PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita

Mechanika a molekulová fyzika

Tekutiny

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno

Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím www.studopory.vsb.cz materialy html_files

Mechanika kapalných a plynných těles

Tekutiny

↓

Kapaliny + Plyny

- Z hlediska vnitřní struktury se od látek pevného skupenství liší tím, že jejich molekuly už nejsou vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale mohou se snadno navzájem volně pohybovat.
- Mechanika tekutin, pro kapaliny označována jako **hydromechanika** a pro plyny jako **aeromechanika**, je část mechaniky, která se zabývá mechanickými vlastnostmi tekutin, studuje podmínky rovnováhy a zákonitosti pohybu tekutin a vzájemným působením tekutin s pevnými tělesy.

Tekutiny

Základní vlastností tekutin je snadná vzájemná změna polohy jejich molekul. V důsledku své molekulární struktury mají tekutiny tyto nejvýznamnější vlastnosti :

a) Jsou **tekuté**, to znamená, že nemají pevný tvar. Zaujmou vždy tvar nádoby, do které byly umístěny. Jsou snadno dělitelné.

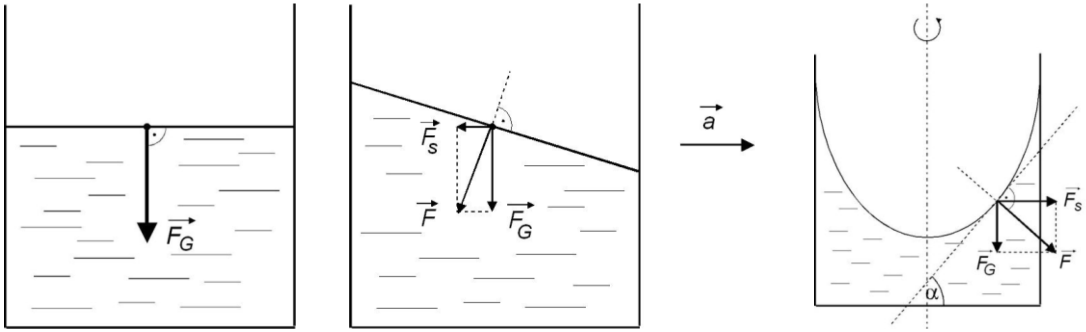
b) Příčinou rozdílné tekutosti různých kapalin a plynů a odporu proti pohybu v nich je **vnitřní tření (viskozita)**. Je vyvoláno vznikem tečných sil při pohybu molekul tekutiny. V rovnovážném stavu tekutiny, kdy jednotlivé části tekutiny jsou navzájem v klidu, jsou tyto tečné síly nulové.

c) Působením vnějších sil se zmenší objem tekutiny. Tuto vlastnost označujeme jako **stlačitelnost**. Kapaliny jsou velmi málo stlačitelné, plyny naproti tomu jsou hodně stlačitelné.

Kapaliny

Dalšími specifickými vlastnostmi kapalin jsou:

d) Na volném povrchu kapaliny v nádobě vytvářejí **volnou hladinu**. U kapaliny v klidu je volná hladina kolmá k tíhové síle. Při pohybu nádoby s kapalinou volný povrch nabývá takového tvaru, že výslednice vnějších sil a tíhové síly je v každém místě povrchu kolmá k volnému povrchu.



e) U kapalin se setkáváme s **kapilárními jevy.**

Ideální kapalina je bez vnitřního tření (je dokonale tekutá) a považujeme ji za nestlačitelnou. Zanedbáváme molekulární strukturu a **považujeme ji za spojitou (kontinuum).**

Plyny

Molekuly plynu se skládají z jednoho nebo několika atomů, mají různé tvary a rozměry. Za normálních podmínek jsou střední vzdálenosti mezi molekulami plynu ve srovnání s rozměry molekul velké. Pro tyto vzdálenosti jsou přitažlivé síly mezi molekulami malé a můžeme je zanedbat.

Ideální plyn považujeme rovněž za **kontinuum**, je **bez vnitřního tření** a je **dokonale stlačitelný**.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Tlak

Stav tekutiny v klidu v určitém místě určuje ***tlak***.

Tlak ***p*** je definován vztahem

$$p = \frac{F}{S}$$

kde *F* je velikost síly působící kolmo na rovinnou plochu o obsahu *S*.

Obecně nemusí být všude v tekutině stejně velký tlak. Pak tlak *p* v daném místě tekutiny je dán diferenciálním podílem

$$p = \frac{dF}{dS}$$

kde *dF* je síla působící kolmo na diferenciálně malou plošku o obsahu *dS*.

Jednotkou tlaku je 1 Pa (pascal), který lze pomocí základních jednotek SI vyjádřit: 1 Pa = 1 $kg.m^{-1}.s^{-2}$.

Tlak v tekutině je jednoznačně určen svou hodnotou, je to skalární veličina.

Tlak

- Je-li *tlak p* ve všech místech tekutiny stejný, pak na libovolně orientovanou rovinnou plochu o *obsahu S*, která je ve styku s tekutinou, působí kolmá tlaková síla, pro jejíž velikost platí

$$F = p.S$$

Bude-li *tlak p* v různých místech rovinné plochy o *obsahu S* různý, pak velikost kolmé tlakové síly bude

$$F = \int_{(S)} p.dS$$

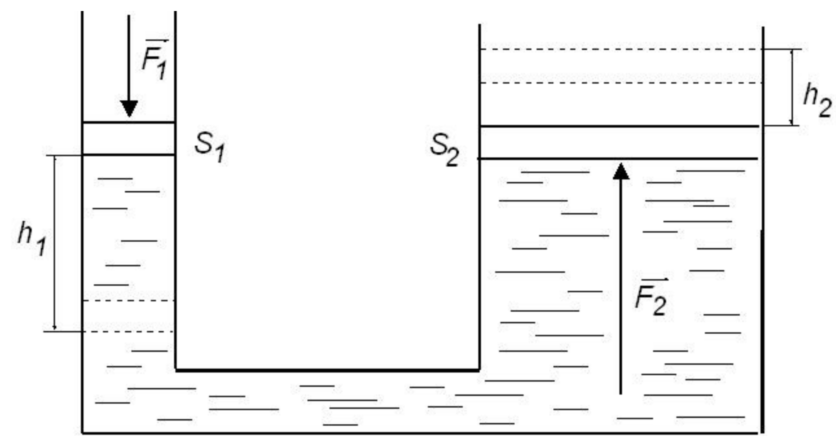
Tlak v tekutině může být vyvolán vnější silou (např. působením pístu ve válci s tekutinou) nebo vlastní tíhovou silou působící na tekutinu. Často se uplatňuje obojí silové působení.

Tlak

- Pro tlak vyvolaný vnější silou platí známý **Pascalův zákon**:

Působí-li vnější síla o velikosti *F* na rovinnou plochu o obsahu *S* povrchu uzavřeného objemu tekutiny, vyvolá tato síla tlak *p*, který je ve všech místech tekutiny stejný.

$$p = \frac{F}{S} = konst$$

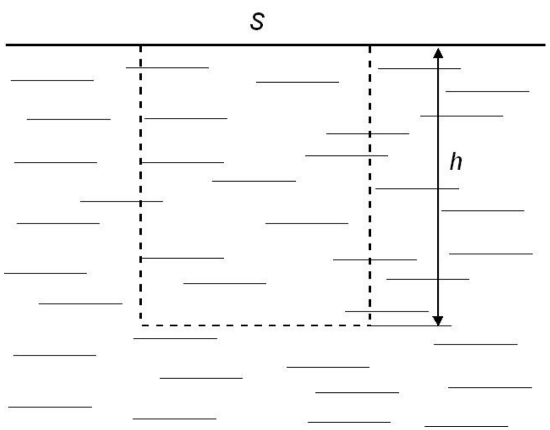


Pascalova zákona se využívá
v hydraulických a pneumatických
zařízeních.
Objasníme si princip těchto zařízení.

$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ a tedy pro $S_2 > S_1$ bude $F_2 > F_1$.

Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla

Tíhová síla působící na kapalinu (bez působení vnějších sil na povrch kapaliny) je příčinou ***hydrostatického tlaku.***



Chceme zjistit, jaký je hydrostatický tlak pod volným povrchem kapaliny o hustotě ρ v hloubce h. Vybereme si v kapalině její část ve tvaru kolmého válce výšky h a průřezu o obsahu S, jehož horní podstava leží na volném povrchu kapaliny.

Hmotnost kapaliny ve vybraném válci je $m = \rho S h$

Na dolní podstavu působí tíha tohoto kapalinového sloupce

$G = mg = \rho S h g$, kde g je tíhové zrychlení.

