PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita

Mechanika a molekulová fyzika

Práce a energie, gravitační pole

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno

Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím www.studopory.vsb.cz materialy html_files

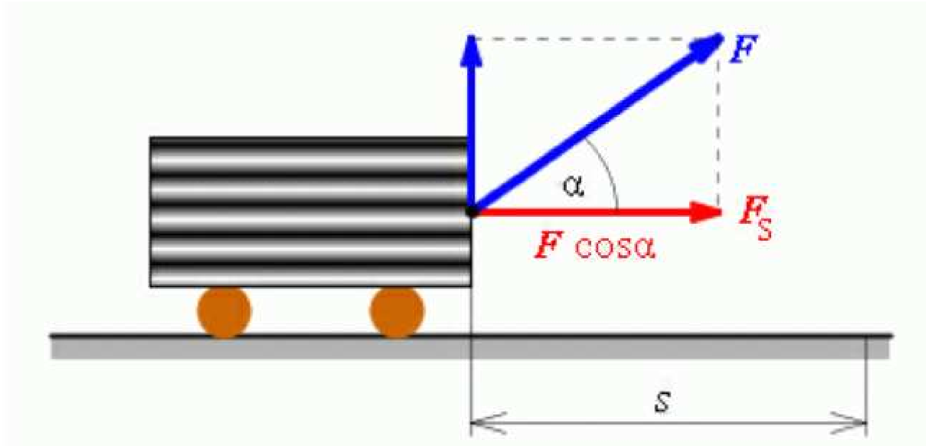
Úvodem

Pojem práce, energie

- běžný život – „těžká práce“ – fyzicky, duševně namáhavá
  - „energie vyplýtvaná na vzdělávání studentů“
    - fyzikální pojem, fyzikální veličina

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Mechanická práce



Mechanická práce je práce síly.

1. Velikost vykonané práce závisí nejen na velikosti působící síly, ale je důležitý i směr, ve kterém na těleso působí.

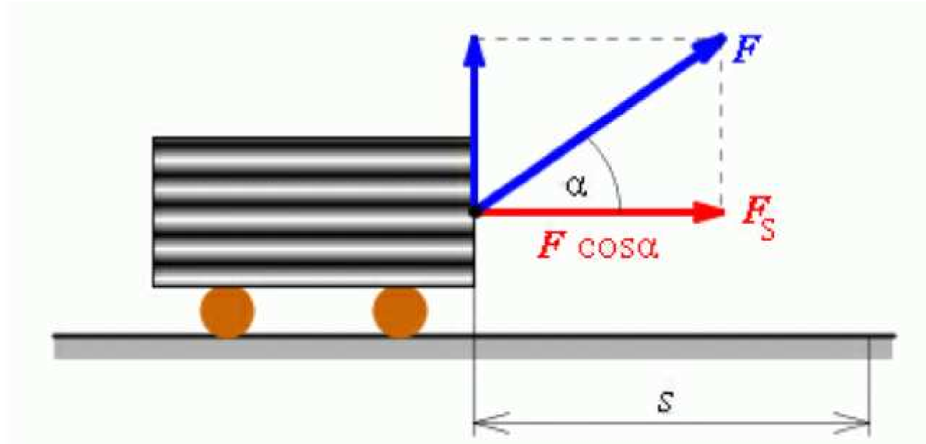
Působí-li síla na těleso ve směru trajektorie pohybu, jsou její účinky (a tím i vykonaná práce) maximální. Čím více se směr síly odchyluje od trajektorie, tím se účinky snižují.

2. *Práci koná jen složka síly ve směru pohybu.*

3. *Mechanická práce **W** vykonaná silou **F** při přemisťování tělesa je úměrná velikosti této síly **F**, dráze **s**, o kterou se těleso přemístí a úhlu **α**, který svírá síla s trajektorií pohybu.*

- Při konstantních hodnotách ***F*** a ***α*** pak $W = F.s.\cos(\alpha)$

Mechanická práce



- Při *proměnné síle* a vzájemného *směru* síly a posunutí je potřeba uvažovat infinitezimální přírůstky mechanické práce:

$$dW=F.ds\cos(\alpha)$$

Při použití vektorových veličin $\vec{F}$ a $\vec{r}$ pak

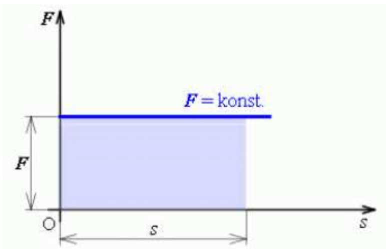
$$dW=\vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

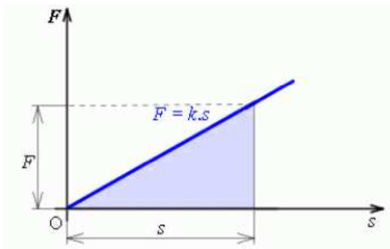
Pro práci při přemístění z polohy 1 do polohy 2 pak

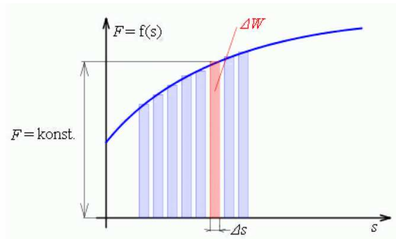
$$\boxed{W_{1,2}=\int_1^2\vec{F}.\overrightarrow{dr}}$$

Jednotka: $1\,kg.m^2s^{-2}=1\,Nm=1\,J$ (Joule)

Pozn. Grafické určení práce

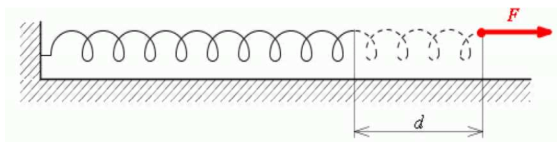






Práce elastické síly

$F=kx \quad W=\int(kx)dx=\frac{1}{2}kx^2$



Výkon

Výkon vyjadřuje, jak rychle se určitá práce vykoná:

*Výkon **P** je podíl vykonané práce **ΔW** a doby **Δt**, za kterou byla tato práce vykonána.*

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Tímto vztahem je definován průměrný výkon.

Okamžitý výkon.

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$$

Jednotka: $1 kg.m^2s^{-3} = 1 Js^{-1} = 1 W$ (Watt)

Pozn.: Hodnota 1W je poměrně malá, častěji kW, MW, (1HP=0,746 kW).

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} . \vec{v}$$

Příkon, účinnost

U elektrických spotřebičů se uvádí podobný pojem – *příkon*.

Touto veličinou vyjadřujeme, že dodáváme spotřebiči energii ΔE za čas Δt.

Podíl dodané energie *dE* a doby, po kterou energii dodáváme *dt* nazýváme příkon P_o.

$$P_0 = \frac{dE}{dt}$$

Veškerá dodaná energie se nespotřebuje na tzv. užitečný výkon P (výkon využitý pro požadovanou činnost). To jak velká část příkonu se využije ve formě užitečného výkonu, nám udává veličina nazývaná *účinnost η* .

