



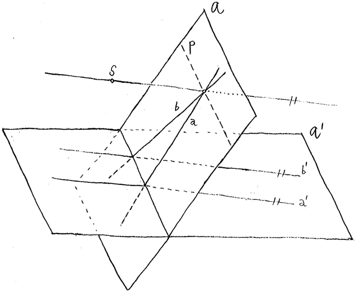
… realitu vnímáme jinak!

Středové promítání aneb projekce

Typické projektivní zobrazení je *středové promítání*...



...při tomto zobrazení některé body nemají vzor, některé nemají obraz...

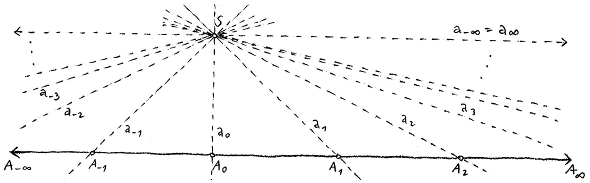


...resp. se jedná o „body v nekonečnu“; o tyto prvky náš prostor rozšíříme...

Projektivní přímka/rovina/prostor je eukleidovská přímka/rovina/prostor rozšířená o „body v nekonečnu“.

Body v nekonečnu jmenujeme *nevlastní*, ostatní pak *vlastní*.

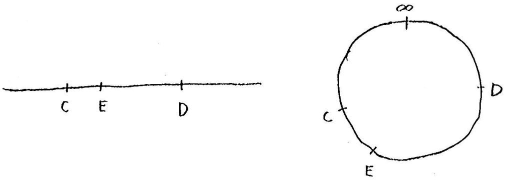
Přesnější vymezení pomocí následujícího základního projektivního triku:



- Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má **právě jeden** nevlastní bod.
- Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má přímku nevlastních bodů apod.
- Každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají.[67]

[67] Rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě, různoběžky ve vlastním.

- Projektivní přímka je uzavřená.
- Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.
- Uspořádání bodů na projektivní přímce nemá valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB\,C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB\,C) : (AB\,D)$; značíme a zapisujeme takto:

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Poznámky

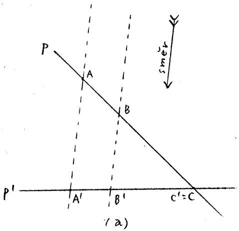
Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{D\to\infty}(AB\,D) = 1$, platí $\lim\limits_{D\to\infty}(AB\,CD) = (AB\,C)$; stručně

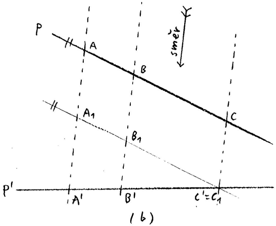
$$(AB\,CD_\infty) = (AB\,C).$$

Známe

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.[68]





Důkaz.

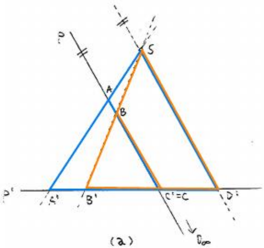
(a) Spec. případ plyne z podobnosti trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 43).

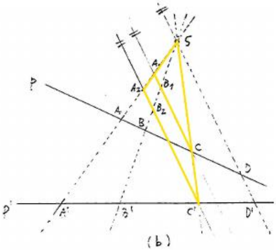
(b) Obecný případ plyne z (a) a shodností protilehlých stran v rovnoběžnících. □

[68] . . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Věta (Pappova)

Při <u>středovém</u> promítání se zachovávají <u>dvojpoměry</u> čtveřic kolineárních bodů.[69]





Důkaz.

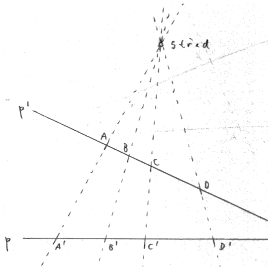
(a) Spec. případ plyne z podobností dvojic barevně rozlišených trojúhelníků, jedné úpravy a vztahu $(AB\,C) = (AB\,CD_\infty)$...

(b) Obecný případ plyne z (a) a podobnosti dvojice žlutých trojúhelníků...

□

[69]...pokud se různé body zobrazí na různé body.

