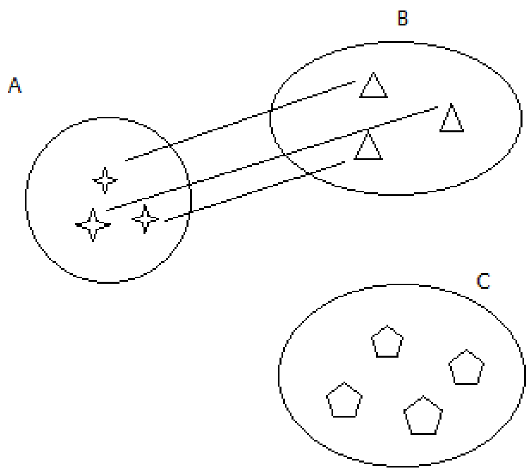
Ekvivalence množin

Důležitá pasáž textu:
Množiny **A**, **B** nazýváme ekvivalentní a píšeme **A** ~ **B**, právě když existuje prosté (vzájemně jednoznačné) zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

Řešený příklad 1:
Na obrázku jsou znázorněny množiny A, B, C. Určete, které z nich jsou navzájem ekvivalentní.



Řešení:
Mezi množinami **A**, **B** existuje prosté zobrazení množiny **A** na množinu **B**, resp. množiny B na množinu A (existuje vzájemně jednoznačné přiřazení A na B, resp. B na A).
Naproti tomu nelze sestrojit prosté zobrazení množiny **B** na množinu **C** a prosté zobrazení množiny **A** na množinu **C**, to znamená, že množiny A a C a B a C navzájem ekvivalentní nejsou.

Povšimněme si, že množiny A a B mají stejný počet prvků, množiny A a C, resp. B a C nemají stejný počet prvků. Jestliže dvě množiny mají stejný počet prvků, říkáme, že jsou navzájem **ekvivalentní**.

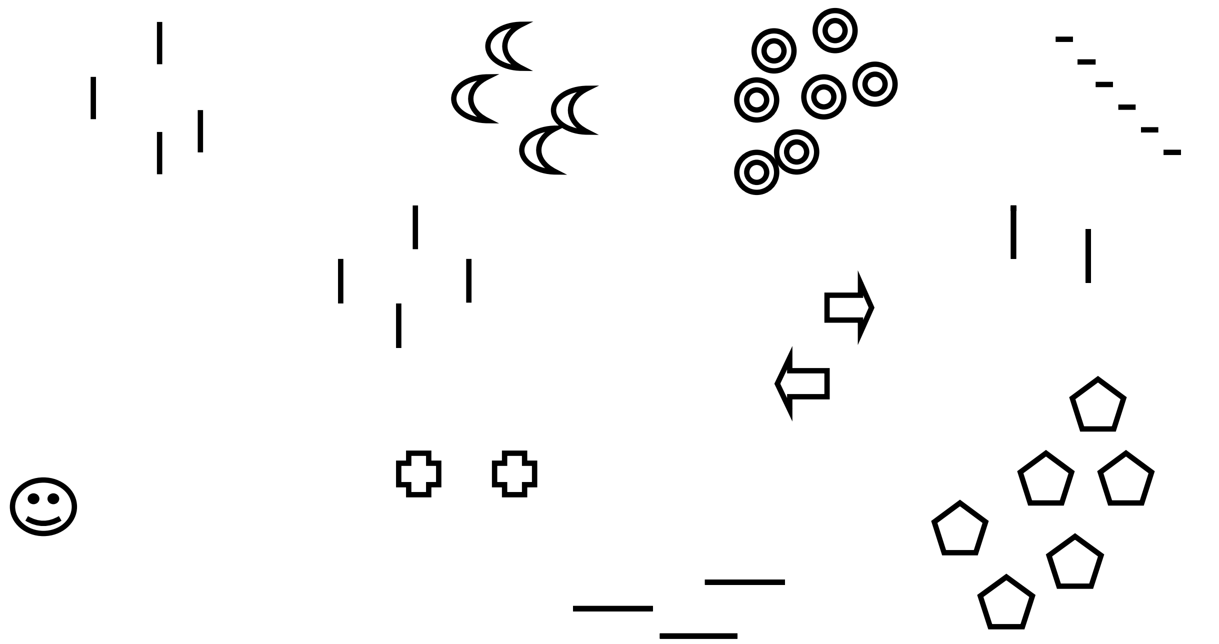
Relace **R** "být ekvivalentní mezi množinami" je relací **ekvivalence (**je reflexivní, symetrická a tranzitivní**)**. Proto k relaci **R** ~ přísluší rozklad systému množin **M** na třídy. V téže třídě rozkladu budou vždy právě všechny množiny, které jsou navzájem ekvivalentní, tj. mají **stejný počet prvků**. Každou třídu rozkladu nazveme **kardinální číslo**.

Řešený příklad 2:
Jsou dány množiny:
A - množina dětských hrdinů knihy Bylo nás pět
B - množina vrcholů pětiúhelníka
C - množina okvětních lístků jabloňového květu
Přesvědčte se, že množiny jsou navzájem ekvivalentní.