Tlak způsobený silou *G* je na ploše *S* konstantní a je

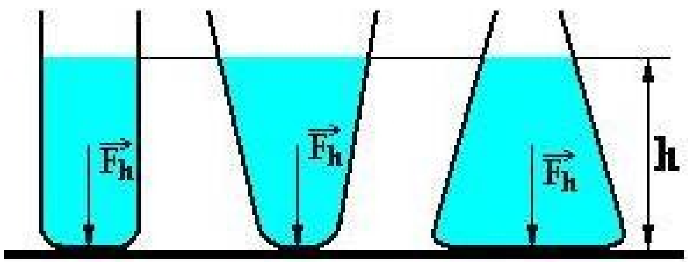
$$p = \frac{G}{S} = h\rho g$$

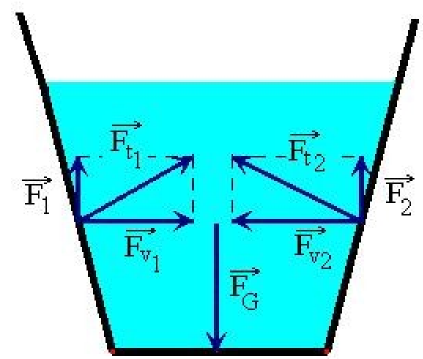
- Tento tlak je podle výše uvedené definice ***hydrostatickým tlakem*** $p = h\rho g$ závisí na hloubce *h* pod volným povrchem kapaliny a na druhu kapaliny.
- Plocha v kapalině, v jejíchž všech bodech je stejný hydrostatický tlak, se nazývá **hladina.** Na

Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla

Hydrostatický paradox (též hydrostatické paradoxon) je skutečnost, že hydrostatická tlaková síla na dno nádoby naplněné do stejné výšky stejnou kapalinou je vždy stejná bez ohledu na množství (objem, hmotnost) kapaliny.

Nádoby stejně vysoké se stejně velkým dnem se mohou lišit jedině tvarem, tlaková síla na dno však bude naprosto stejná.





Rozdíl mezi tíhou kapaliny a tlakovou silou kapaliny na dno je způsoben silou reakce stěn, která u rozšiřující se nádoby působí na kapalinu směrem šikmo vzhůru (kapalinu nadlehčuje), u zužující se nádoby působí na kapalinu šikmo dolů (kapalinu přitlačuje na dno).

Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla

Obdobně tíhová síla působící na plyn je příčinou *aerostatického tlaku*. Ten však je při obvyklých rozměrech nádob s plynem tak nepatrný vzhledem k vlastnímu tlaku plynu, že jej zanedbáváme. Tlak plynu v uzavřené nádobě považujeme všude uvnitř nádoby za stejný.
Význam má pouze tlak způsobený tíhou vzduchu (atmosféry) na povrch Země. Tento tlak se nazývá ***atmosférický tlak*** p_a.

Atmosférický tlak závisí na nadmořské výšce. S rostoucí nadmořskou výškou atmosférický tlak klesá (zmenšuje se rovněž hustota vzduchu).
Výpočet se provádí podle vztahu (*barometrická formule*)

$$p_a = p_{a0} e^{-\frac{g h \rho_0}{p_0}}$$

Kde p_{ao}, ρ_0 jsou tlak a hustota vzduchu při hladině moře.

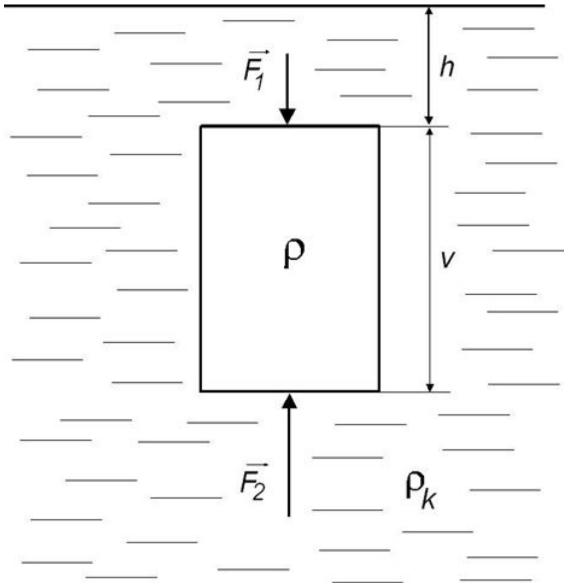
Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla

- Dohodou byl stanoven normální atmosférický tlak p_{an} = 1,01325.10^5 Pa. Odpovídá atmosférickému tlaku na hladině moře 45° severní šířky při T= 0° C.

V otevřené nádobě s kapalinou působí na hladinu kapaliny atmosférický tlak p_a. Vzhledem ke kapalině představuje p_a tlak v kapalině způsobený vnější silou, proto celkový tlak v hloubce h pod povrchem kapaliny je

$$p = h \rho g + p_a$$

Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla



Na těleso ponořené do kapaliny působí v důsledku hydrostatického tlaku tlakové síly.

Tlakové síly ve vodorovném směru se navzájem ruší.

(Kdyby se nerušily, pozorovali bychom samovolný pohyb ponořeného tělesa podél volné hladiny.)

Ve svislém směru se v důsledku výšky tělesa projeví rozdíl tlaku v horní a spodní části tělesa.

Vzniká *hydrostatická vztlaková síla F_{vz}*.

$$F_{vz} = S(h+v)\,\rho_k\,g - Sh\,\rho_k\,g = Sv\,\rho_k\,g = V\,\rho_k\,g$$

Tento výsledek platí pro tělesa libovolného tvaru i částečně ponořená a obecně jej vyjadřuje ***Archimédův zákon***

Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno hydrostatickou vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa.

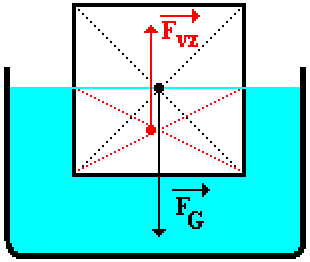
Hydrostatický a atmosférický tlak, vztlaková síla

Vyšetřeme, jak se chová těleso o objemu V a hustoty ρ, je-li zcela ponořeno do kapaliny o hustotě ρ_k.

Na toto těleso působí současně tíhová síla $F_G = V\rho g$ a vztlaková síla $F_{vz} = V\rho_k g$

Mohou nastat tři případy (hustoty ρ a ρ_k představují u nehomogenních těles a kapaliny průměrné hodnoty):

a) Pro $F_G > F_{vz}$ je $\rho > \rho_k$ a těleso **klesá** v kapalině ke dnu.



b) Pro $F_G = F_{vz}$ je $\rho = \rho_k$ a těleso se v kapalině **vznáší.**

c) Pro $F_G < F_{vz}$ je $\rho < \rho_k$ a těleso v kapalině stoupá a vynoří se částečně nad hladinu. Těleso v kapalině **plove.**

Rovnováha nastane za podmínky $V\rho g = V' \rho_k g$, kde V' je objem ponořené části tělesa.

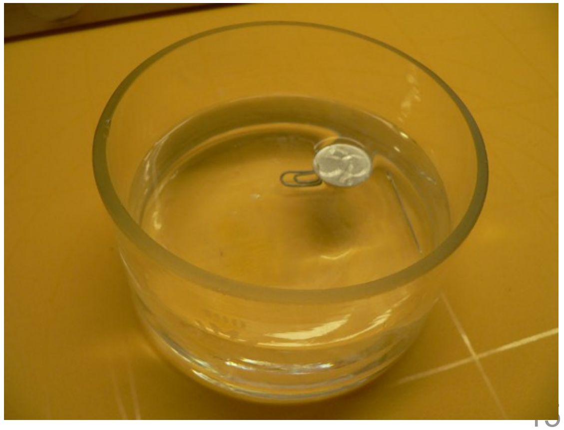
Pozn.: I v plynech působí na tělesa vztlaková síla. Je třeba vzít v úvahu, že hustoty plynů jsou ve srovnání s kapalinami mnohem menší.

Povrchové napětí, kapilarita

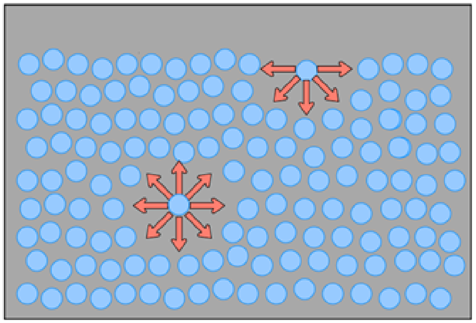
Na rozdíl od plynů se kapaliny vyznačují malými vzdálenostmi mezi molekulami. Střední vzdálenosti molekul jsou řádově asi 0,1 nm, proto na sebe molekuly navzájem působí značnými přitažlivými silami. Tyto síly mají vliv na vlastnosti kapaliny, především na vlastnosti její povrchové vrstvy.

Položíme-li na volný povrch vody tenkou jehlu, sponku nebo minci, nepotopí se, i když mají větší hustotu. Povrch vody se prohne, jako by byl pružný.

Volný povrch kapaliny se chová obdobně jako tenká pružná blána.



PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

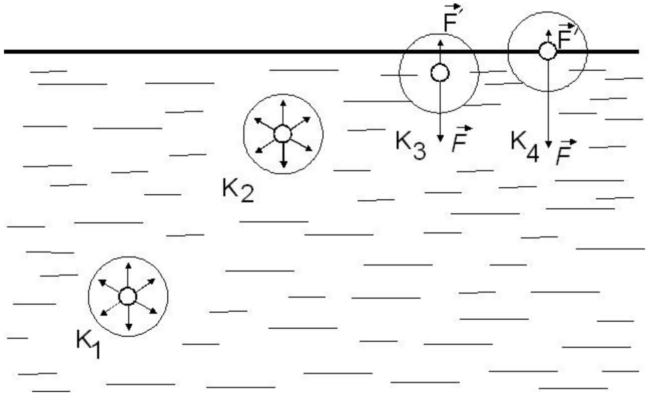


Povrchové napětí, kapilarita

Tento jev lze vysvětlit na základě molekulární struktury kapaliny.

- Molekuly kapaliny na sebe navzájem působí přitažlivými silami. Jejich velikost rychle klesá s rostoucí vzdáleností molekul.

⇨ Na danou molekulu prakticky působí jen molekuly, které jsou v určité oblasti



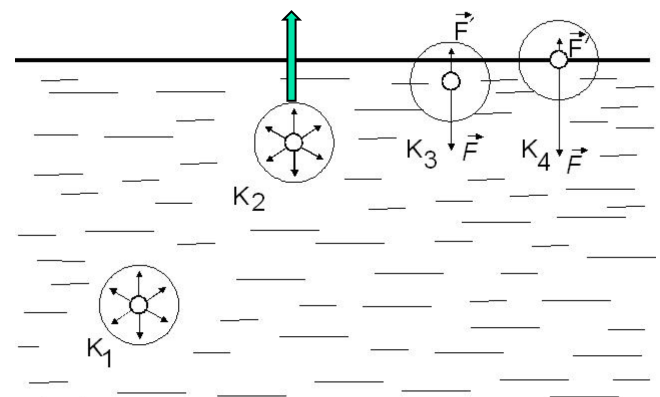
Povrchové napětí, kapilarita

Vrstva molekul, jejichž vzdálenost od volného povrchu kapaliny je menší než poloměr molekulového působení, se nazývá *povrchová vrstva kapaliny*.

Na každou molekulu ležící v povrchové vrstvě kapaliny působí sousední molekuly *výslednou přitažlivou silou*, která má *směr dovnitř kapaliny*.

Při posunutí molekuly z vnitřku kapaliny do její povrchové vrstvy je nutno vykonat práci (proti výsledné přitažlivé síle).

Proto mají molekuly v povrchové vrstvě větší potenciální energii než by měly, kdyby se nacházely uvnitř kapaliny.



Tento rozdíl se nazývá *povrchová energie E_{pov}*.

Je jednou ze složek vnitřní energie kapaliny, to vlastně potenciální energie mezimolekulárních sil.

Povrchové napětí, kapilarita

Zvětší-li se povrch kapaliny daného objemu, vzroste její povrchová energie.

Pokud zvolíme povrchovou energii nulovou při nulovém povrchu, pak

$$E_{pov} = \sigma S \,,$$

kde ***S*** je velikost povrchu a konstanta úměrnosti ***σ*** se nazývá ***povrchové napětí***. Pro vodu σ = 0,073 N/m (J/m^2).

Kapalina daného objemu nabývá vždy takového tvaru, aby obsah jejího povrchu byl nejmenší, a tím byla *minimální povrchová energie*. Při daném objemu má ze všech geometrických útvarů nejmenší obsah povrch koule.

Proto volné kapky (např. mlhy nebo malé kapky rtuti) mají kulový tvar.

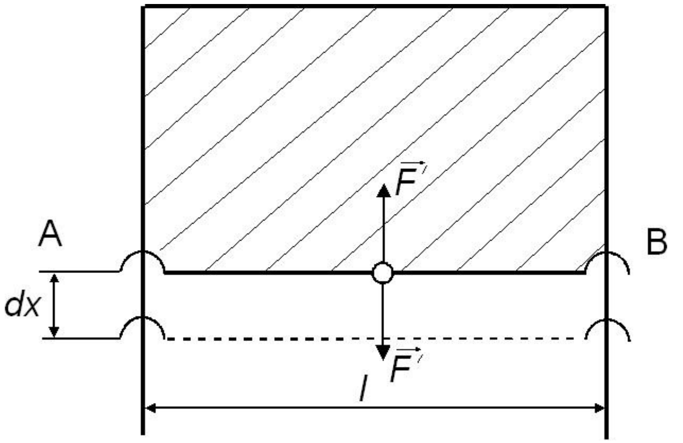
Přiblížíme-li k sobě dvě malé kapky na vodorovné podložce tak, aby se dotkly, splynou. Vzniklá kapka má obsah povrchu menší než součet obsahů povrchů jednotlivých kapek.

Protože povrchová vrstva (membrána) se snaží stáhnout se na co nejmenší velikost, je v ní napětí, které jsme již dříve označili jako ***povrchové napětí σ***.

Povrchové napětí, kapilarita

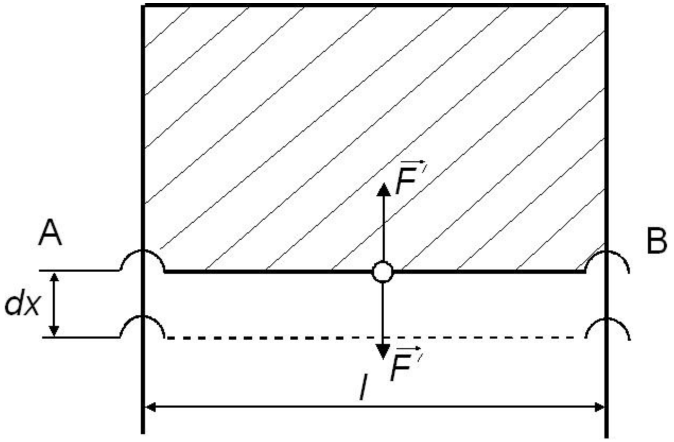
- Povrchové napětí je rovno plošné hustotě povrchové energie membrány

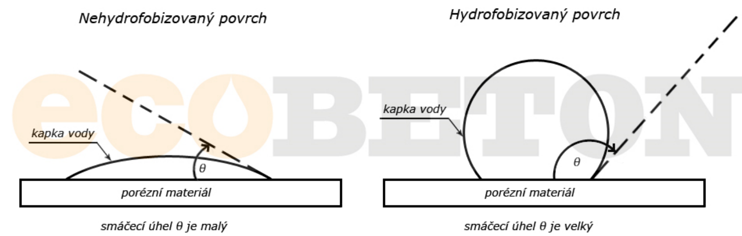
$$\sigma = \frac{dE_{pov}}{dS} \qquad (J/m^2)$$



Povrchové napětí, kapilarita

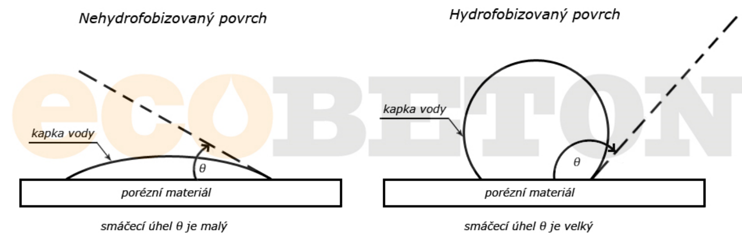
- Na pohyblivou stranu AB působí v každém povrchu povrchová síla o velikosti $F_l = \sigma l$ způsobená povrchovým napětím. Protože vytvořená blána má dva povrchy (horní/dolní popř. levý/pravý) má výsledná povrchová síla $\vec{F}$ velikost $F = 2\sigma l$.





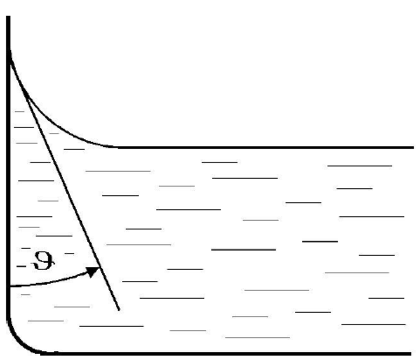
Povrchové napětí, kapilarita

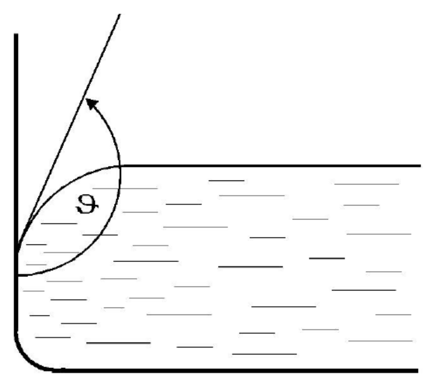
- Povrchové napětí závisí na druhu kapaliny a prostředí nad volným povrchem kapaliny.
- S rostoucí teplotou povrchové napětí kapaliny (vůči danému prostředí) klesá.
- Povrchové napětí kapaliny z chemicky čisté látky značně ovlivňují příměsi v kapalině.