Středové promítání mezi projektivními prostory:

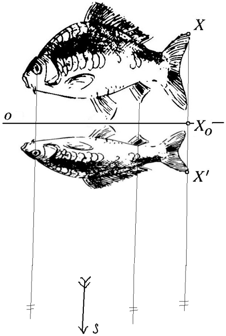


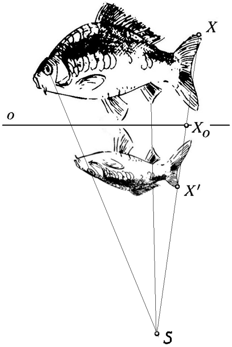
(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[70]

[70]. . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Posledním zobecněním do sbírky základních transformací v rovině[71] je tzv. *osová kolineace*:





[71] s. 84, 89, 107

Osová kolineace aneb nejzákladnější transformace v rovině

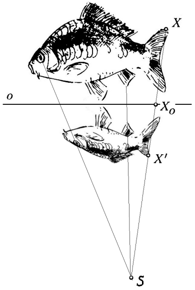
Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o, bodem S a nenulovým reálným číslem m.[72]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA, a to tak, že

$$(A'A\,A_oS) = m,$$

kde A_o = průsečík AA' s osou o a $(A'A\,A_oS)$ = **dvojpoměr**.



Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou samodružných bodů, základní projektivní transformace v rovině, ...

[72]tzv. *osa*, *střed* a *modul*

Speciální a mezní případy

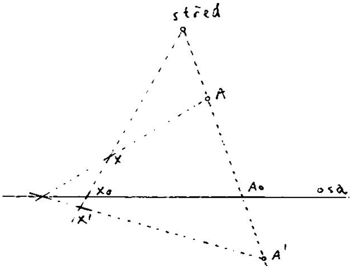
Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- *osová afinita*, pokud $S =$ nevlastní,
- *stejnolehlost*, pokud $o =$ nevlastní,
- *posunutí*, pokud S i o jsou nevlastní.

Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případy:

- *středové promítání* do přímky o z bodu S.
- *rovnoběžné promítání* do přímky o, pokud $S =$ nevlastní.

Obecná osová kolineace:



(a) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(b) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.

Důkaz.

Plyne z definice a z Pappovy věty... □

Další projektivní zobrazení

Definice

Obecné *projektivni* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) ze s. 126, resp. 122.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace* (viz osová kolineace).[73]

Poznámky

Z (a) a (b) plyne, že prosté projektivní zobrazení

(c) zobrazuje projektivní přímky na projektivní přímky.[74]

Ve skutečnosti platí, že (c) $\Longrightarrow$ (b)...[75]

---

[73] Projektivní zobrazení nemusí být prosté (viz středové promítání).

[74] ...tedy nikoli např. na úsečky nebo jiné části přímek.

[75] ...viz **základní větu projektivní geometrie** (příští semestr)!

Analogicky k tvrzení na s. 111 máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše tří osových kolineací.

. . . proto je osová kolineace *základní* kolineací v rovině.

Poznámky

K vyjádření neinjektivních zobrazení potřebujeme také středová promítání. . .

Projektivní zobrazení v rovině s přímkou samodružných bodů je právě osová kolineace nebo středové promítání do přímky. . . [76]

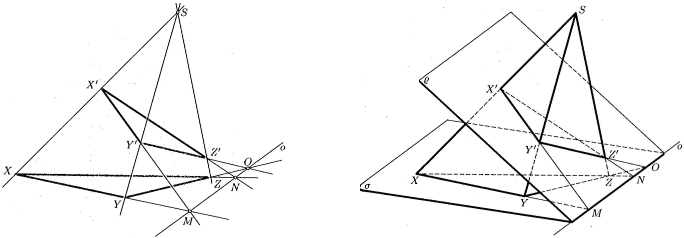
[76] . . . viz Desarguesovu větu

Desarguesova věta

Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí:

přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

Neboli

Pro transformaci $X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$, $Z \mapsto Z'$ v projektivní rovině platí:

transformace má osu $\iff$ má střed.

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy tří různých bodů,
tedy např. obrazy dvou různých vlastních bodů a jedním úběžníkem...

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy čtyř bodů v „dostatečně obecné" poloze
nebo obrazy tří vlastních bodů v obecné poloze a dvěma odpovídajími úběžníky...

Věta

Prosté[77] *projektivní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy $n+1$ vlastních bodů v obecné poloze a n odpovídajícími úběžníky.*

Důkaz.

Konstruktivní — pomocí přenášení dvojpoměrů...[78] □

[77] resp. „ne příliš degenerované"...
[78] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Poznámky

Každé afinní zobrazení je projektivní.

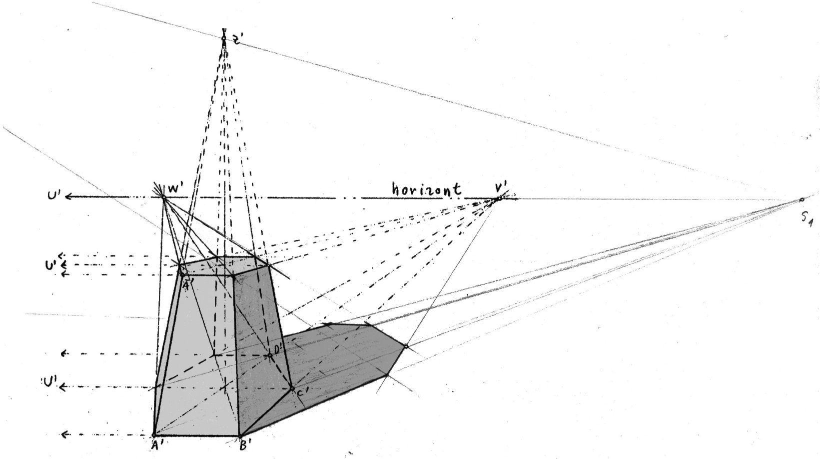
3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s rovinou samodružných bodů...