Účinnost *η* je podíl výkonu *P* a příkonu P_o.

$$\eta = \frac{P}{P_o}$$

Účinnost je bezrozměrná veličina, často udávaná v % .

Mechanická energie

Koná-li síla mechanickou práci přemísťováním tělesa, pak se výsledek této práce může projevit dvojím způsobem:

a) Těleso získá nebo změní svou rychlost.

b) Těleso získá schopnost konat práci díky své poloze.

V obou případech dochází ke změně stavu tělesa.

- V prvním případě se jedná o stav pohybový.
- V druhém případě o stav polohový.

Otázkou je, čím můžeme hodnotit „míru“ tohoto stavu.

Energie je skalární fyzikální veličina, která popisuje schopnost hmoty (látky nebo pole) konat práci.

Energie je slovo vytvořené fyziky v polovině devatenáctého století z řeckého *energeia* (vůle, síla či schopnost k činům).

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Kinetická energie

- Míru pohybového stavu označíme jako ***kinetická (pohybová) energie.*** Tuto mechanickou energii lze přeměnit zpět na práci. Kinetická energie je skalární veličina s jednotkou 1 Joule.

Z experimentu je zřejmé, že pro uvedení do pohybu tělesa s vyšší hmotností potřebuje vykonat větší práci vnější síly. Pro uvedení do pohybu tělesa na vyšší

Kinetická energie E_k *tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti* ***m*** *a druhé mocnině jeho velikosti rychlosti* ***v.***

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Potenciální energie

- Míru polohového stavu označíme jako ***potenciální (polohová) energie***. Potenciální energie je skalární veličina s jednotkou 1 Joule.

Potenciální energie je druh energie, kterou má každé těleso nacházející se v potenciálovém poli určité síly.
Podle síly působící na dané těleso lze rozlišit více druhů potenciální energie:

Změna potenciální energie bude dána záporně vzatým dráhovým integrálem vnitřních sil daného potenciálového pole (prací vnějších sil proti vnitřním).

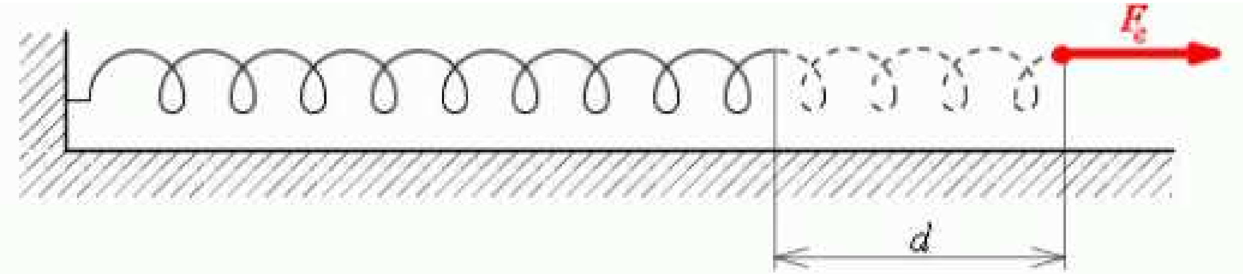
$$\Delta E_p = -\int_1^2 \vec{F}_i \, . \, d\vec{r}$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Potenciální energie elastická

Pružina

V rovnovážné poloze (nestlačená, nenatažená pružina) volíme nulovou polohu potenciální energie. Stlačováním pružiny o ***d*** ve směru *x* konáme práci proti elastickým silám silou $\boldsymbol{F_e = -k\,x}$, kde ***k*** je materiálová konstanta, která vyjadřuje elastické vlastnosti pružiny (*tuhost pružiny*) a má jednotku N.m^{-1}.



Pro změnu elastické potenciální energie :

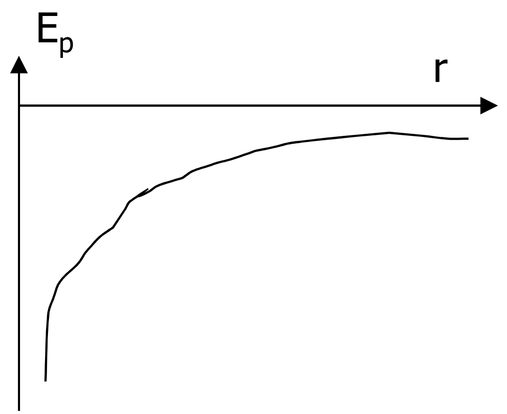
$$\Delta E_{pe} = -\int_0^d -kx.\,dx = \frac{1}{2}kd^2$$

Potenciální energie gravitační

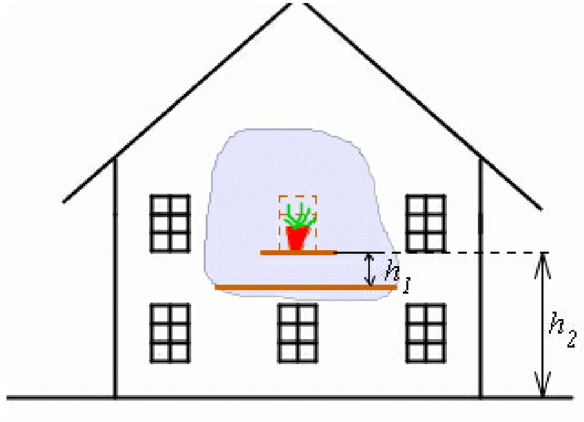
Hmotné objekty

Nulovou polohu potenciální energie volíme v nekonečnu. Přesunováním tělesa o hmotnosti $\boldsymbol{m_1}$ z nekonečna do vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ od tělesa o hmotnosti $\boldsymbol{m_2}$ (v jeho gravitačním poli) konáme práci proti vnitřní síle $\boldsymbol{F_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$, kde $\boldsymbol{G}$ je gravitační konstanta, která se rovná přibližně: $G = 6.67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

$$\Delta E_{pg} = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,.\,dr = -\left[G\frac{m_1 m_2}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\,G\frac{m_1 m_2}{r}$$



Potenciální energie tíhová

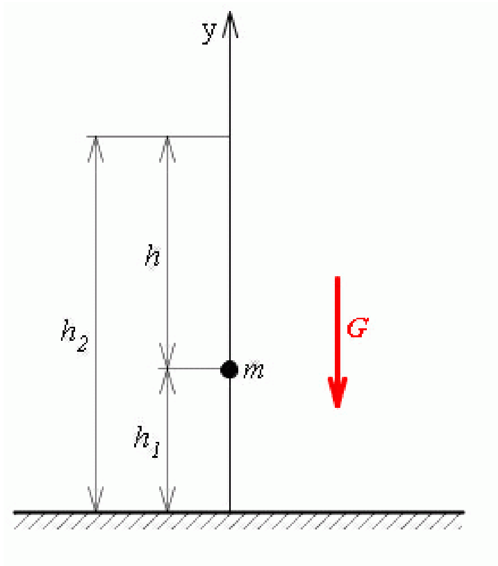


Tíhové pole Země

Volba nulové polohy je na nás. Zvedáním tělesa o hmotnosti ***m*** z výšky h_1 do výšky h_2 působíme proti tíhové síle ***G= - mg*** , kde ***g*** je tíhové zrychlení, které se rovná přibližně: g = 9,81 ms^{-2} .