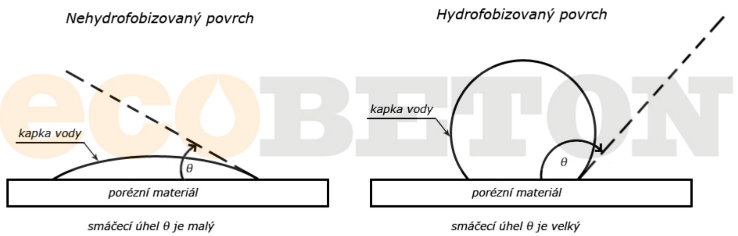


Povrchové napětí, kapilarita

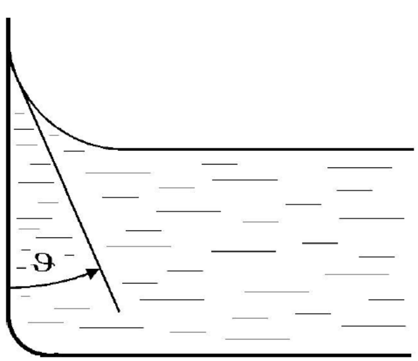
- Důsledkem vlastností povrchové vrstvy kapaliny je, že volný povrch kapaliny se u stěn nádoby zakřiví.
- Nalijeme-li do skleněné nádoby vodu zjistíme, že u stěny je povrch vody dutý (Obr.2.1.-12). Podobně se chová líh ve skleněné nádobě nebo rtuť v měděné nádobě. Říkáme, že v těchto případech kapalina **smáčí** stěny nádoby.
- Nalijeme-li do skleněné nádoby rtuť, je u stěny povrch kapaliny vypuklý. V tomto případě kapalina stěny nádoby **nesmáčí**.

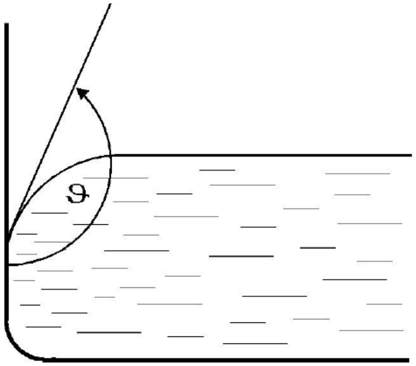




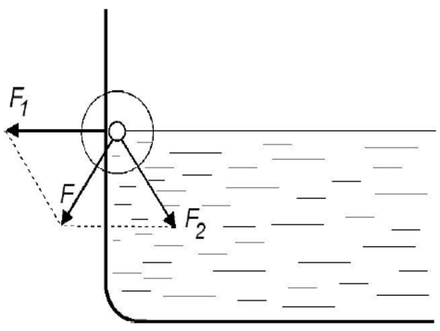


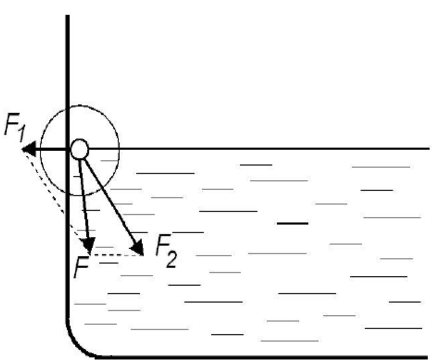
Povrchové napětí, kapilarita

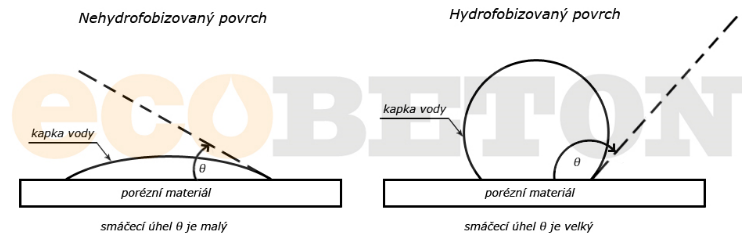




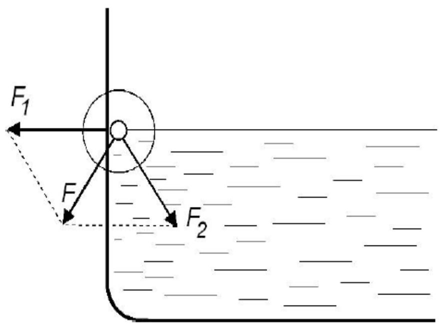
- Zakřivení volného povrchu kapaliny je způsobeno tím, že molekuly kapaliny, které jsou na jejím volném povrchu a současně v blízkosti stěny nádoby nebo jiného pevného tělesa, vzájemně působí nejen mezi sebou, ale také s částicemi pevného tělesa a plynu nad volným povrchem kapaliny.

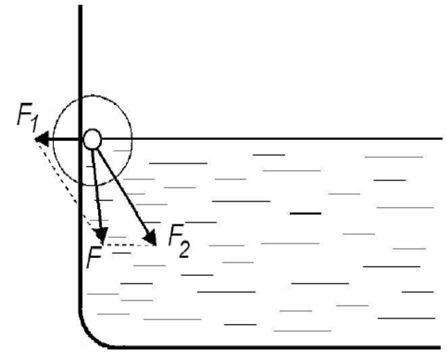




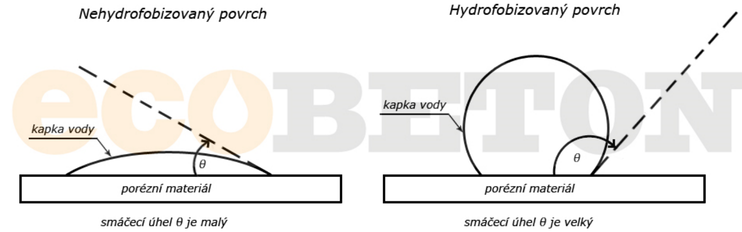


Povrchové napětí, kapilarita

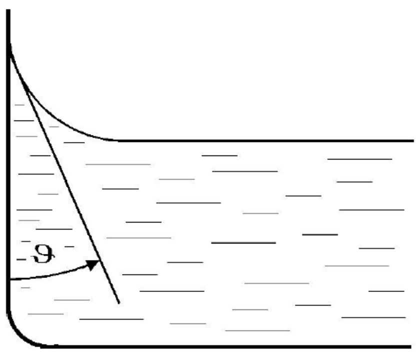


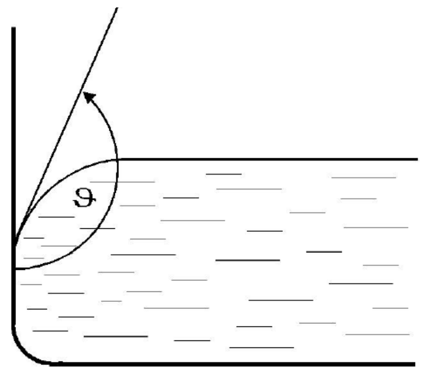


- Kapalina se nachází v rovnovážném stavu, je-li výsledná síla kolmá k volnému povrchu kapaliny. Proto se u stěn nádoby vytváří zakřivený povrch.
- Jestliže síla směřuje ven z kapaliny, pak volný povrch kapaliny u stěn nádoby je dutý *(kapilární elevace)*.
- Jestliže síla směřuje dovnitř kapaliny, je volný povrch vypuklý (*kapilární deprese*).

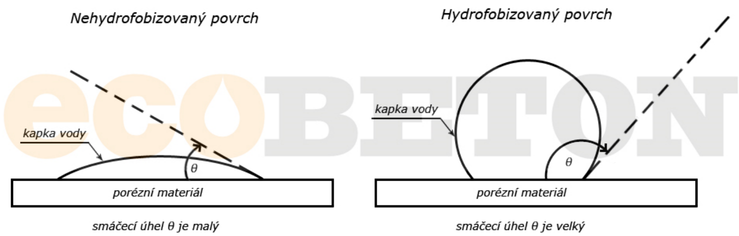


Povrchové napětí, kapilarita





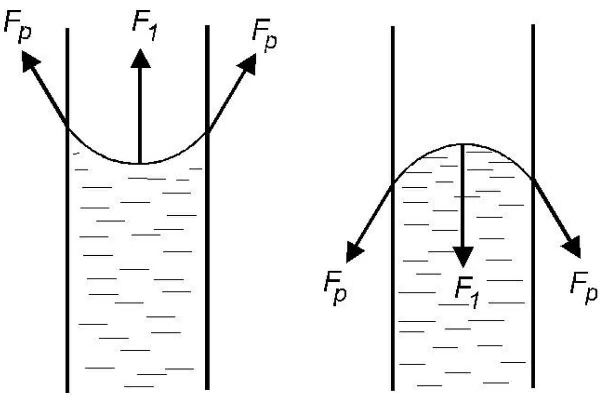
- Úhel ϑ , který svírá povrch kapaliny s povrchem stěny, nazýváme **stykový úhel**. Je-li $\vartheta = 0$, **kapalina dokonale smáčí stěny**, je-li $\vartheta = \pi$, **kapalina dokonale nesmáčí stěny**.
- Pro skutečné kapaliny je $0 < \vartheta < \pi/2$ pro kapaliny, které smáčí stěny nádoby
  $\pi/2 < \vartheta < \pi$ pro kapaliny, které nesmáčí stěny.