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je středové promítání do roviny...[79]

Obecné projektivní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- **ne**zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- **ne**zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- **nemusí** být prosté (tj. injektivní).

[79] ...viz dále!



Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín.[80]

[80]Mezi změtí bodů v rovině můřeme vidět několik známých korespondencí: osová kolineace, osová kolineace, osová kolineace, . . .

Přehled základních transformací v rovině

Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo:[81]

- *osu* = přímku samodružných bodů,
- *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je samodružná.

Z Desarguesovy věty (s. 129): transformace má osu $\iff$ má střed!

[81] http://tube.geogebra.org/student/m1073959

Přehled základních transformací v rovině

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	(středové promítání do přímky)
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	harmonická souměrnost
		ne	jinak	**osová kolineace**
nevlastní	vlastní	ne	0	(rovnoběžné promítání do přímky)
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	identita
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Transformace je involutivní $\iff$ modul $= -1$.

Degenerované případy $\iff$ modul $= 0$.

Pro afinní transformace:

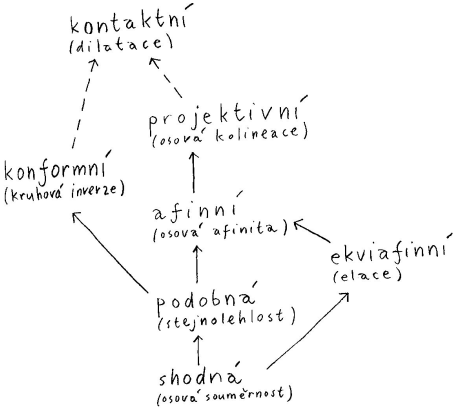
- přímá $\iff$ modul > 0,
- nepřímá $\iff$ modul < 0.

Přehled typů zobrazení a jejich vlastností

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	−	−	+	−	−	−
afinní	+	−	+	+	+	−	−
ekviafinní	+	−	+	+	+	+	−
podobná	+	−	+	+	+	−	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	−	−	−	−	−	−	+

- Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.
- Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.
- Konformní zobrazení, které je projektivní, je podobné.
- Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.

Hierarchie zobrazení



Úvodní přehled

Co chceme? Názorné a korektní 2D obrazy 3D objektů[82]
a rekonstrukce skutečných 3D vztahů z 2D obrazů.

V jakém rámci? V rámci projektivních zobrazení:

$$\text{přímky} \longmapsto \text{přímky, resp. body.}$$

Jak dělíme? Podle způsobu promítání $\begin{cases} \text{středové} \\ \text{rovnoběžné} \begin{cases} \text{šikmé} \\ \text{kolmé} \end{cases} \end{cases}$

Podle způsobu zadání $\begin{cases} \text{volné} \\ \text{vázané} \end{cases}$

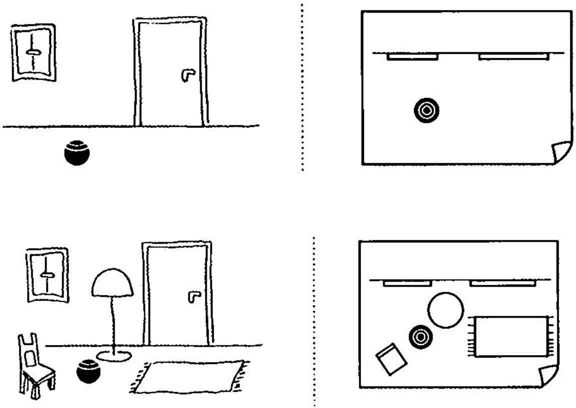
Základní úlohy? Pro volné průměty:
(1) přenášení poměrů/dvojpoměrů.

Pro vázané průměty:
(2) průnik přímky a roviny,
(3) vzdálenost dvou bodů.

[82]. . . taková zobrazení jsou vždy degenerovaná (**ne**prostá)!