Pro změnu tíhové potenciální energie :

$$\Delta E_{pt} = -\int_{h_1}^{h_2} -mg.dh = [mgh]_{h_1}^{h_2} = mg(h_2 - h_1)$$



Pozn.: Pokud h_1=0 a h_2=h, pak E_p= mgh

Tíhová potenciální energie tělesa závisí na volbě vodorovné roviny, vůči které ji stanovujeme.

Zákon zachování mechanické energie

Izolovaná soustava je taková soustava těles (vč. jejich vnitřních sil), na které nepůsobí žádné vnější síly či jiné okolní vlivy, tj. nedochází ani k výměně energie (např. tepla), částic či informace s okolím soustavy.

Pozn.: Izolovaná soustava tedy neinteraguje s okolím. Izolované systémy ve skutečnosti neexistují.

- Pokud máme izolovanou soustavu, tj. žádné vnější síly (z vnějšku vykonaná práce je nulová), pak změna schopnosti konat práci izolované soustavy je nulová.
- **Celková mechanická energie v izolované soustavě se zachovává.**
- V rámci izolované soustavy se může jen měnit vzájemně míra pohybového a polohového stavu, tj. změna celkové energie je nulová.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Zákon zachování mechanické energie

- Při všech mechanických dějích se mění potenciální energie v kinetickou energii a naopak.
- Pro kinetickou a potenciální energii ve stavech *1* a *2* pak platí:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = konst$$

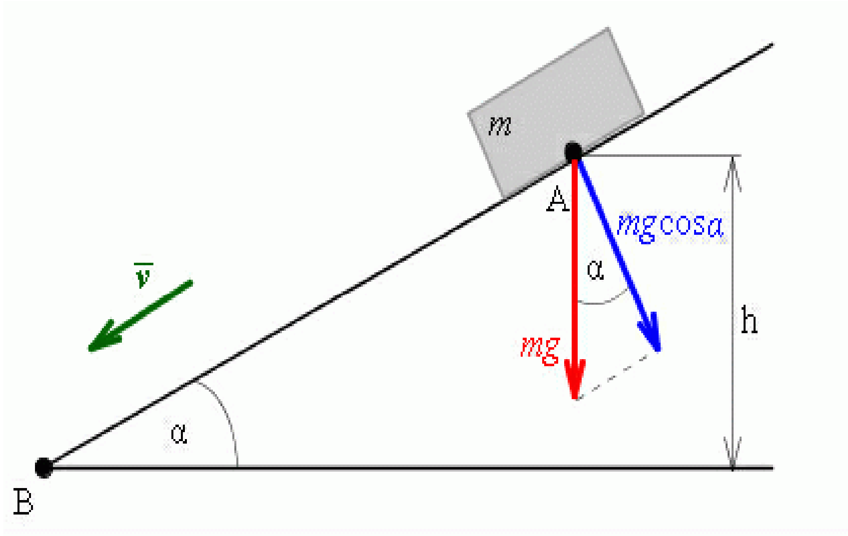
Pozn.: Potenciální energie je uvažována jen pro potenciálové pole $(rot\ \vec{a} = 0)$, kdy hodnota potenciální energie závisí jen na počátečním a koncovém bodě, tj. nezávisí na cestě. Např. odporové síly jako je tření, odpor vzduchu jsou proto silami vnějšími.

Změna mechanické energie soustavy je dána prací vnějších sil.

$$\Delta E_{celk} = \int_1^2 \vec{F}ext \,.\, d\vec{r} = W_{ext}$$

Zákon zachování mechanické energie

Z jaké výšky h se musí začít pohybovat těleso po nakloněné rovině s úhlem $\alpha = 30°$ s koeficientem tření $f = 0{,}1$, aby na konec dospělo s rychlostí $v = 20\ \mathrm{m.s^{-1}}$?



V bodě A, má těleso hmotnosti m vzhledem k bodu B, tíhovou potenciální energii $E_{pA} = mgh$. Kinetickou energii $E_{kA} = 0$, těleso je v klidu, jeho celková energie je $E_A = 0 + mgh$.

Pokud bychom neuvažovali tření (izol. soust.), pak platí ZZE: $E_A = E_B$
Protože jsme položili tíhovou potenciální energii v bodě B *rovnu nule,*
je $E_B = E_{kB} + 0 = =½mv_B^2$

Ze ZZE $mgh = E_{pA} = E_{kB} =½mv_B^2$

Uvažujeme během pohybu tělesa po nakloněné rovině práci W třecí síly, která spotřebovává část celkové energie. Takže výsledná rovnice bude vypadat následovně:

$E_{pA} = E_{kB} + W$

Dosadíme-li jednotlivé výrazy:

$$mgh = ½mv_B^2 + f.mg.\cos(\alpha).\frac{h}{\sin(\alpha)}$$

Výsledek h= 24,2 m.

Gravitační pole

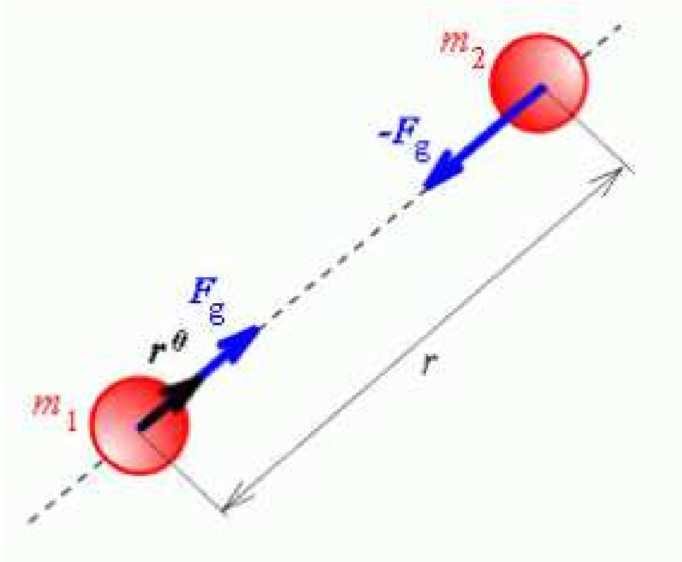
Gravitační pole tělesa je prostor v jeho okolí, ve kterém se projevují účinky gravitační síly F_g na jiná hmotná tělesa.

- Své gravitační pole má každé hmotné těleso.
- Jsme-li v gravitačním poli Země, je současně i Země v našem gravitačním poli. Působí-li Země na nás gravitační silou, působíme i my na Zemi gravitační silou a to stejně velikou.

