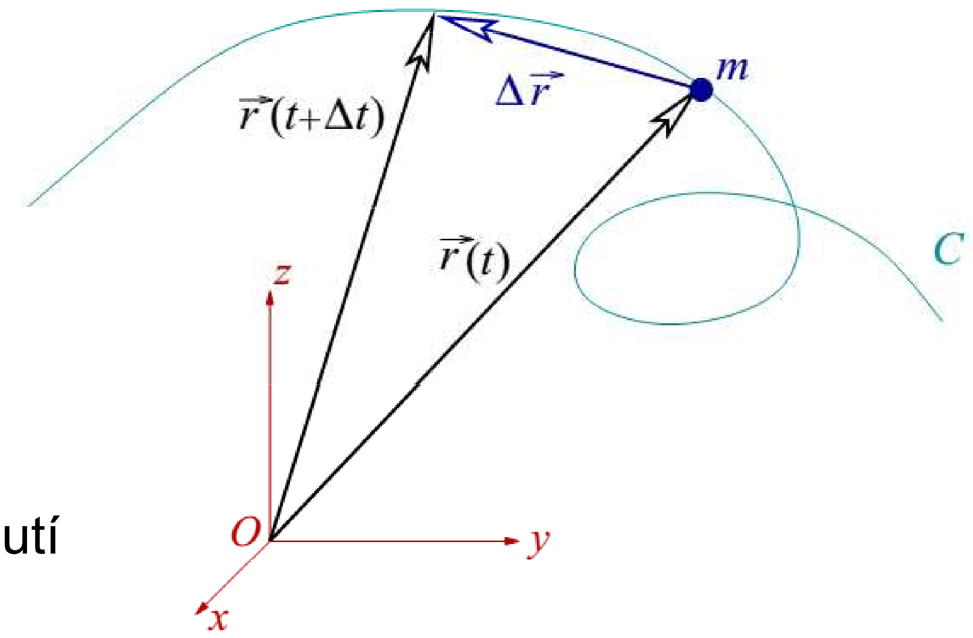
Popis časového vývoje

- Pohyb hmotného bodu je plně popsán závislostí polohy na čase.
- Otázkou je, jak zjistit vektorovou funkci času ~r (t), která pohyb částice
- pln určuje.
- Zákony mechaniky fungují tak, že na základě znalosti interakcí částice s okolními objekty a znalosti její polohy ve dvou
- okamžicích lze v principu určit její polohu v libovolném okamžiku.
- Ukazuje se, že důležitými pojmy pro popis pohybu částice jsou rychlost
- a zrychlení.

- **r**(t) popisuje závislost polohového vektoru částice na čase.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

- Koncový bod vektoru **r** , vedený z počátku soustavy souřadnic, opisuje křivku C , nazvanou trajektorie hmotného bodu.