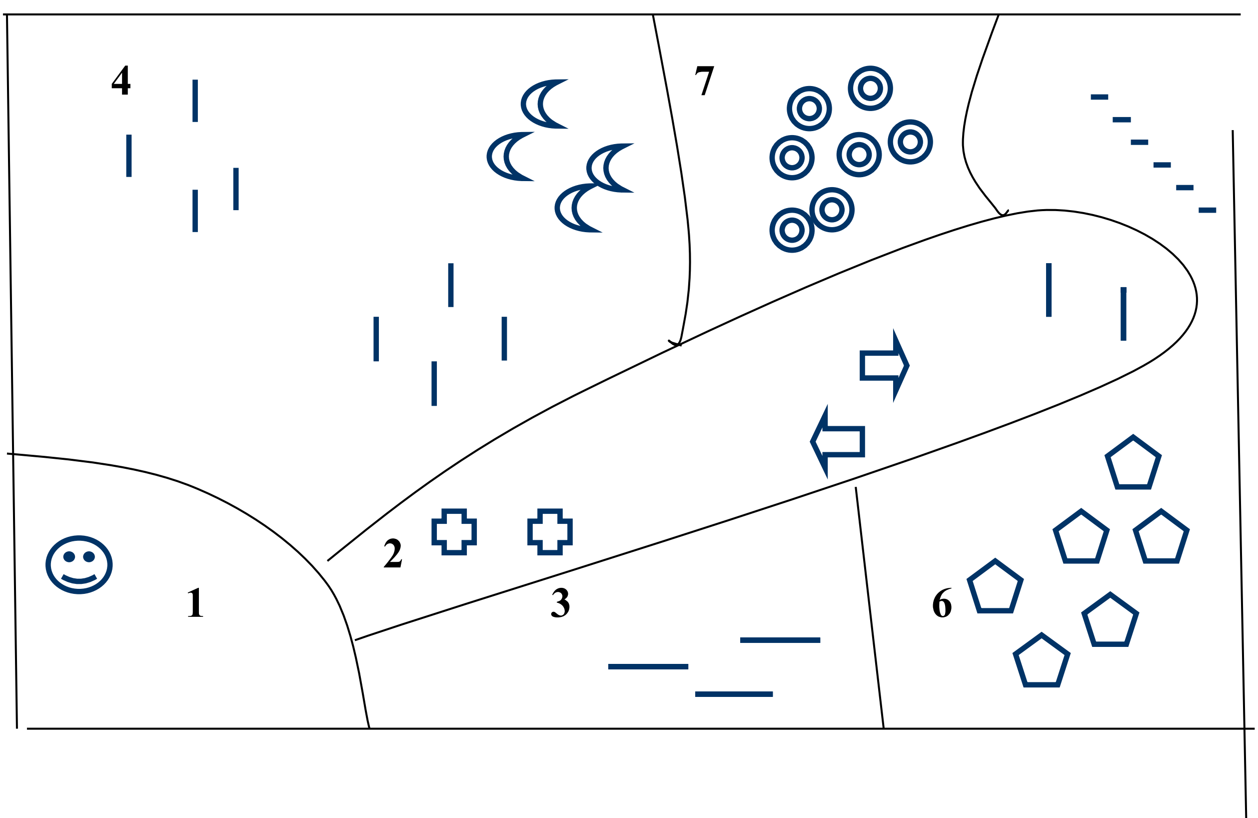
Řešení:

Existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B (a obráceně: množiny B na množinu A): každé postavě z knihy přiřadíme právě jeden vrchol pětiúhelníka, zobrazení je vzájemně jednoznačné, obě množiny mají stejný počet prvků.
Stejně posoudíme i relace mezi A a C, B a C, A a D, B a D, C a D. Ve všech případech se jedná o vzájemně jednoznačná zobrazení. Každé dvě množiny jsou navzájem ekvivalentní, patří do téže třídy rozkladu $T_1 = \{A, B, C, D\}$, mají stejné kardinální číslo (5).

Řešený příklad 3:
Rozhodněte, které množiny tvarů jsou navzájem ekvivalentní.
(Připomeňte si: Dvě množiny jsou ***ekvivalentní****, právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení jedné množiny na druhou.)*



Řešení:
Vyznačte např. vzájemně jednoznačné zobrazení množiny trojúhelníků na množinu čtverců.



Kardinální čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních množin.. Místo pojmu „kardinální číslo“ se též užívá pojem „mohutnost množiny“, což vystihuje společnou vlastnost navzájem ekvivalentních množin. Ekvivalentní množiny mají stejné kardinální číslo, stejnou mohutnost. U konečných množin to znamená, že mají stejný počet prvků.
Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozená čísla.**
Např. kardinální číslo (třídu) množin, do které patří v naší úloze množina trojúhelníků, označíme 4.

Kontrolní úkoly:

1. Posuďte, které z následujících množin jsou navzájem ekvivalentní:

A - množina všech světových stran
B - množina ročních období
C = {1, 2, 3, 4, 5}
D - množina rohů čtvercového stolu
E = {Jana, Jarka, Jitka, Josefína, Jarmila}.
Svá řešení odůvodněte.

2. Uveďte alespoň 5 příkladů množin, které jsou

ekvivalentní s množinou $A = \{x \in N, x < 8\}$, kde N je množina všech přirozených čísel.

Shrnutí:
Množiny A, B nazýváme ekvivalentní a píšeme $A \sim B$, právě když existuje prosté (vzájemně jednoznačné) zobrazení množiny A na množinu B.
Relace R "být ekvivalentní mezi množinami" je relací ekvivalence, přísluší k ní rozklad systému množin M na třídy, které nazveme kardinální čísla.
Kardinální čísla konečných množin nazveme přirozená čísla.