  (Newtonův zákon akce a reakce).
- Gravitační silové působení mezi tělesy je vzájemné.

Vzájemné gravitační působení se uskutečňuje pomocí hypotetických částic zvaných gravitony. Představa fyziků je taková, že každý hmotný objekt stále vysílá do svého okolí a tedy i k druhému hmotnému objektu gravitony a na druhé straně pohlcuje ty gravitony, které přicházejí od druhého objektu.

Newtonův gravitační zákon



- Isaac Newton zformuloval pro velikost gravitační síly

Newtonův gravitační zákon

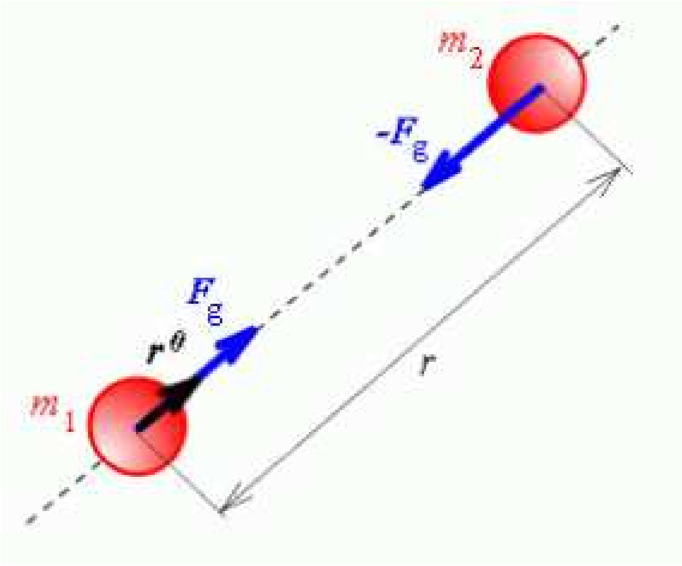
Dvě tělesa se vzájemně přitahují gravitační silou F_g, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1, m_2 a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r.

Vektorově:

Směr si vyjádříme pomocí jednotkového vektoru $\vec{r^0}$

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} . \vec{r^0}$$

Konstanta úměrnosti κ (kappa) je **gravitační konstanta** a má hodnotu κ = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2} . Gravitační konstanta je univerzální konstanta platná v celém Vesmíru. Tato konstanta nezávisí na prostředí v okolí tělesa, jehož působení sledujeme.



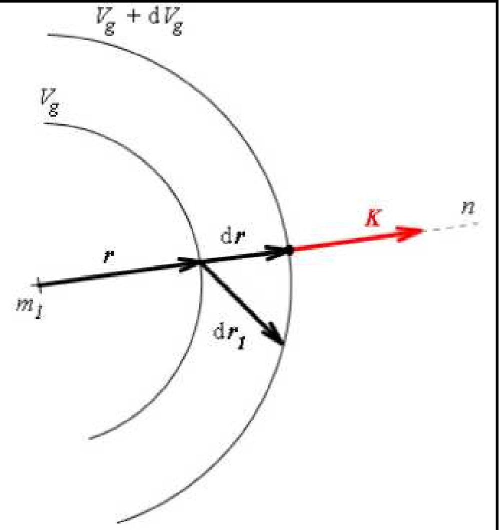
Newtonův gravitační zákon

Gravitační síla Fg mezi dvěma tělesy se nezmění,
i když v okolí obou těles budou jiné hmotné objekty.

I když Newtonův gravitační zákon platí přesně jen
pro hmotné body, můžeme ho použít i na reálné předměty.
Vzdáleností r je v tomto případě vzdálenost jejich středů.

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} . \overrightarrow{r^0}$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita



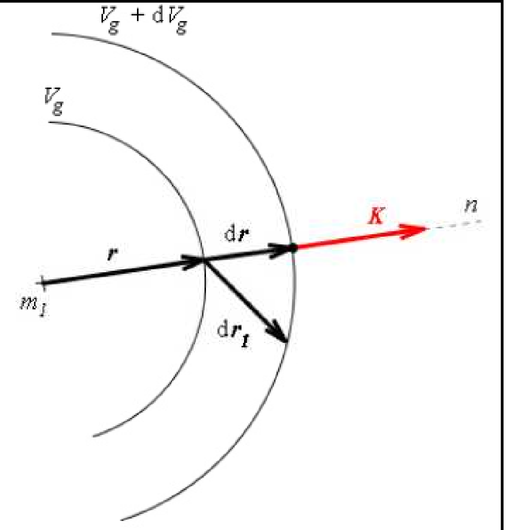
Intenzita a potenciál gravitačního pole

K popisu gravitačního pole tělesa o hmotnosti ***M*** slouží ještě další veličiny.

Intenzita gravitačního pole $\vec{K}$ - gravitační sílu na jednotkovou hmotnost.

$$\vec{K} = \frac{\overrightarrow{F_g}}{m} = -\kappa \frac{M}{r^2} . \overrightarrow{r^0}$$

Jedná se o jednoznačný popis gravitačního pole pomocí vektorové veličiny, která má směr gravitační síly. Její průběh můžeme graficky znázornit pomocí siločar.



Intenzita a potenciál gravitačního pole

Gravitační pole můžeme popisovat také pomocí skalární veličiny – potenciálu gravitačního pole V_g.

Potenciál gravitačního pole V_g je potenciální energie jednotkové hmotnosti v daném místě.

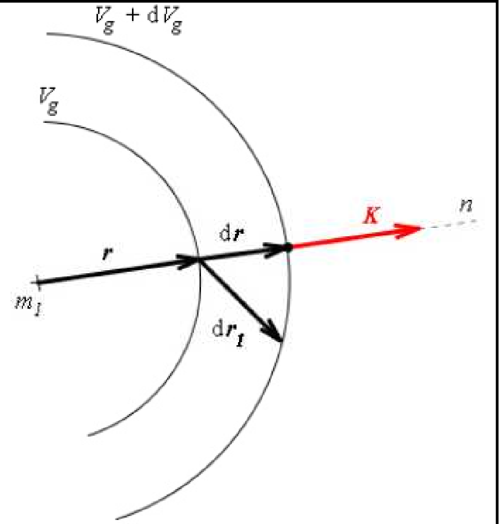
$$V_g = \frac{E_{pg}}{m}$$

Její průběh můžeme graficky znázornit pomocí ekvipotenciálních hladin.

Ekvipotenciální hladiny jsou v každém bodě kolmé na siločáry, znázorňující průběh intenzity gravitačního pole.

Stejně jako u potenciální energie, stanovuje nulovou hladinu potenciálu.

Při přesunu tělesa po ekvipotenciální hladině se nekoná práce.