Motivace

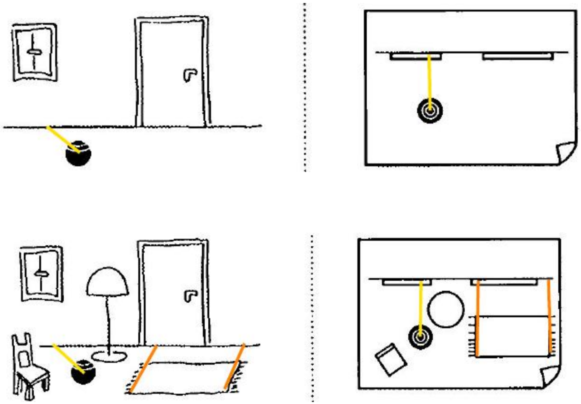
Korespondence mezi obecným a kolmým průmětem (půdorysem):



Je všechno OK?

Motivace

Korespondence mezi obecným a kolmým průmětem (půdorysem):

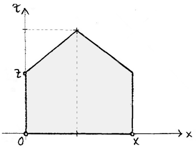


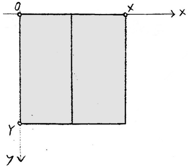
Není, *ale umíme napravit!*

Bod v prostoru

Bod v 3D prostoru je jednoznačně určen

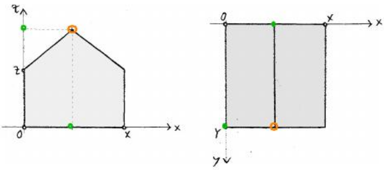
- souřadnicemi $A = (x_A, y_A, z_A)$[83] $\rightsquigarrow$ výpočty,
- půdorysem $A_1 = (x_A, y_A)$ a kótou (= souřadnicí z_A) $\rightsquigarrow$ mapy,
- půdorysem $A_1 = (x_A, y_A)$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|z_A|$ a orientací podle znaménka z_A) $\rightsquigarrow$ cyklografie,
- půdorysem $A_1 = (x_A, y_A)$ a nárysem $A_2 = (x_A, z_A)$ $\rightsquigarrow$ **!!!**



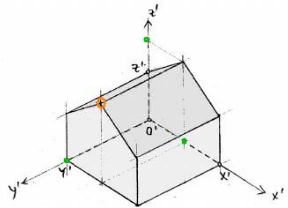


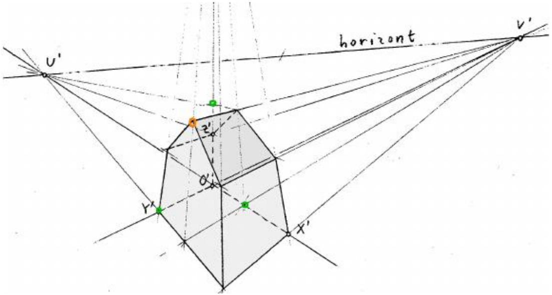
[83] . . . vzhledem k nějaké kartézské souřadné soustavě

Volný průmět (známe)



Volné (rovnoběžné, resp středové) promítání je určeno obrazy několika málo bodů (viz s. 112, resp. s. 130)...[84]





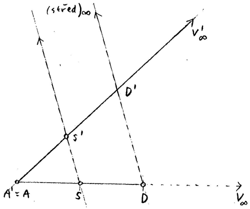
[84] https://ggbm.at/yWcCaQeA

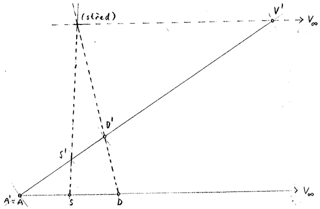
Rovnoběžné, resp. středové promítání je speciální (základní) afinní, resp. projektivní zobrazení.

Proto obrazy určujících bodů nemohou být úplně libovolné...

V předchozím opakovaně potřebujeme **základní konstrukci**:

(1) přenášení dělicího poměru, příp. dvojpoměru





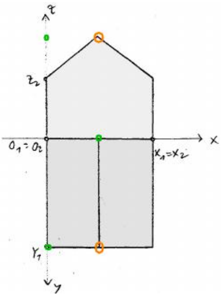
Základní slabina této metody:

Jak sestrojit obraz bodu v souřadné rovině, která se zobrazuje do přímky?[85]

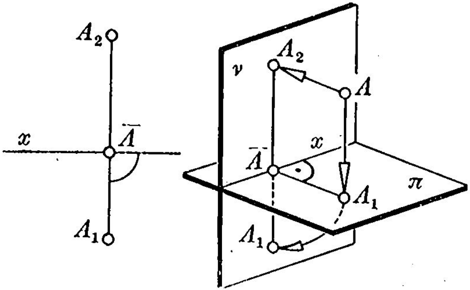
[85] (řešení na s. 148)

(Mongeovy) sdružené průměty

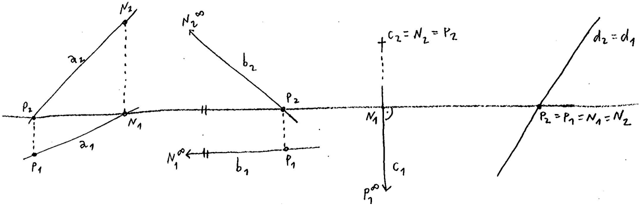
= kolmé průměty do dvou souřadných rovin (půdorys a nárys jako na s. 142), avšak sdruženy vzhledem ke společné souřadnici (x)

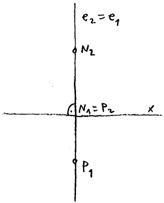


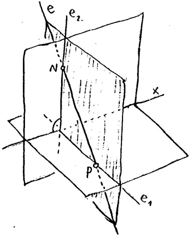
Bod



Bod v prostoru je určen sdruženými průměty.

