Irena Budínová

VSTUP DO ALGEBRY. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

ALGEBRA NA 2. STUPNI ZŠ

- Které učivo se probírá na 2. stupni ZŠ v rámci algebry?
  - Mnohočleny
  - Lomené výrazy
  - Rovnice a nerovnice
  - Soustavy rovnic
  - Funkce

ROZVOJ PŘED-ALGEBRAICKÉHO MYŠLENÍ

- Může (mělo by) probíhat od 1. stupně ZŠ:
- **Dočítací úlohy**
- Zakreslování **řetězců** u úloh typu „myslím si číslo“.

  Např.: *Myslím si číslo. Jestliže toto číslo vydělím pěti, přičtu 5 a tento součet vynásobím čtyřmi, dostanu 100. Které číslo si myslím?*
- Používání **řízeného experimentu** při řešení slovních úloh

ROZVOJ PŘED-ALGEBRAICKÉHO MYŠLENÍ

- **Grafické znázorňování** aritmetických vztahů ve slovních úlohách; např. **úsečkové modely**
  - Např.: *David a Michal měli dohromady 15 modelů autíček. Michal měl dvakrát tolik a ještě o tři více než David. Kolik autíček měl David?*
- **Úlohy s vahami**
- **Algebrogramy**

ŽÁKOVSKÉ STRATEGIE PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH

- Na 1. stupni žáci nejčastěji volí metodu pokusu a omylu

1. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 50. Když tato čísla odečteš, dostaneš 4. Která jsou to čísla?

$25 + 25 = 50$ $\quad$ $23 + 27 = 50$

$25 - 25 \neq 4$ $\quad$ $23 - 27 = 4$

$24 + 26 = 50$

$24 - 26 \neq 4$ $\quad$ 23 a 27

ŽÁKOVSKÉ STRATEGIE PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH

- Metoda od konce, která se objevuje méně často. Žák řeší úlohu: „Myslím si číslo, když k němu přičtu 7, výsledek vydělím třemi a toto číslo vynásobím 9, dostanu 45. Které číslo si myslím?“

$45 : 5 = 9$ $\quad$ $9 \cdot 3 = 27$ $\quad$ $27 - 7 = 20$

20

ŽÁKOVSKÉ STRATEGIE PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH

- Již na 1. stupni se můžeme setkat s algebraickým řešením. Všimněme si nezvládnuté gramatiky zápisu. (Žák řeší „myslím si číslo…“)

$X + 7 : 3 \cdot 5 = 45$ $\quad x = 20$

$45 : 5 \cdot 3 - 7 = X$

ÚLOHY S VELKÝMI ČÍSLY NA 2. ST. ZŠ

- Neexistuje transfer mezi metodou pokusu a omylu a algebraickým způsobem myšlení. Žákyně počítá úlohu: „Když dvě čísla sečteš, dostaneš 15, když odečteš od většího menší, dostaneš 3, metodou pokusu a omylu.“

$15 = 14 + 1$
$15 = 13 + 2$
$15 = 12 + 3$
$15 = 11 + 4$
$15 = 10 + 5$
$15 = 9 + 6$
$15 = 8 + 7$
$15 = 9 + 6$ ✓ jsou to čísla 9 a 6.

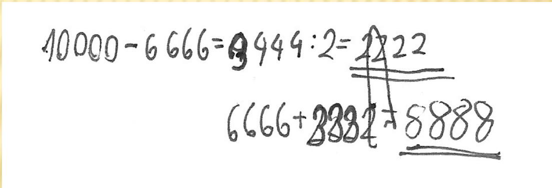
- Stejná žákyně (9. ročník) řeší analogickou úlohu s velkými čísly – sestaví soustavu rovnic, není ji schopna řešit.

$$x_1 + x_2 = 10\,000$$
$$x_1 - x_2 = 6666$$

- Žák 9. ročníku řeší úlohu pomocí logické úvahy. (Všimněme si implikačního způsobu zápisu.)

$$15 - 3 = 12 : 2 = \underline{6}$$
$$6 + 3 = \underline{9}$$

- Stejný žák používá stejnou úvahu na velká čísla, není schopen je odečíst a vydělit.
- Žáci naráží na mezery v aritmetických představách.



PROČ POTŘEBUJEME POČÍTAT S OBECNÝM VYJÁDŘENÍM A KDE SE S NÍM SETKÁME

- Ve školské matematice – zobecňování vztahů:
  - Vztahy pro výpočty obsahů, obvodů, povrchů a objemů geometrických útvarů;
  - V rovnicích;
  - Ve funkčních závislostech;
- V ostatních předmětech – fyzika, biologie, chemie;
- V běžném životě.

POUŽÍVÁNÍ PÍSMEN VE VÝZNAMU ČÍSEL

- Písmena mohou mít v matematice význam proměnné veličiny, konstanty, neznámé veličiny, nebo čísel, jejichž hodnotu nedokážeme vyjádřit – π, e, i.
- Učivu algebraické výrazy předchází číselné výrazy, žáci musí umět pracovat s mocninami, se zlomky.

VÝRAZY

- Číselné výrazy
- Výrazy s proměnnou
- Polynomy, úpravy polynomů
- Lomené výrazy
- Úkol: Algebraické výrazy – pro podprůměrné žáky, žáky s SPU, průměrné žáky, bystré žáky

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Zhruba od roku 2000 př. n. l. začíná **verbalistické období** – vztahy mezi čísly byly vyjadřovány slovně.
- Úloha z tohoto období (Egypt, Rhindův papyrus, 1650 př. n. l.): *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15. Jak velká je hromada?* Úloha byla řešena **metodou falešného předpokladu**.