Intenzita a potenciál gravitačního pole

- Vztah mezi potenciálem gravitačního pole V_g a jeho intenzitou $\vec{K}$

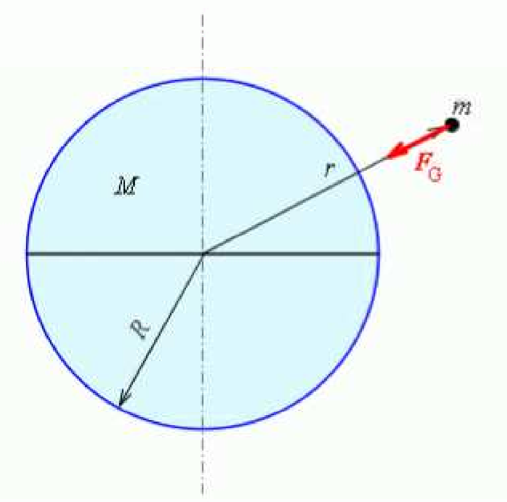
$$\Delta V_g = \frac{E_{pg}}{m} = \frac{-\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \, . \, d\vec{r}}{m} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{K} \, . \, d\vec{r}$$

V diferenciálním tvaru pak

$$dV_g = -\vec{K} \, . \, d\vec{r}$$

Zpětně pak

$$\vec{K} = -\frac{dV_g}{dx} \, . \, d\overrightarrow{r^0} = -\overrightarrow{grad}\,(V_g)$$



Gravitace v okolí Země

Předpokládejme, že Země je homogenní koule o hmotnosti

- M = 5,97 . 10^{24} *kg* a poloměru R = 6 371 km.

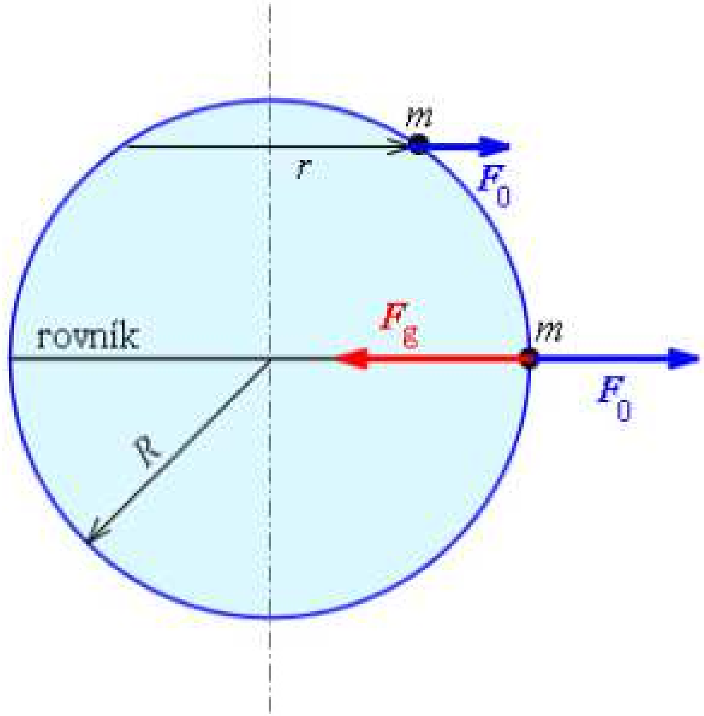
- Vztah $F_g = -\kappa \frac{Mm}{r^2}$ určuje gravitační sílu, kterou Země působí na těleso hmotnosti ***m*** ve vzdálenosti $r \geq R$ od středu Země.

- Použijeme-li Newtonův zákon síly ***F = ma***, můžeme napsat pro gravitační sílu vztah $F_g = m\, a_g$.
- Symbolem a_g jsme si označili ***gravitační zrychlení***.

$$a_g = -\kappa \frac{M}{r^2} \quad \text{pro } r \geq R$$

Výška nad Zemí	h (km)	a_g (m.s^{-2})
Mořská hladina	0	9,83
Mount Everest	8,8	9,80
Nejvyšší výška výstupu balónu	36,6	9,71
Dráha raketoplánu	400	8,7
Komunikační družice	35 700	0,225

Gravitace v okolí Země



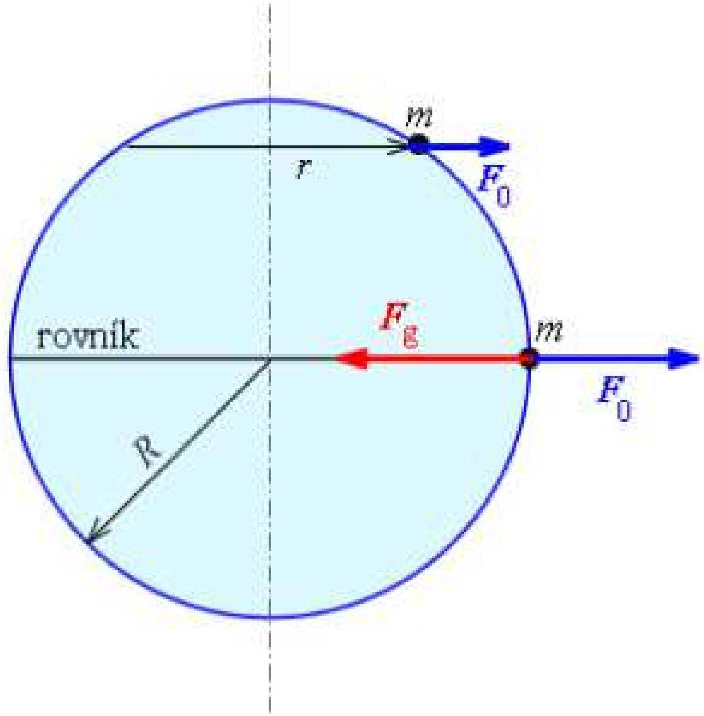
Rozdíl mezi gravitačním zrychlením a_g
a tíhovým zrychlením g :
Podle Newtonova gravitačního zákona na libovolné těleso na Zemi působí gravitační síla $\boldsymbol{F_g = m\, a_g}$.