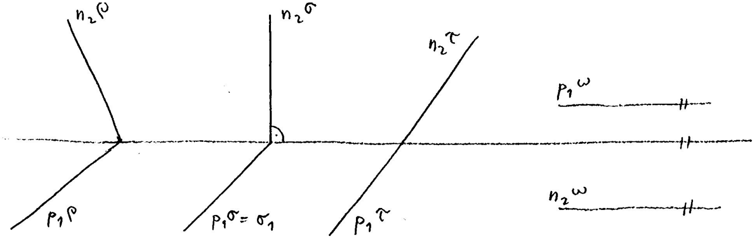






Přímka v prostoru je určena sdruženými průměty, příp. *stopníky*.[86]

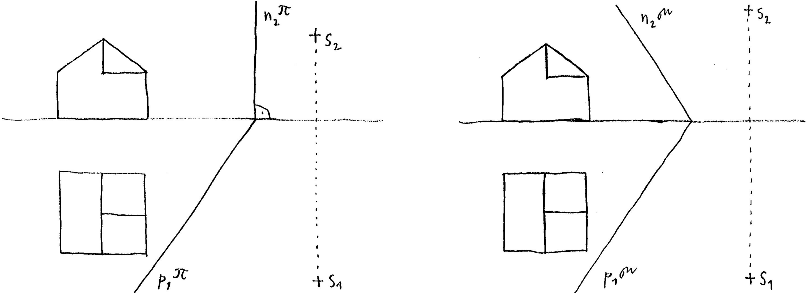
[86] https://ggbm.at/TxNch9AB



Rovina je (skoro vždy) určena svými *stopami*.

Vázaný průmět

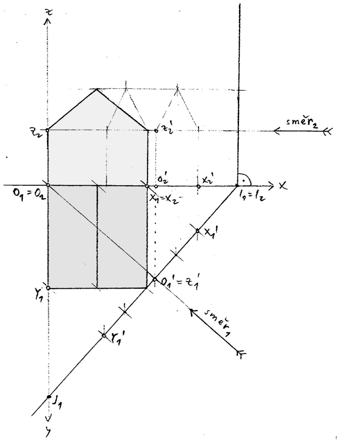
Vázané (rovnoběžné, resp středové) promítání je určeno přesným vymezením průmětny a směru, resp. středu promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.[87]

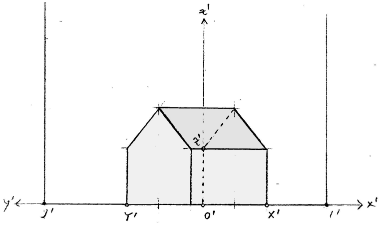


[87] http://ggbtu.be/mZvlO63hi

Velmi speciální případ

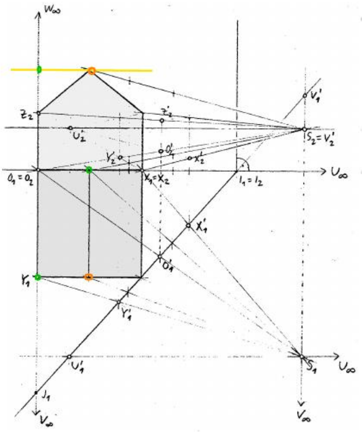
Průmětna kolmá k půdorysně, směr promítání rovnoběžný s půdorysnou:[88]

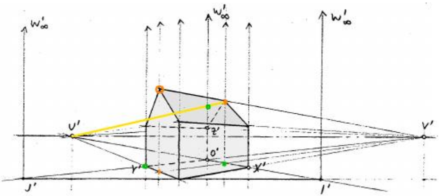




[88] sr. s problémem na s. 143

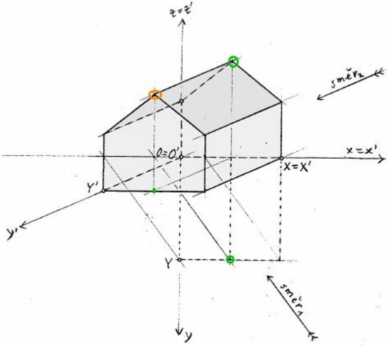
Průmětna kolmá k půdorysně, střed promítání libovolně:[89]