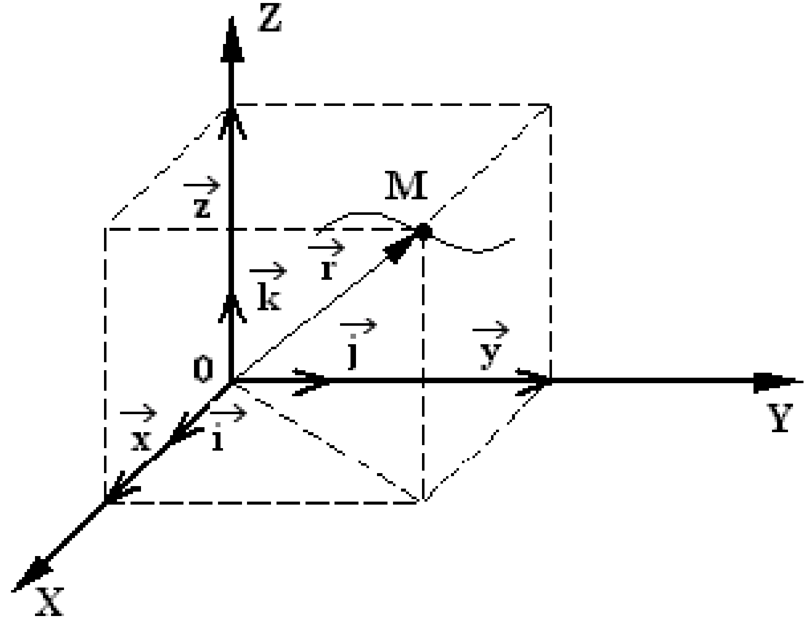
Změna vektoru - posunutí

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t).$$

TRAJEKTORIE HMOTNÉHO BODU

- Poloha hmotného bodu M je určena polohovým vektorem

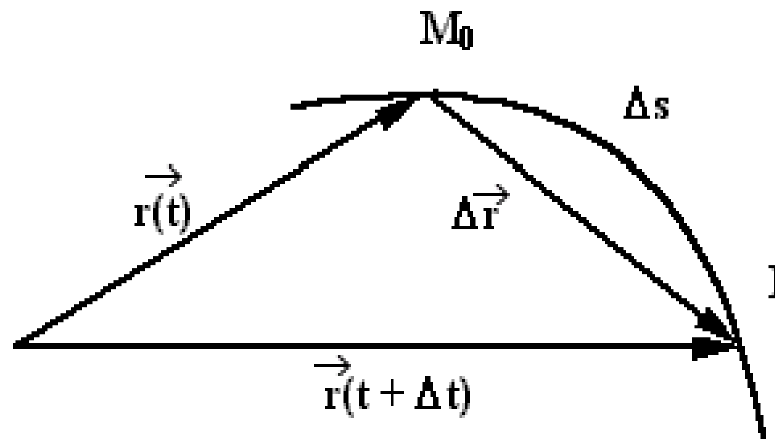
$$\vec{r} = (x, y, z) \quad [m]$$



$\Delta r \neq \Delta s \qquad d\vec{r} = ds$

→ obecně dráha ≠ změna polohového vektoru

- Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ (v limitě)
  např. $v_x = dx/dt$.
  Má směr tečný k dráze v daném okamžiku.



Rychlost

To, že ujedeme stejnou dráhu za stejný čas není zárukou stejné okamžité rychlosti v průběhu tohoto pohybu

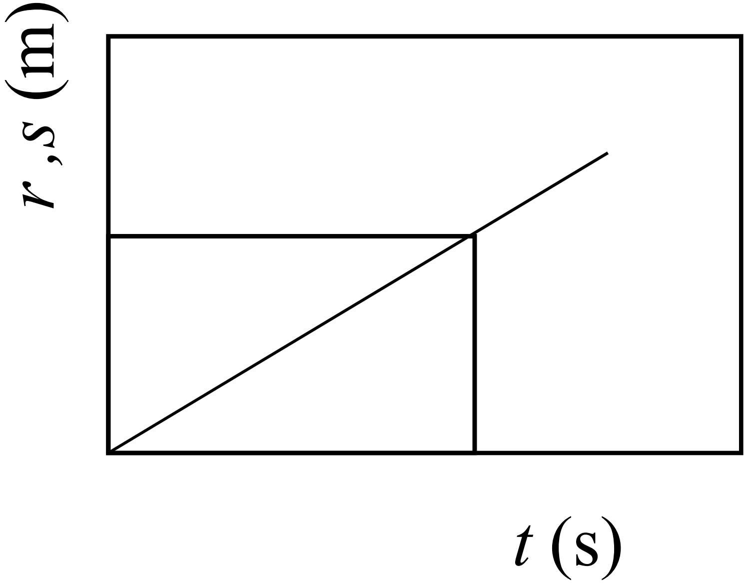
- Průměrná rychlost

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{celková\, dráha}{celkový\, čas}$$