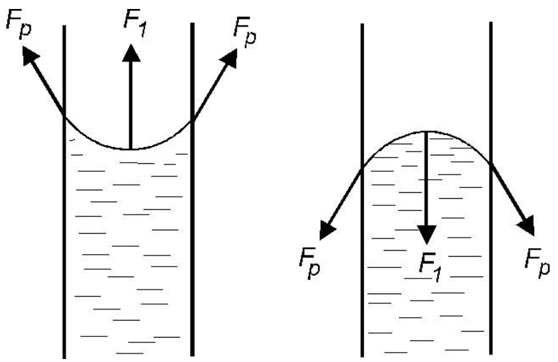


Povrchové napětí, kapilarita

Zakřivení volného povrchu kapaliny způsobuje, že výslednicí povrchových sil je nenulová síla, která působí kolmo na volný povrch kapaliny. Taková situace je znázorněna na pro dutý a vypuklý povrch kapaliny v úzké trubici.

Síla $\vec{F}_1$ vyvolává kapilární tlak p_k. Pro kapilární tlak



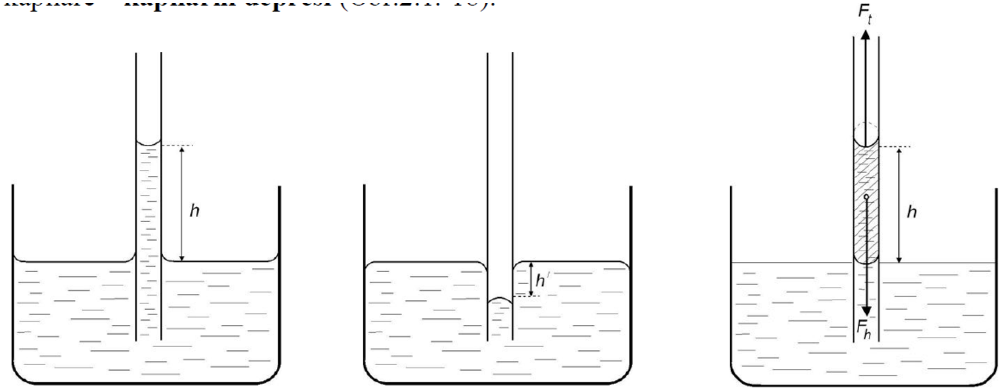


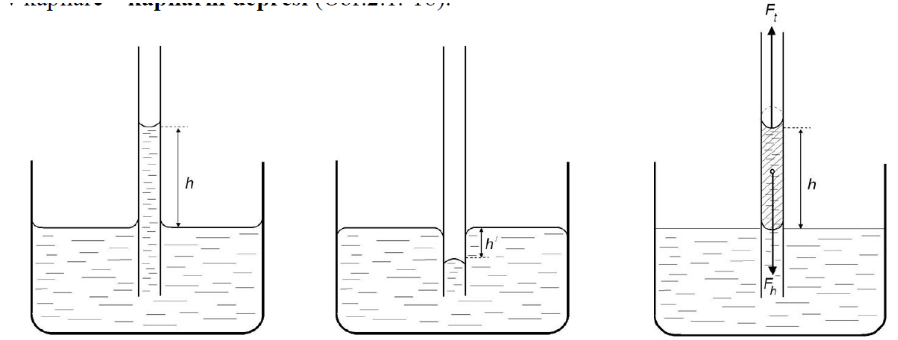
Povrchové napětí, kapilarita

Důsledkem kapilárního tlaku je v úzkých trubicích – kapilárách jev, který se nazývá *kapilarita.* Taková situace je znázorněna na pro dutý a vypuklý povrch kapaliny v úzké trubici.

U kapalin *smáčejících* stěny kapiláry se volná hladina kapaliny v kapiláře zvýší. Jev nazýváme ***kapilární elevace.***

U kapalin *nesmáčejících* stěny kapiláry dochází ke snížení volné hladiny v kapiláře – ***kapilární depresi***.





Povrchové napětí, kapilarita

Provedeme výpočet výšky *h* výstupu hladiny v kapiláře pro kapilární elevaci. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že kapalina dokonale smáčí kapiláru ($\vartheta = 0$). V kapiláře o poloměru *R* se po ponoření vytvoří dutý povrch, který má pro $\vartheta = 0$ tvar polokoule o poloměru *R*. Na kapalinu působí síla $\vec{F}_t$ ve směru ven z kapiláry, směrem dolů tíha sloupce $\vec{F}_G$.

→ výstup kapaliny v kapiláře do takové *výšky h*, až hydrostatický tlak odpovídající výšce *h* je stejný jako kapilární tlak odpovídající zakřivení povrchu. Pro kapalinu *hustoty* ρ tak platí:

$$h\rho g = \frac{2\sigma}{R} \qquad \text{tedy} \quad h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$$

Proudění ideální kapaliny

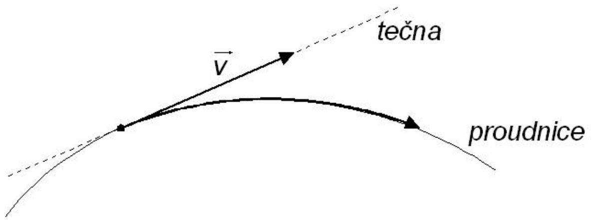
Uspořádaný makroskopický pohyb částic tekutiny označujeme jako proudění tekutiny.

Popis pomocí rychlosti a tlaku v každém místě proudění.

Proudění

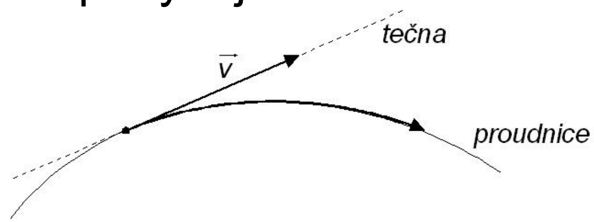
- **ustálené (stacionární)** v libovolném místě rychlost a tlak nezávisí na čase.
- **neustálené (nestacionární)** v libovolném místě rychlost a tlak závisí na čase.

Ke grafickému znázornění proudění tekutiny používáme *proudnic*.



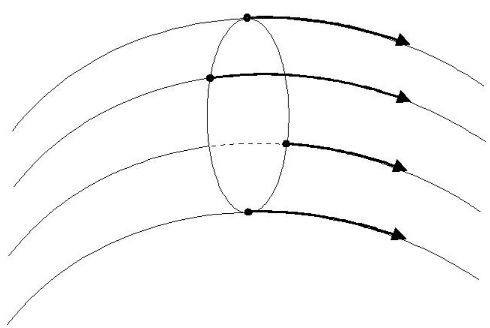
Proudění ideální kapaliny

Proudnice – trajektorie pohybující se částice tekutiny.



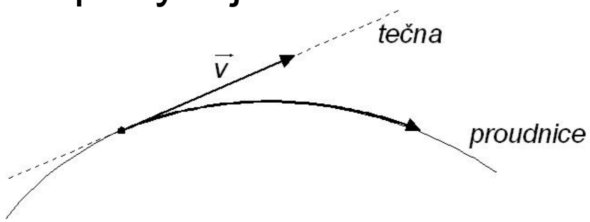
- Každým bodem oblasti proudící tekutiny prochází právě jedna proudnice.
- Proudnice se nemohou navzájem protínat.
- Rychlost pohybující se částice tekutiny má směr tečny k proudnici v libovolném v bodě.

- ***proudová trubice***
- ***proudové vlákno***



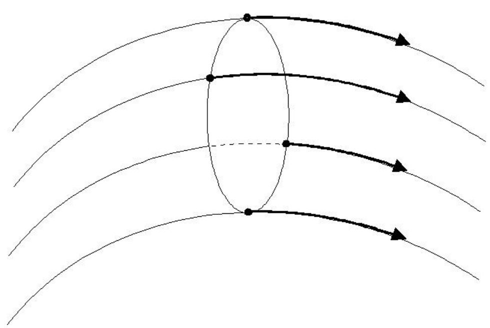
Proudění ideální kapaliny

Proudnice – trajektorie pohybující se částice tekutiny.



- Každým bodem oblasti proudící tekutiny prochází právě jedna proudnice.
- Proudnice se nemohou navzájem protínat.
- Rychlost pohybující se částice tekutiny má směr tečny k proudnici v libovolném v bodě.

- ***proudová trubice***
- ***proudové vlákno***



Při proudění ideální tekutiny je ve všech bodech průřezu proudové trubice, kolmého k její ose, rychlost stejná.