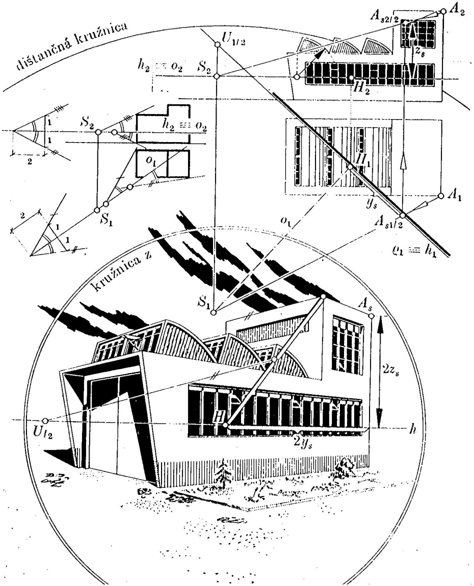


[89] viz též s. 152

Průmětnou je nárysna, směr promítání obecný:[90]



[90]tzv. *kosoúhlé promítání*



distančná kružnica
kružnica z
$U_{1/2}$
$h_2 \equiv o_2$
S_2
H_2
$A_{s2/2}$
A_2
z_s
o_1
H_1
A_1
y_s
S_1
$A_{s1/2}$
$e_1 \equiv h_1$
A_s
$2z_s$
H
$U_{1/2}$
$2y_s$
h

Obecný případ?

V předchozím opakovaně potřebujeme **základní konstrukce**:

(2) průnik přímky a roviny,

(3) vzdálenost dvou bodů,

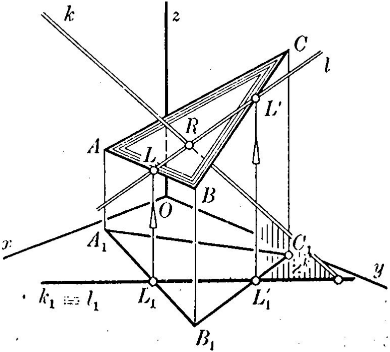
avšak ve velmi speciální podobně.

Jak se tyto úlohy řeší obecně?

Základní konstrukce na s. 154 a 156, vychytávky od s. 158...

Průnik přímky a roviny

Průnik (resp. vzájemná poloha) přímky k a roviny $\alpha = ABC$:



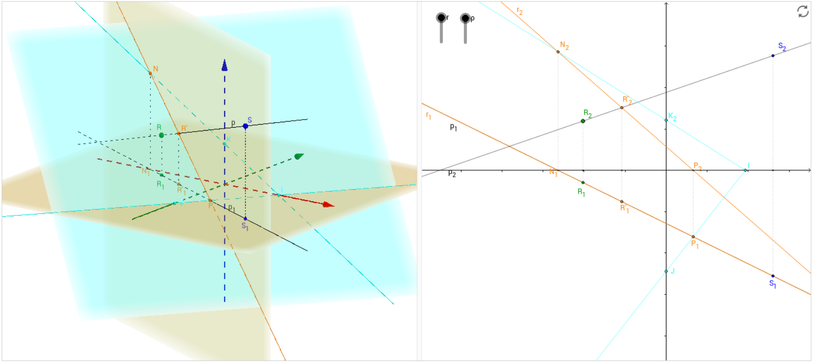
Průnik $R := k \cap \alpha$ je průnikem přímek k a l ležících v pomocné (svislé) rovině![91]

Přesněji: (a) zvolíme pomocnou rovinu obsahující k, (b) $l :=$ průsečnice zadané a pomocné roviny, (c) $R = k \cap l$.

[91] Pokud náhodou $k \| l$, potom $k \| \alpha$; pokud $k = l$, potom $k \subset \alpha$.

Průnik přímky a roviny

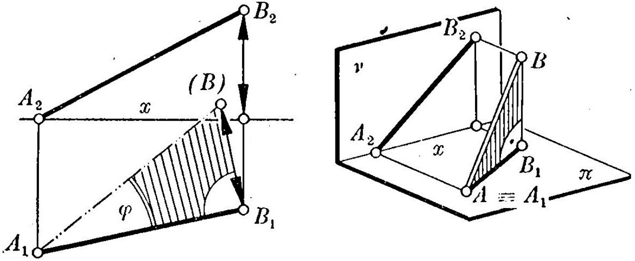
Průnik (resp. vzájemná poloha) $p = PQ$ a roviny $\beta = KLM$:[92]



Stejná myšlenka jako na s. 154, ovšem realizovaná pomocí stop roviny β...