Okamžitá rychlost

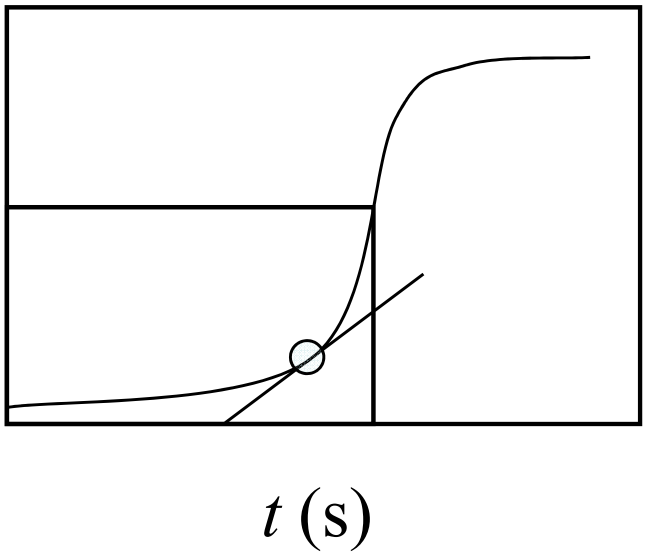
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \left[ms^{-1}\right]$$

- Obecně se v průběhu pohybu mění velikost (i směr).



$$v = \bar{v}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$



$$v \neq \bar{v}$$

$$\frac{dr}{dt} \neq \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

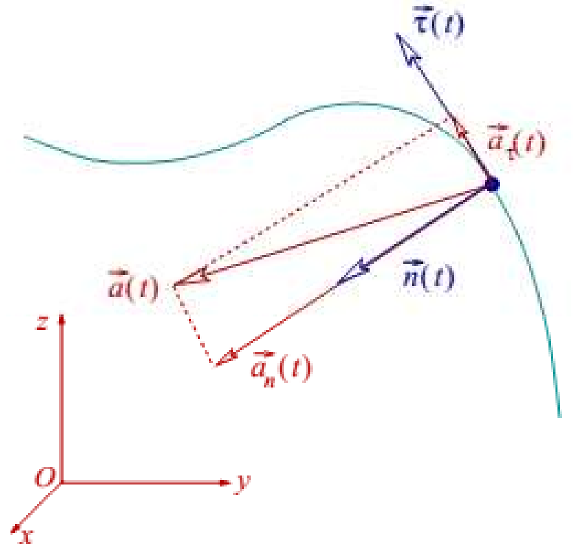
Rychlost, zrychlení

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}y^2(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}z^2(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

Tečné a normálové zrychlení



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t)\,,$$

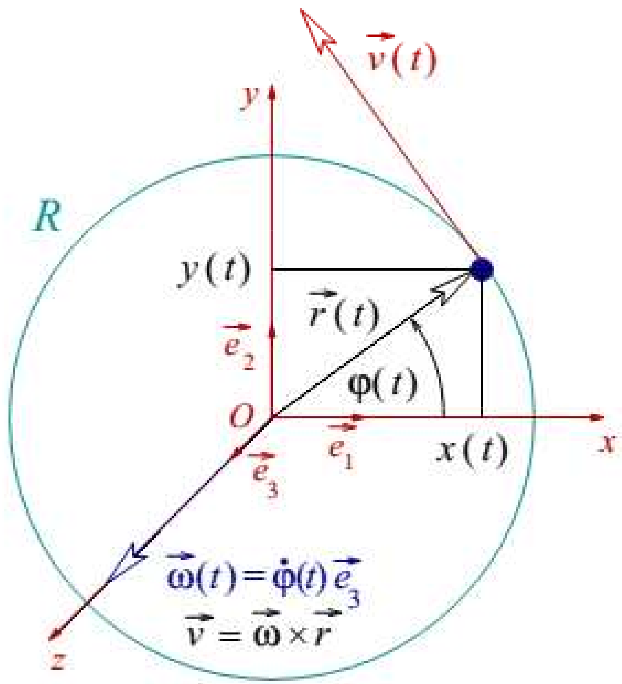
$$\vec{a}_\tau(t) = \dot{v}(t)\vec{\tau}(t)\,,\ \vec{a}_n(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)}\,\vec{n}(t)$$

Úhlové veličiny

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}(t)$$

$$\vec{a}_n = R\omega^2(t)\vec{n}(t)$$



Pohyb po kružnici

Zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \left[ms^{-2}\right]$

- Je to “růst rychlosti s časem”.