Ve skutečnosti, ale **na těleso působí tíhová síla** $\boldsymbol{F_G = m\, g}$

Velikost tíhové a gravitační síly Země se liší a to z následujících důvodů:

- *Gravitační síla závisí na vzdálenosti tělesa od středu Země. Ale země není dokonalá koule, je to elipsoid zploštěný na pólech. Tíhové zrychlení roste směrem od rovníku k pólu – mění se se zeměpisnou šířkou.*

Gravitace v okolí Země



- *Hustota Země se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto také tíhové zrychlení je různé v různých místech Země.*

- *Největší vliv má ale rotace Země. Tělesa na Na povrchu Země jsou v neinerciální vztažné soustavě. Protože Země rotuje, působí na toto těleso i odstředivá síla $F_{od} = m\omega^2 r$. Úhlová rychlost rotace Země je na všech zeměpisných šířkách stejná, ale poloměr otáčení r <R se směrem od rovníku (r = R) zmenšuje.*

$$\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_{od}} \quad a \quad \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_g} + \overrightarrow{a_{od}}$$

Závislost na zeměpisné šířce: $$g\{\phi\} = 9.7803253359\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \left[\frac{1 + 0.00193185265241 \sin^2\phi}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2\phi}} \right]$$

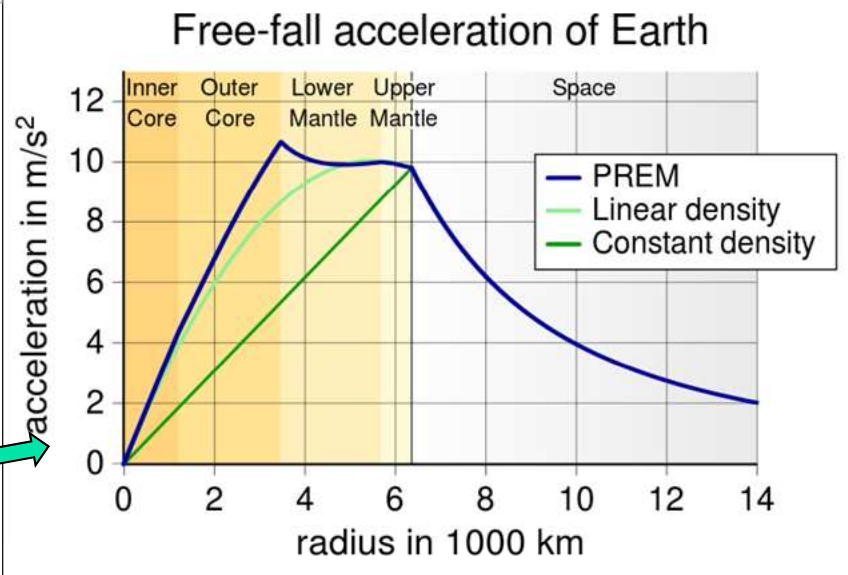
- Slapové jevy – příliv a odliv – vliv gravitačního pole Měsíce

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Gravitace v okolí Země a pod jejím povrchem

Místo na Zemi	Hodnota
Na rovníku v úrovni mořské hladiny	g = 9,780 m/s²
45 ° zeměpisné šířky	g = 9,80665 m/s²
Zemský pól	g = 9,832 m/s²
Praha [1]	g = 9,81373 m/s²
Brno [1]	g = 9,81275 m/s²
Ostrava [1]	g = 9,81345 m/s²
Plzeň [1]	g = 9,81305 m/s²
Liberec [1]	g = 9,81405 m/s²

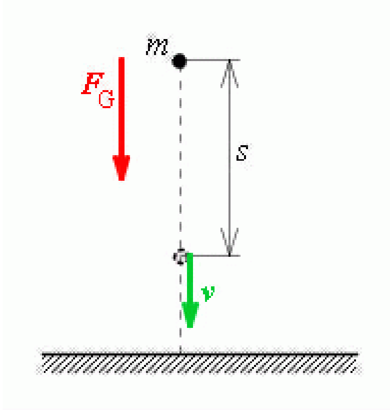
Pokud budeme sledovat gravitační zrychlení
Pod povrchem Země, musíme si uvědomit, že
Na těleso působí i hmota, která se nachází
nad ním. Uprostřed Země pak na těleso působí
okolní hmota působí gravitační silou ze všech
stran a navzájem se eliminuje – její průběh :



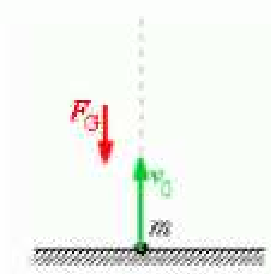
Pohyb těles v blízkosti povrchu Země

Volný pád

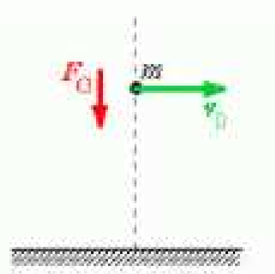
$$v = g\,t, \quad s = \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$



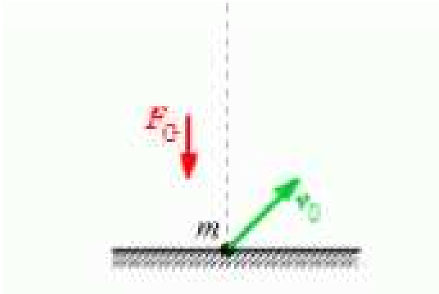
Vrhy



vrh svislý vzhůru



vodorovný vrh

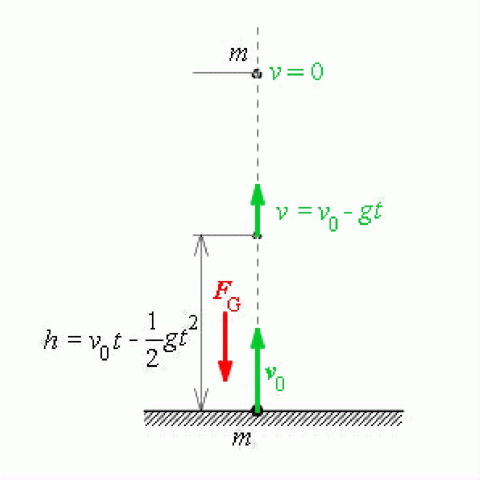


vrh šikmý vzhůru

Pohyb těles v blízkosti povrchu Země

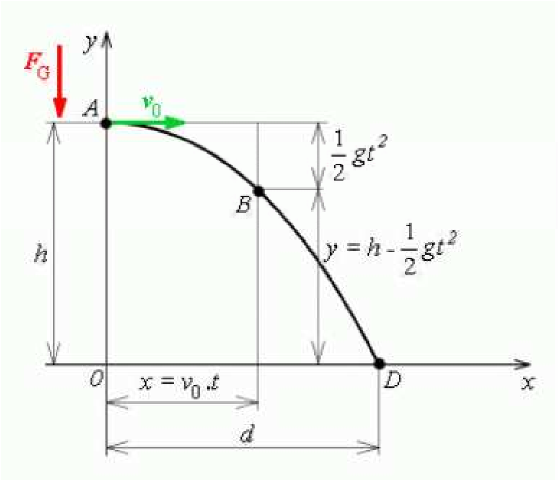
Vrh svislý vzhůru

$$v = v_0 - g\,t,\quad h = v_0\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$



Šikmý vrh vodorovně

$$x = v_0\,t,\quad y = h - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$



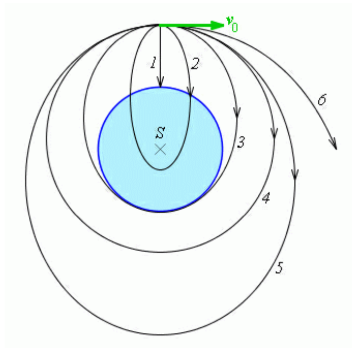
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země