Proudění ideální kapaliny

Průřezem S vybrané proudové trubice při velikosti rychlosti proudící kapaliny v proteče za 1 sekundu objem kapaliny $S.v$. Tato veličina se nazývá ***objemový průtok*** Q_V .

$$Q_V = S.v$$

Je-li hustota kapaliny ρ v místě průřezu S stejná, je ***hmotnostní průtok*** Q_m, což je hmotnost kapaliny proteklé průřezem S proudové trubice za 1 sekundu, dán vztahem

$$Q_m = S.v.\,\rho$$

Jednotkou je 1 $kg.s^{-1}$.

Popis pomocí rychlosti a tlaku v každém místě proudění.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA Masarykova univerzita

Proudění ideální kapaliny

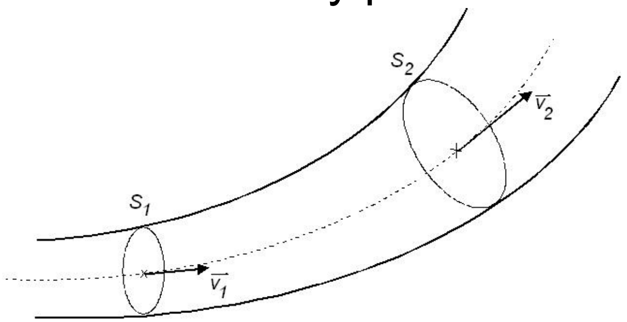
Kapalina nemůže stěnami trubice ani vytéci, ani přitéci ⇒ musí být hmotnostní průtok pro libovolný průřez proudové trubice stálý:

$$Q_m = \quad \boldsymbol{S.v.\,\rho = konst}$$

Tato rovnice se nazývá ***rovnice spojitosti*** neboli ***kontinuity*** a je vyjádřením zákona zachování hmotnosti pro ustálené proudění kapaliny.

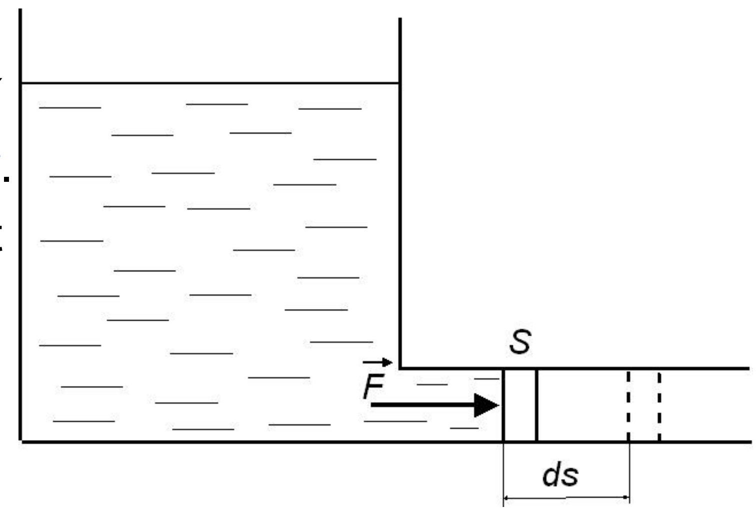
V případě ideální kapaliny, která je dokonale nestlačitelná, je při stálé teplotě *ρ = konst* pak pro *ideální kapalinu* můžeme rovnici kontinuity psát ve tvaru

$$\boldsymbol{S.v = konst} \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$



Proudění ideální kapaliny

Kapalina pod tlakem může konat práci. Má tedy ***potenciální energie tlaková.***



Velká nádoba s kapalinou, ze které vychází tenká trubice s pístem o plošném obsahu *S*. Tlak kapaliny lze v místech pístu považovat *za stejný*.

Při posunutí *ds* vykoná síla *F= p.S* práci

$$dA = Fds = pSds = pdV$$

Tato práce je číselně rovna úbytku *potenciální energie tlakové* dW_{tl}.

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Proudění ideální kapaliny

Kinetická energie proudící kapaliny objemu *dV* s hustotou ***ρ***:

$$dW_k = ½\, v^2 dm = ½\, v^2 \rho dV$$

Potenciální energie tíhová proudící kapaliny objemu *dV* s hustotou ***ρ***

$$dW_p = g\, h\, dm = h\, g\, \rho dV$$

(pozor na volbu nulové hodnoty dW_p)

Navíc je zde ***potenciální energie tlaková***

$$dW_{tl} = p\, dV$$

Celková mechanická energie proudící kapaliny je pak:

$$dW = dW_k + dW_p + dW_{tl}$$

Proudění ideální kapaliny

Hustota energie je energie připadající na jednotkový objem kapaliny, tedy:

$$dw_k = \tfrac{1}{2}\, v^2 \rho \qquad dw_p = h\, g\, \rho \qquad dw_{tl} = p$$

Protože v ideální kapalině se nemůže mechanická energie proudící kapaliny měnit v jiné formy energie, bude hustota celkové mechanické energie (tj. celková mechanická energie jednotkového objemu) proudící ideální kapaliny stálá:

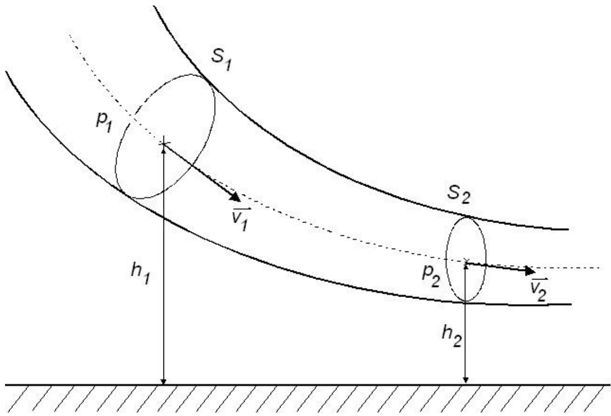
$$dw = dw_p + dw_{tl} + dw_k = konst$$

tj.:

$$\boxed{p + h\, g\, \rho + \tfrac{1}{2}\, \rho\, v^2 = konst}$$

Označovaná jako ***Bernoulliova rovnice***.

Proudění ideální kapaliny



Event. $p_1 + h_1 g \rho + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + h_2 g \rho + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = konst$

Pro vodorovnou trubici (h_1=h_2) pak

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = konst$$

nergie připadající na jednotkový objem kapaliny, tedy:

$$dw_k = \frac{1}{2} v^2 \rho \qquad dw_p = h g \rho \qquad dw_{tl} = p$$

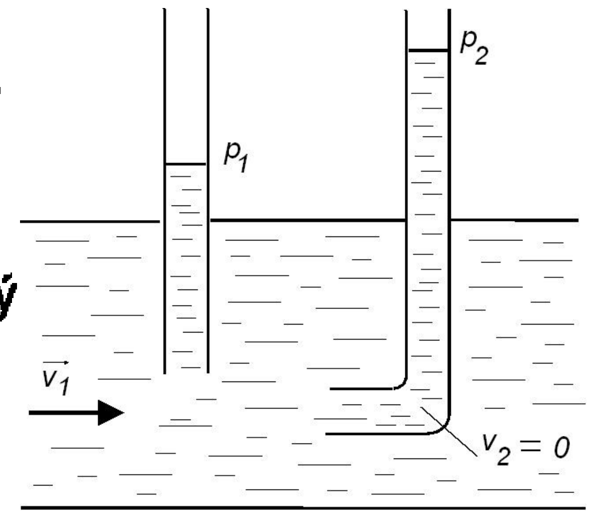
Zúžení trubice, kterou proudí kapalina, vyvolá zmenšení tlaku kapaliny, byl nazván *hydrodynamický paradox*.

Pro reálné kapaliny lze Bernoulliovu rovnici použít jen přibližně.

Pro plyny, kde se změnou tlaku se mění i jejich hustota, jsou rovnice proudění plynu složitější. Všeobecně však i pro proudící plyny ve vodorovné trubici platí, že v užších průřezech trubice vzrůstá jejich rychlost a klesá tlak.

Proudění ideální kapaliny

- Pomocí Bernoulliovy rovnice lze navrhnout měření rychlosti proudící ideální kapaliny. Ve vodorovné trubici, ve které proudí Kapalina rychlostí v_1 jsou dvě manometrické trubice – jedna přímá, jedna zahnutá. První manometrická trubice registruje hodnotu tlaku p_1 v proudící kapalině. V druhé manometrické trubici, která má otvor obrácený proti proudu kapaliny, klesne rychlost proudění v_2 na nulu, a proto měřený tlak p_2 určuje celkovou mechanickou energii jednotkového objemu kapaliny. Je tedy $p_2 > p_1$.