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Kolem roku 500 př. n. l. nastává **geometrická algebra Řeků**.
- Úloha z tohoto období: *Obdélník, jehož jedna strana je o jednotku kratší než druhá strana, má obsah plochy 12 jednotek. Jak dlouhé strany?* Lze řešit aritmeticky, rozkladem na součin.

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- 250 př. n. l. Diofantos z Alexandrie –zahájil **synkopické období**: některé vztahy byly zapisovány větami, jiné speciálními symboly.
- Diofantův epitaf: *Zde tento náhrobek přikrývá Diofanta – zázrak na pohled! Aritmetickým uměním sděluje kámen jeho věk. Šestinu života popřál mu Bůh být chlapcem, když pak dvanáctina uplynula, nechal mu vyrašit vous. Ještě sedmina, tu rozžehl mu svatební pochodeň, a pět let nato mu dal synáčka. Běda nešťastné dítě! Dosáhlo teprve poloviny otcova věku, když přijal ho Hádes, ten strašný. Ještě čtyři roky snášel Diofantos bolest, žije vědě. A nyní řekni věk, kterého dosáhl.*

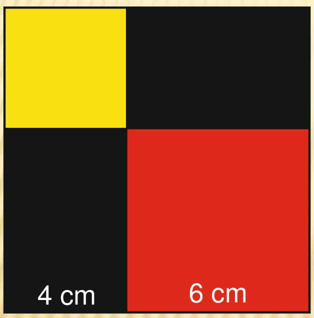
HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Nejvýznamnějším matematikem synkopického období byl Al Chovarizmi (9. st. n. l.). Spis Aljabr v'almukabala obsahuje nauku o rovnicích.
- 13. st. – Leonardo Pisánský používal písmena k označení čísel ve spisu Liber Abaci.
- Od 15. století začíná **období symbolické**
  - Francois Viéte ve spisu Logistica speciosa navrhuje označovat známé veličiny souhláskami, neznámé samohláskami.
  - René Descartes (17. st.) – zdokonalení symboliky

FORMÁLNÍ (AVŠAK NÁZORNÉ) ZAVÁDĚNÍ ALGEBRAICKÝCH VZORCŮ, ETAPA 2

- Třetí fáze práce s binomickou krychlí: předchází zavedení vzorců $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$ v devátém ročníku.
- Žáci nejdříve pracují se stěnou krychle a později s celou krychlí.
- Výhodná je práce se čtverečkovaným papírem

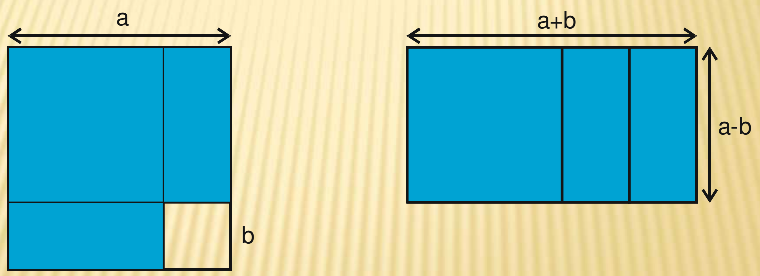
ALGEBRAICKÉ VROZCE



- Žákům může pomoci geometrická interpretace algebraických výrazů.
- Číslo ↔ délka úsečky, součin ↔ obsah obdélníku, kvadrát ↔ obsah čtverce, třetí mocnina ↔ objem krychle
- Odvození vzorce $(a+b)^2$ pomocí čtverce.

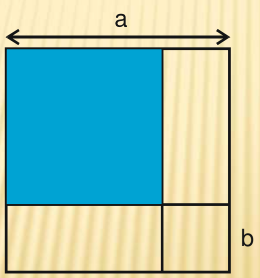
ODVOZOVÁNÍ DALŠÍCH ALGEBRAICKÝCH VZORCŮ POMOCÍ ČTVEREČKOVANÉHO PAPÍRU

- $a^2 - b^2$



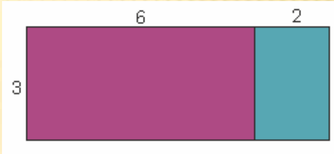
ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

- Nejvíce náročné je vytvořit geometrickou představu pro vzorec $(a-b)^2$.



ROZNÁSOBOVÁNÍ ZÁVOREK

- 3.(6+2)=3.6+3.2
- Zobecnění: a(b+c)=ab+ac



- (3+1).(6+2)=3.6+3.2+1.6+1.2
- Zobecnění: $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

- Po fázi **modelování** musí následovat fáze **zapamatování a fixace.**
- Pro efektivní fixaci mohou sloužit různé didaktické hry, jako např. práce s kartičkami:

$\boxed{a^2-b^2}$ $\boxed{(a+b)^2}$ $\boxed{(a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a-b)(a-b)}$ $\boxed{(a-b)^2}$

$\boxed{a^2-2ab+b^2}$ $\boxed{a^2+2ab+b^2}$

$\boxed{(a+b)(a+b)}$

ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

- Děti mohou mít i přes názorný úvod do algebry později problémy s interpretací algebraických výrazů. Stávají se jim potom chyby typu $a^2 + 2a = 3a^3$ apod. Těmto chybám lze předcházet dvěma způsoby:
  - opakovaně se vracet k dosazování číselných hodnot, např. $5^2 + 2 \cdot 5 = 5(5+2) = 5 \cdot 7 = 35$.
  - algebraickým zápisům přisuzovat **geometrický význam**, tj. **a** je úsečka, **a**^{2} je čtverec, **ab** je obdélník, **a**^{3} je krychle.

LITERATURA

- Balada, F. (1959). *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN
- Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H. (2003). *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus
- Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky2.* Bratislava: SPN