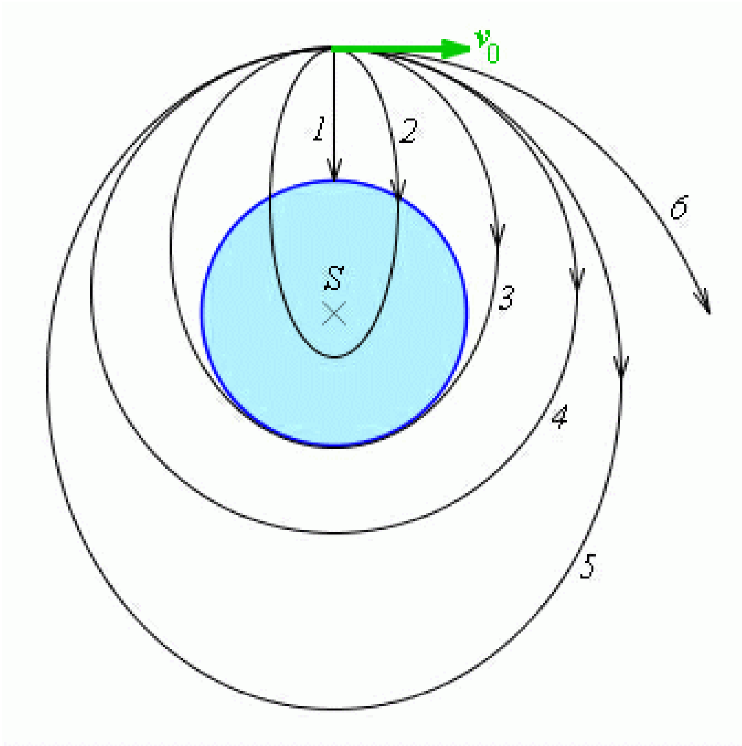
Družice, raketoplány, kosmické sondy

- Pohyb ve velkých výškách (řádově stovky a tisíce kilometru) - gravitační síly Země jsou poměrně malé (tabulka závislosti gravitačního zrychlení na výšce).
- V těchto výškách je prakticky vakuum a proti pohybu nepůsobí odporové síly.

Představte si, že raketoplán vynesl kosmické těleso hmotnosti ***m*** do velké výšky, řekněme 400 km. Raketoplán teď těleso vypustí ve směru tečném k povrchu Země s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v_o}$. Jak se bude kosmický objekt chovat, závisí právě na této rychlosti.



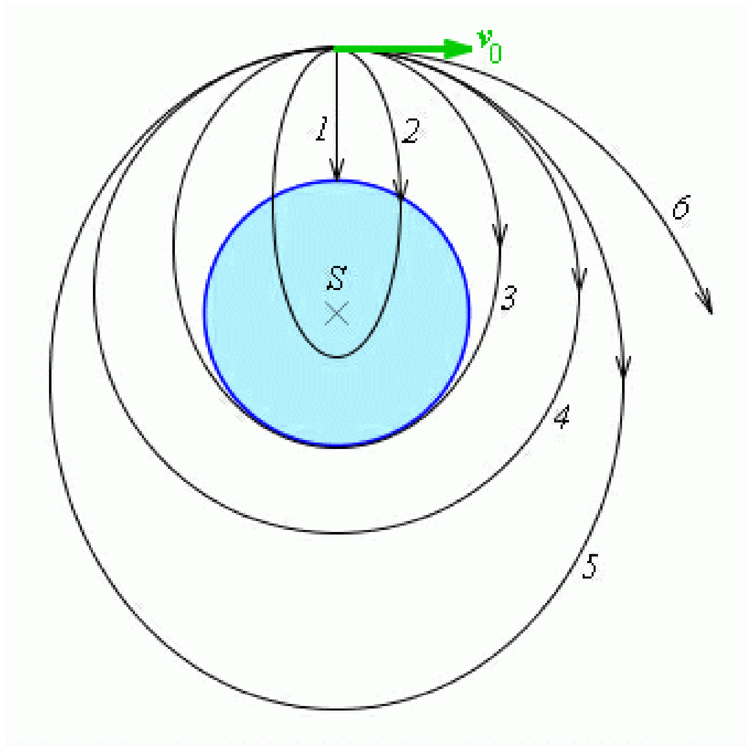
Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země



Je-li počáteční rychlost:

- Nulová, satelit spadne na Zem (trajektorie 1).
- Malá, satelit s bude pohybovat po eliptické trajektorii a časem spadne na Zem (trajektorie 2).
- „Kritická“, satelit se bude zase pohybovat po eliptické trajektorii, ale na Zem již nespadne (trajektorie 3).
- „Kruhová“, satelit se bude pohybovat po kruhové trajektorii kolem Země (trajektorie 4).
- „Eliptická“, satelit se bude pohybovat opět po eliptické trajektorii (trajektorie 5), Země leží v jejím ohnisku.
- „Úniková“, satelit se odpoutá od gravitačního pole Země (trajektorie 6).

Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země



- Pro pohyb po kružnici musí být gravitační síla stejně veliká jako setrvačná síla odstředivá.

$$\kappa \frac{Mm}{r^2} = \frac{m{v_k}^2}{r}$$

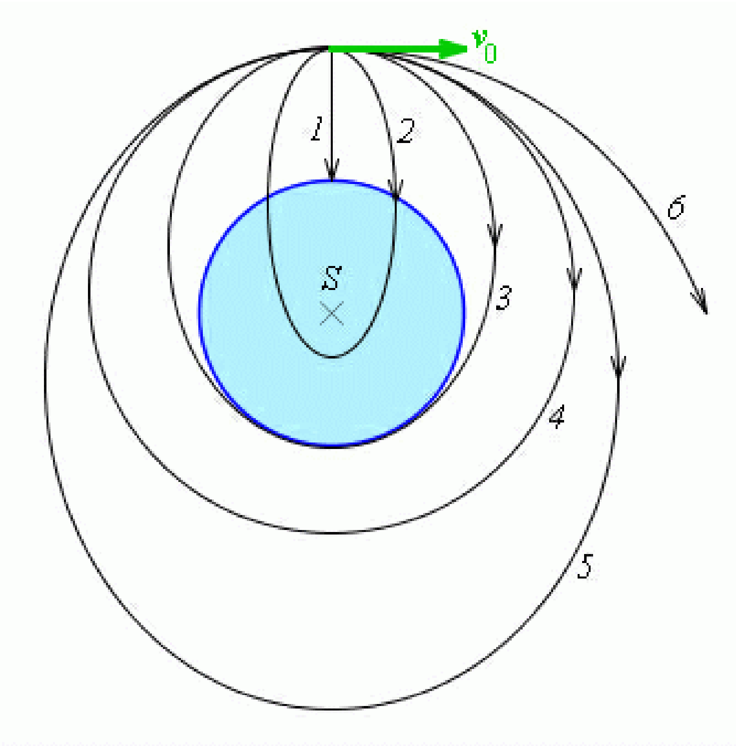
odtud $$v_k = \sqrt{\kappa \frac{M}{r}}$$

- Pokud bude družice obíhat nízko nad Zemí (r ≈ R), bude velikost kruhové rychlosti

$$v_1 = \sqrt{\kappa \frac{M}{R}} \approx 7,9\ km.s^{-1}$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Pohyb těles ve velkých výškách od povrchu Země



- Pro únikovou trajektorii musí kosmické těleso Získat tzv. parabolickou rychlost

$$v_p = \sqrt{2} v_k$$

Pokud bude kosmická sonda startovat z oběžné dráhy nízko nad Zemí (r ≈ R), pak parabolická rychlost bude.