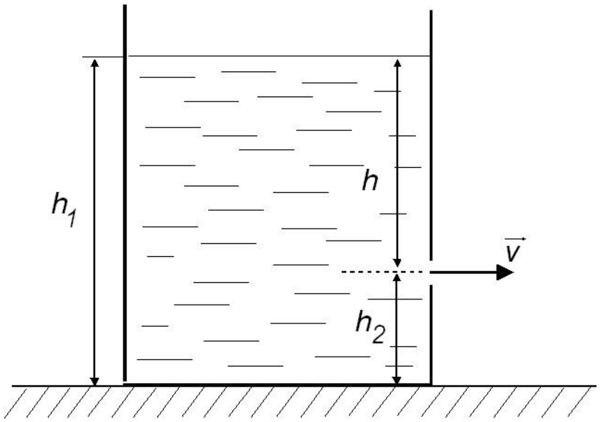


Bernoulliova rovnice pak má tvar $p_1 + ½ \rho v_1^2 = p_2$

Pro rychlost proudění pak $v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}$

Pitotova trubice

Proudění ideální kapaliny



- Výtok malým otvorem ve stěně nádoby

Otvor je ve stálé hloubce h pod volným povrchem kapaliny (hladinu kapaliny v nádobě udržujeme ve stálé výšce h_1), kde $h = h_2 - h_1$.

Atmosférický tlak je p_a . Porovnáme celkové mechanické energie jednotkových objemů kapaliny na volné hladině (ve výšce h_1) a v hloubce h pod hladinou (ve výšce h_2 nad povrchem Země):

$$p_a + h_1 g \rho = p_a + h_2 g \rho + ½ \rho v^2$$

Pro velikost výtokové rychlosti pak

$$v = \sqrt{2gh}$$

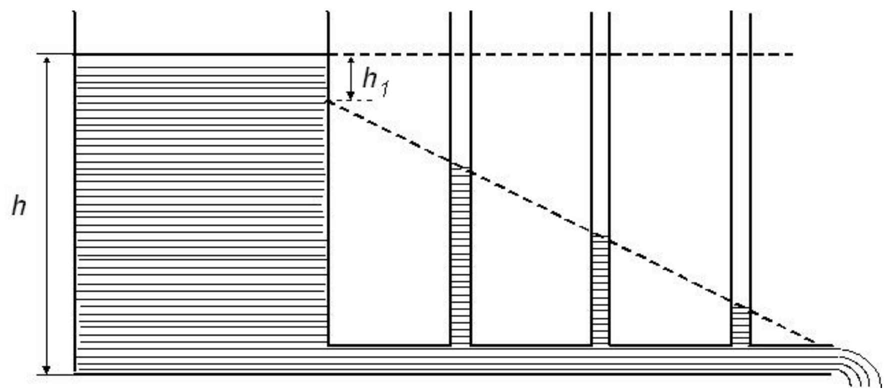
(stejně jako u volného pádu, trajektorií je parabola jako u vodorovného vrhu)

Vnitřní tření

Při proudění **reálné** (skutečné) kapaliny se objevují v kapalině síly brzdící její pohyb, které mají původ ve vzájemném silovém působení částic kapaliny.

Tyto síly nazýváme ***síly vnitřního tření***.

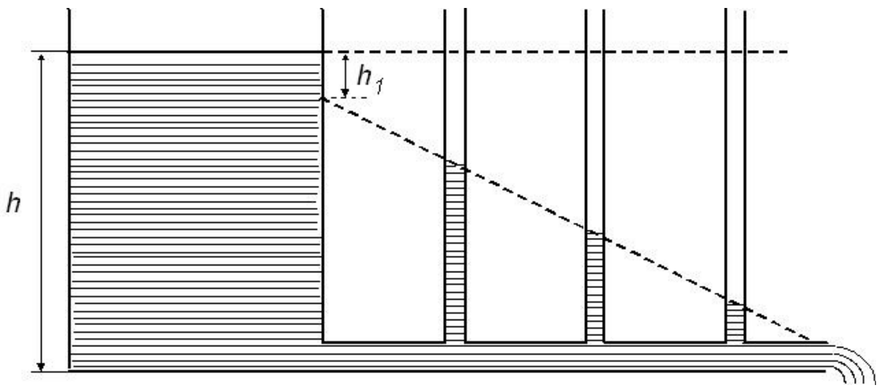
Při uzavřeném ventilu bude výška ve všech trubicích stejná = spojené nádoby.



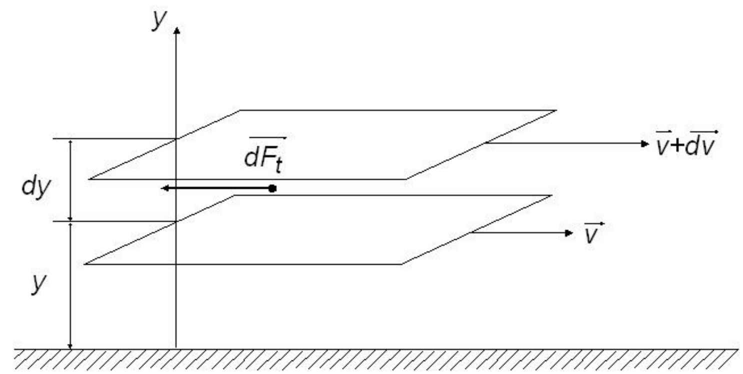
V ideální kapalině, pak při otevření výtokového otvoru by vytékala rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gh}$ (platí Bernoulliova rovnice) a v manometrických trubicích by voda nevystoupila vůbec (veškerá tlaková energie by se přeměnila

Vnitřní tření

Ve skutečnosti při otevření výtokového otvoru poklesne výška sloupců v manometrických trubicích a ustálí se, jak je znázorněno na Obr.



Protože trubice má stálý průřez, je podle rovnice kontinuity velikost střední rychlosti proudící vody po celé délce trubice stejná. Je ale menší než rychlost, kterou by vytékala voda přímo z otvoru ve stěně. Podél trubice dochází k rovnoměrnému poklesu tlaku. Tlak vody u výtokového otvoru z trubice roven nule. Spojnice středů volných hladin v manometrických trubicích protne stěnu nádoby v hloubce h_1 pod volnou hladinou v nádobě. Tato hloubka určuje část tlakové energie, která se změnila v kinetickou energii vytékající vody. Zbývající tlaková energie se mění postupně podél celé trubice ve vnitřní energii kapaliny (zvýší se teplota vytékající kapaliny).Část tlakové energie, která se změní na vnitřní energii proudící kapaliny, je rovna práci vykonané silami vnitřního tření v proudící kapalině.

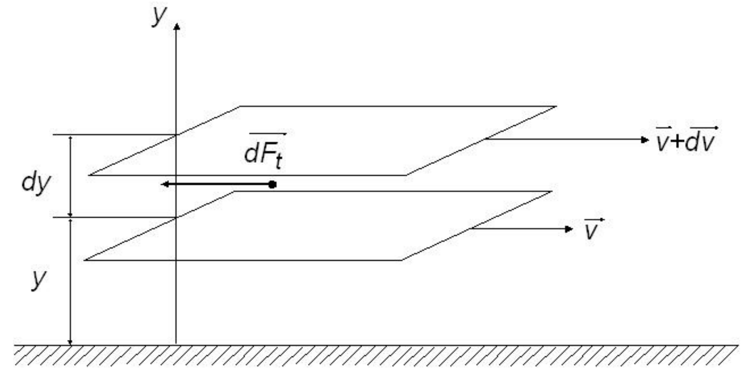


Vnitřní tření

- Při proudění reálné kapaliny v jednotlivých bodech určitého průřezu nejsou rychlosti stejné.
- Kapalina přilne ke stěnám trubice a vytvoří se *mezní vrstva kapaliny*, která je vůči stěnám trubice v klidu.
- Směrem od stěny k ose trubice rychlost proudění roste a nabývá maximální velikosti v ose trubice.

Proudící kapalinu si představujeme rozdělenou na vrstvy. Mezi sousedními vrstvami kapaliny, které mají různé rychlosti, vznikají ***tečná napětí*** $\sigma_t = \frac{dF_t}{dS}$.
Jev spočívající ve vzniku tečného napětí mezi vrstvami pohybujícími se různými rychlostmi nazýváme ***vnitřní tření kapaliny***.
Rychlostní spád $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ a tečné napětí σ_t jsou přímo úměrné.
Takovéto kapaliny jsou označovány jako *Newtonovské*.

$\sigma_t = \eta \frac{dv}{dv}$ kde konstanta úměrnosti η je veličina ***dynamická viskozita.***



Vnitřní tření

- $\sigma_t = \eta \frac{dv}{dy}$ kde konstanta úměrnosti η je veličina ***dynamická viskozita.***

  Jednotkou je 1 Pa.s.

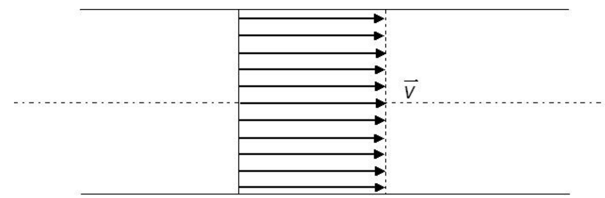
  Kinematická viskozita $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (1 $m^2.s^{-1}$)

- Viskozita kapalin závisí na teplotě a tlaku. S rostoucí teplotou viskozita kapalin klesá, s rostoucím tlakem naopak vzrůstá.
- Vliv tlaku na viskozitu je však zanedbatelný, s výjimkou zvlášť vysokých tlaků.