92 https://ggbm.at/JgQu6PVN

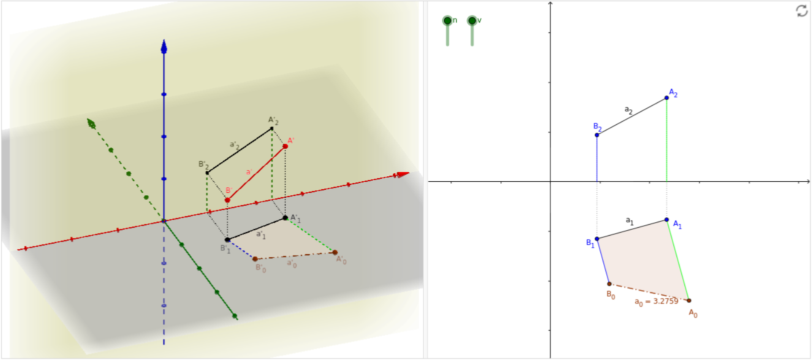
Vzdálenost bodů A a B:



Úsečka se zobrazuje nezkresleně v nárysu (resp. půdorysu) právě tehdy, když je rovnoběžná s půdorysnou (resp. nárysnou).

Tedy: skutečná velikost úsečky AB je rovna velikosti přepony v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny vidíme nezkresleně v nárysu, resp. v půdorysu!

Vzdálenost bodů A a B:[93]

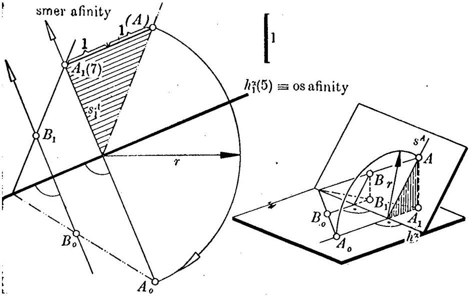


Stejná myšlenka jako na s. 156. . .

93 `https://ggbm.at/vpnVx35C`

Otočení obecné roviny do průmětny

Při měření vztahů mezi více body v jedné rovině je výhodné otočit celou rovinu kolem stopy do průmětny:



Konstrukčně úplně stačí:

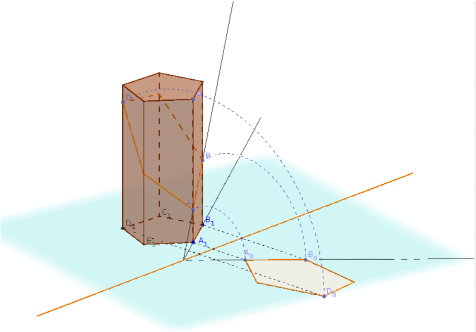
(1) otočit jeden bod: $A \mapsto A_0$ (viz s. 156),

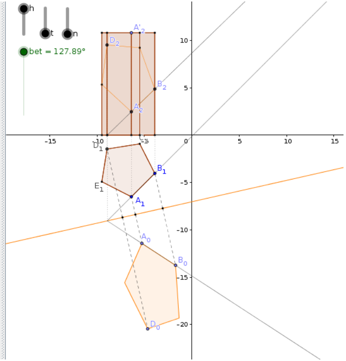
(2) všimnout si a využít osové afinity $A_1 \mapsto A_0$![94]

[94]Přesněji: (a) $B_0A_0 \cap B_1A_1 \in$ stopě (= osa), (b) $B_0B_1 \| A_0A_1$ (= směr, kolmý k ose).

Otočení obecné roviny do průmětny

Otočení roviny řezu do půdorysné průmětny:[95]





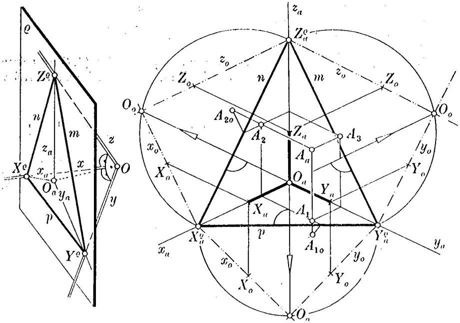
Stejná myšlenka jako na s. 158...

[95] https://ggbm.at/BMchamKj

Otočení průmětny do obecné roviny

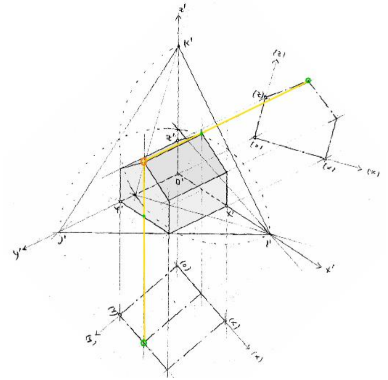
Pro obecné vázané průměty lze předchozí myšlenku s otáčením použít také naopak.

Např. při <u>kolmém</u> promítání do obecné roviny a otočení Mongeových průměten do této roviny pozorujeme. . .