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 \approx 11,2\ km.s^{-1}$$

- Této rychlosti se říká *druhá kosmická rychlost.*
-
- Podobným způsobem se spočítá třetí kosmická rychlost

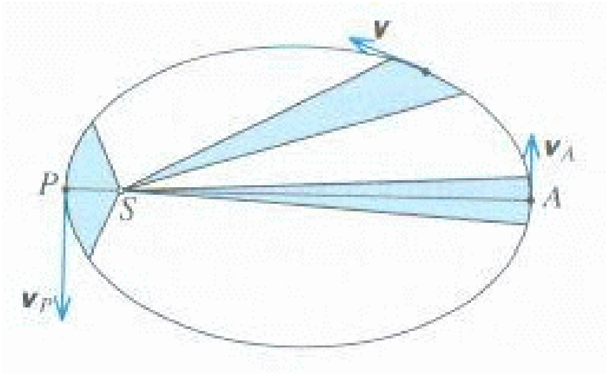
Těleso se musí vymanit z gravitačního pole Země. Soustava těleso +Země má na začátku celkovou energii danou druhou kosmickou rychlostí a jeho potenciální energií, na konci je pak kinetická i potenciální energie rovna nule.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \left(-\kappa \frac{mM}{R+h}\right) = 0 + 0$$

Pak

$$v_2 = \sqrt{2\kappa \frac{M}{R}} = \sqrt{2} v_1$$

Keplerovy zákony



Pohyby planet - 17. století – Johannes Kepler

Platí i pro umělé družice a jiné objekty obíhající kolem planet.

1. Keplerův zákon

Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

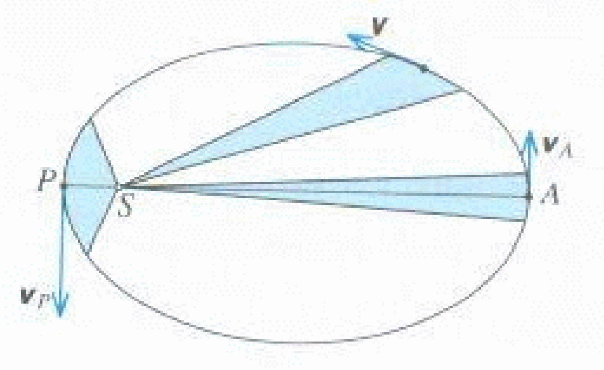
2. Keplerův zákon

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za stejnou dobu jsou stejné.

a nejpomaleji v největší vzdálenosti od něj (aféliu – odsluní).

*Průvodič **r** je úsečka spojující planetu se Sluncem. Plocha opsaná průvodičem za 1 s je plošná rychlost. Proto lze vyslovit II. zákon Keplerův také takto: Plošná rychlost planety je stálá.*

PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita



Keplerovy zákony

3. Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob *T* dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos <u>a</u> jejich trajektorií.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \kappa \frac{(M+m)}{4\pi^2} \cong konst$$

pro m«M , což je v případě planet

a Slunce splněno

Keplerovy zákony

3. Keplerův zákon

$$F_g = F_o \Rightarrow \varkappa \cdot \frac{M \cdot m}{a^2} = \frac{m \cdot v^2}{a}, \qquad (2)$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta s hodnotou $6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

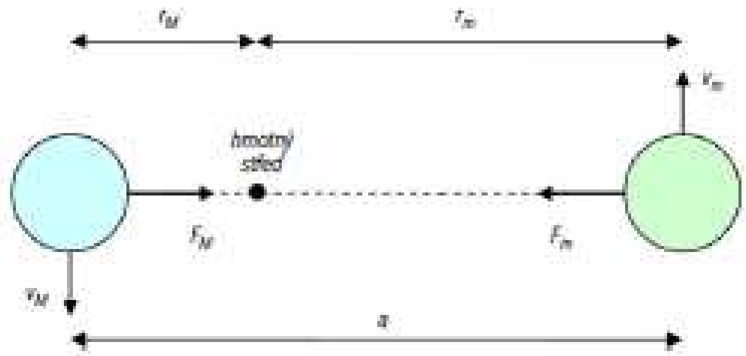
$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot a}{T} \qquad (3)$$

Za rychlost v můžeme dosadit do (2) ze známého vztahu (3) pro průměrnou rychlost, kde dráha s bude délka kružnice o poloměru a a za čas doplníme oběžnou dobu T.

Po dosazení, zkrácení a snadné úpravě dostaneme

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa \cdot M}{4\pi^2}. \qquad (4)$$

Pokud není možné zanedbat hmotnost obíhajícího tělesa m (např. pro dvojhvězdy), musíme použít následující úvahu při odvození třetího Keplerova zákona. Máme dvě tělesa o hmotnostech M a m, které obíhají okolo hmotného středu soustavy po kružnicích ve vzdálenostech r_M a r_m (viz obr. 1). Protože gravitační síla působí pouze na úsečce spojující středy obou těles, musí obě tělesa dokončit jeden oběh za stejnou dobu T (i když se pohybují různými rychlostmi v_M a v_m).



Obr. 1 – dvě tělesa obíhající okolo hmotného středu

Na každé těleso působí setrvačná odstředivá síla o velikosti

$$F_M = M \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = 4\pi^2 \cdot M \cdot \frac{r_M}{T^2}, \qquad (5a)$$

$$F_m = m \cdot \frac{v_m^2}{r_m} = 4\pi^2 \cdot m \cdot \frac{r_m}{T^2}. \qquad (5b)$$

Třetí Newtonův pohybový zákon (zákon akce a reakce) říká, že $F_M = F_m$, z čehož plyne

$$M \cdot r_M = m \cdot r_m. \qquad (6)$$

Ze vztahu (6) je zřejmé, že hmotnější těleso obíhá blíže k hmotnému středu než méně hmotné těleso. Celkovou vzdálenost obou těles lze napsat jako součet dílčích vzdáleností

$$a = r_M + r_m \qquad (7)$$

a po úpravě dostaneme

$$r_m = \frac{M \cdot a}{M + m}. \qquad (8)$$

Pokud vztah (8) dosadíme do (5b) a doplníme o gravitační zákon (2), kdy platí $F_g = F_m$, po jednoduché úpravě dostaneme třetí Keplerův zákon v Newtonově formě

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa}{4\pi^2}(M + m). \qquad (9)$$