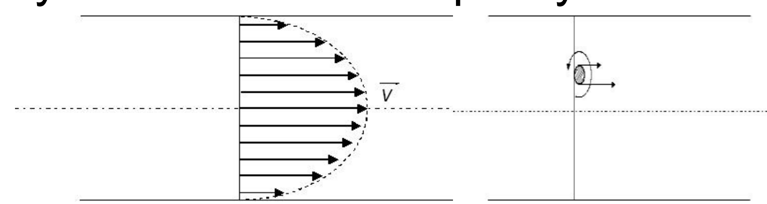
Dynamická viskozita většiny kapalin je řádově 10^{-3} Pa.s. Např. voda za normálního tlaku při 20°C má dynamickou viskozitu 1,002.10^{-3} Pa.s, při 0 °C 1,787.10^{-3} Pa.s a při 100 °C 0,283.10^{-3}Pa.s. Větší dynamickou viskozitu mají kapaliny jako oleje nebo glycerin. Glycerin při 20 °C má dynamickou viskozitu 1,48 Pa.s, při 0 °C 12,1 Pa.s a při 100 °C 0,012 Pa.s.

Laminární a turbulentní proudění

Proudění ideální kapaliny (bez vnitřního tření) je *nevírové* (potenciálové). Platí při něm zákon zachování mechanické energie. Částice kapaliny při tomto proudění konají jen postupný pohyb. Otáčivý pohyb není možný. Rychlost proudění je ve všech bodech průřezu trubice stejná.



Proudění reálné kapaliny není potenciálové, je vždy *vírové*. Částice kapaliny kromě posuvného pohybu konají i otáčivý pohyb. Pro malé rychlosti proudění je proudění reálné kapaliny ***laminární***. Je charakterizováno tím, že ve vybraném kruhovém průřezu trubice rozložení rychlostí je v osovém řezu parabolické. Jednotlivé vrstvy (proudové trubice) se nepromíchávají.

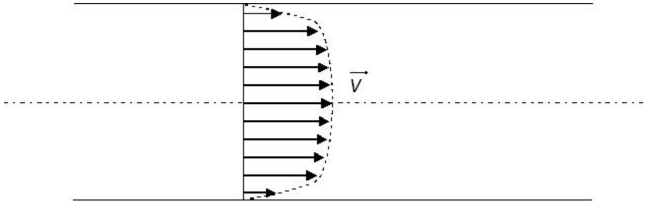


Objemový průtok Q_v je dán ***Poisseuillovým zákonem***:

$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}.$$

Laminární a turbulentní proudění

- Zvyšujeme-li rychlost proudění, začne převládat rušivý vliv vírů. Proudová vlákna se nepravidelně proplétají, proudění přechází v ***turbulentní proudění***. Při turbulentním proudění dochází k promíchávání kapaliny.



Rychlost je v téměř celé vnitřní části trubice přibližně stejná až na tenkou vrstvu při stěně, kdy prudce roste přibližně úměrně se vzdáleností od stěny. Střední rychlost v průřezu trubice je mnohem bližší maximální rychlosti než při laminárním proudění.

Pro posouzení charakteru proudění reálné kapaliny používáme bezrozměrnou veličina, tzv. *Reynoldsovo číslo Re*.

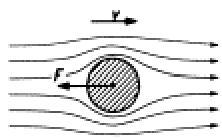
$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

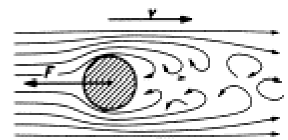
kde v je velikost střední rychlosti částic kapaliny v trubici o průměru d a ν je kinematická viskozita kapaliny

Laminární a turbulentní proudění

Kritické Reynoldsovo číslo Re_k *~2000* → laminární proudění přestává být stabilní a může se změnit na turbulentní.

Podobné závěry platí i pro proudění reálných plynů.





Odpor prostředí při proudění

Při vzájemném pohybu tělesa a tekutiny dochází k přemisťování částic tekutiny a uplatňují se třecí síly. Tento jev se nazývá ***odpor prostředí***. Sílu, která vzniká při vzájemném pohybu tělesa a tekutiny, nazýváme *odporová hydrodynamická resp. aerodynamická síla*, působí proti pohybu.

- Pro malé rychlosti (proudění laminární) je odpor prostředí způsoben vnitřním třením.
- Velikost odporové síly je přímo úměrná velikosti rychlosti tělesa vzhledem k prostředí.
- Závislost na tvaru se uplatňuje méně.

Pro velikost odporové síly a těleso tvaru koule o poloměru platí *Stokesův vztah*:

$$F_o = 6\pi\eta R v\,,$$

kde η je dynamická viskozita a *v* relativní rychlost pohybu tělesa vzhledem k tekutině

Měření viskozity -Na kuličku při pohybu působí tři síly tíhová síla, hydrostatická vztlaková síla a hydrodynamická odporová síla - při ustálené rychlosti – rovnováha sil.

Odpor prostředí při proudění

Pro vyšší rychlosti (při turbulentním proudění), kdy za tělesem se vytváří zřetelné víry, odporová síla vzrůstá. Newton odvodil pro velikost odporové síly vztah nazývaný ***Newtonův vzorec***:

$$F_o = C \frac{1}{2} \rho S v^2$$

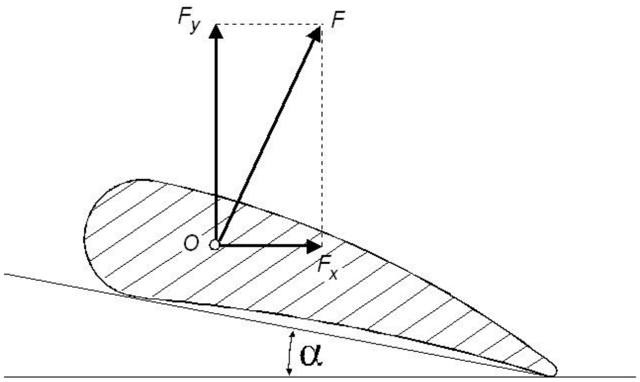
kde *C je součinitel odporu*, *S obsah plochy příčného řezu tělesa*, *ρ hustota tekutiny* a *v relativní rychlost* pohybu tělesa vzhledem k tekutině.

Součinitel odporu C závisí na tvaru tělesa.

Těleso	**Činitel C_x**
aerodynamický tvar	0,037
vypuklá polokoule	0,33
koule	0,50
rovná tenká deska	1,2
dutá polokoule	1,3

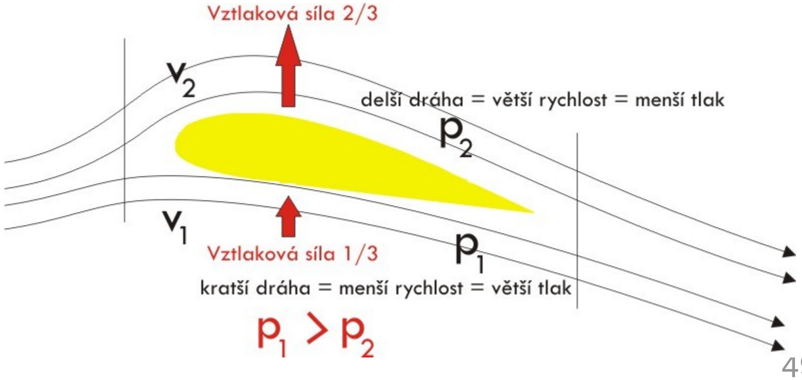
Odpor prostředí při proudění

Při pohybu nesouměrného tělesa vzhledem k pohybu v prostředí (např. křídlo letadla) vzniká síla, která na těleso působí ve směru odchýleném od směru pohybu.



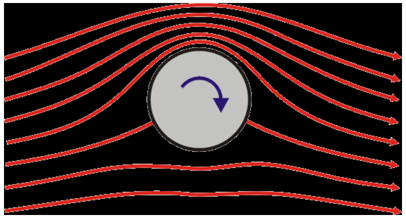
Její složka ve směru pohybu orientovaná proti pohybu je *odporová hydrodynamická* resp. *aerodynamická síla.*

Síla k ní kolmá – *vztlaková hydrodynamická* resp. *aerodynamická síla* směřuje nad těleso a nadzvedává jej.



Odpor prostředí při proudění

Magnusův jev – golfový, tenisový míček – let s rotací.



Je-li rychlost tělesa vzhledem k tekutině větší než rychlost šíření zvuku v dané tekutině, jsou zákonitosti proudění značně odlišné od zákonitostí proudění s rychlostmi menšími. Velikost odporové síly je přibližně úměrná třetí odmocnině velikosti rychlosti pohybu tělesa vzhledem k tekutině. Vytváří se tzv. rázová vlna. Ta je např. příčinou silných zvukových třesků u nízko letících nadzvukových letadel.