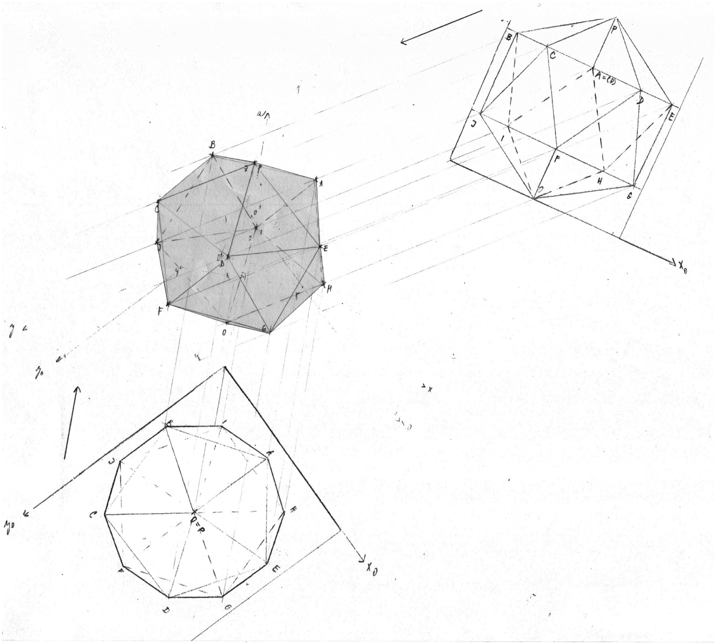
. . . tedy několik <u>osových afinit</u> (osa = stopa, směr $\perp$ ose)!

Tato pozorování jsou základem velice účinné metody...



..., bleskurychlé korespondence mezi Mongeovými „oddruženými" průměty a kolmým průmětem do obecné roviny.[96]

[96] http://is.muni.cz/el/1441/jaro2018/MA2BP_PKG/um/dum_zarez.pdf



Úvod

- primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- axiómy vyslovené, nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

Planimetrie

- základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Pythagorova věta)
- geometrická algebra (zlatý řez)
- o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, . . .)
- teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

Sestrojitelné veličiny

- úplná chakterizace ($+ \; - \; \cdot \; : \; \sqrt{\ }$)
- slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

Stereometrie

- rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- analogie, resp. rozdíly k 2D (rovnoběžnostěny, resp. jehlany)
- pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20)

Dotykové úlohy

- základní úlohy (tečny)
- základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnolehlost, dilatace)
- základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

Užitek

- kvadratura mnohoúhelníku
- kvadratické rovnice a jejich řešení
- pravidelný 5úhelník apod.
- specifické dotykové úlohy

Taxonomie

- hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní)
- další typy (konformní, kontaktní)
- příklady, obecné vlastnosti a hierarchie

Obecný rámec

- projektivní rozšíření
- Pappova věta
- věta o určenosti

Základní transformace

- regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

Zobrazovací metody 3D $\to$ 2D

- podle promítání: středové ($\Longrightarrow$ projektivní), rovnoběžné ($\Longrightarrow$ afinní)
- podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina)

Zadání

- kartézské souřadnice vs. Mongeovy sdružené průměty (půdorys, nárys)

Základní úlohy

- přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů
- průnik přímky a roviny
- skutečná velikost úsečky

Vychytávky

- otočení roviny
- zářezová metoda

Užitek

- obecná Apollóniova úloha
- obecné průměty pravidelných a jiných těles
- řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti

Organizační věci

Preference

(1) celkový přehled
(2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
(3) vlastní konstrukce a technické záležitosti

Konzultace

- individuálně podle domluvy[97]

Zkouška

- písemka: požaduji aspoň poloviční úspěšnost (termíny vypsány v IS)[98]
- ústní: probíhá nad písemkou (termíny budou vypisovány podle potřeby)

---

[97] od 4.6. do 8.6. nebudu k zastižení

[98] termíny lze využít i bez zápočtu ze cvičení; písemky opravím, až zápočet získáte

Literatura

[A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999

[EB] *The Elements of Euclid*, obrázkové vydání od O. Byrneho,
http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html

[EJ] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heatha,
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

[EV] *Eukleidés, Základy*, české vydání podle překladu F. Servíta s komentářem P. Vopěnky, O.P.S., 2008–12,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides_Servit.pdf

[H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

[K] F. Kuřina, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002

[K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

[M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962

[L] M. Lávička, *Syntetická geometrie*, Plzeň, 2007,
http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/SG/texty/sg_text.pdf

[P] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954

[Ř] O. Říha, *Konstrukční geometrie I, II*, Brno, 2002

[S] E. Simeonov, D. Mairinger, Ch. Schmid, *Mathematische Früherziehung, Lagen & Winkel*, von Oemis, 2010

[U] A. Urban, *Deskriptivní geometrie I, II*, SNTL, 1965

Obrázky