- Ačkoli jde o běžný vektor, je účelné (především pro pohyb kruhový) rozložit zrychlení vzhledem ke směru rychlosti obecného pohybu na tečné a normálové (orientace vůči pohybu, nikoliv vůči souřadnému systému)

Budiž $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}_0$ potom

$$\vec{a} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau}_0)}{dt} = \vec{\tau}_0 \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \vec{n}_0 \cdot \frac{v^2}{r} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Zrychlení normálové (dostředivé)

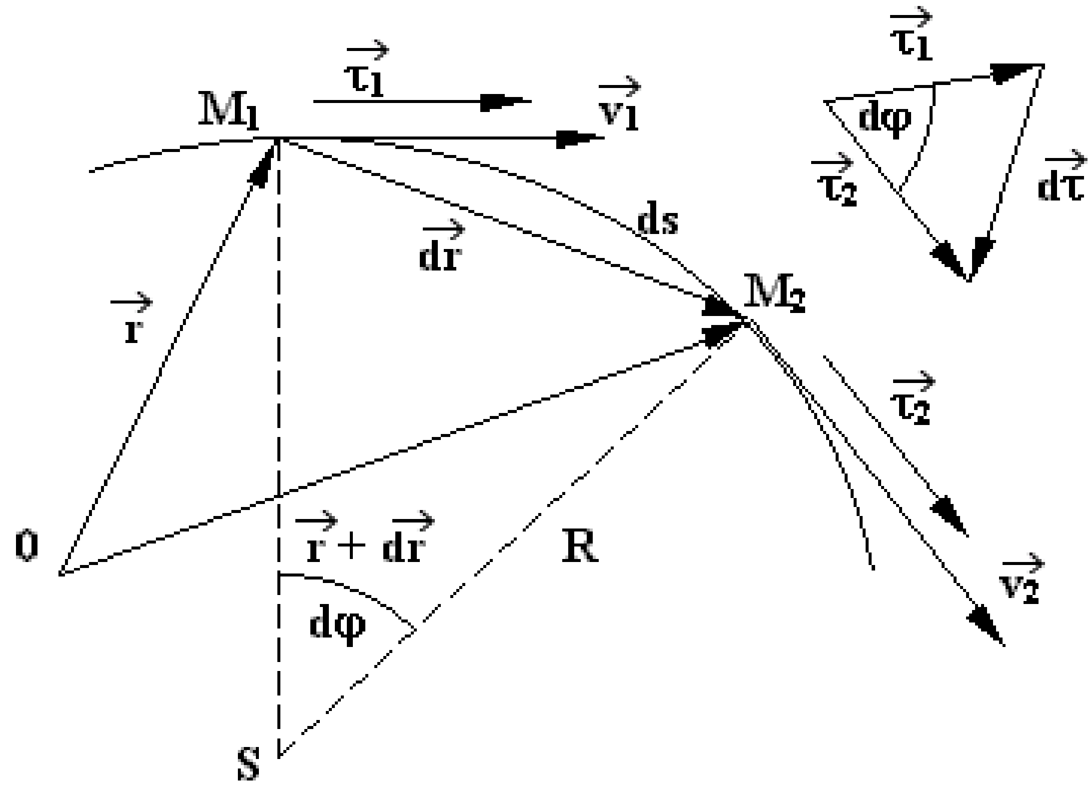
$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}_0}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \cdot \frac{d\tau_0}{ds} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}_0 \quad = \vec{a}_d$$

Směr dává normála, velikost dává úhel

$$d\vec{\tau}_0 = \vec{n}_0 \cdot d\varphi$$

$$ds = R \cdot d\varphi$$

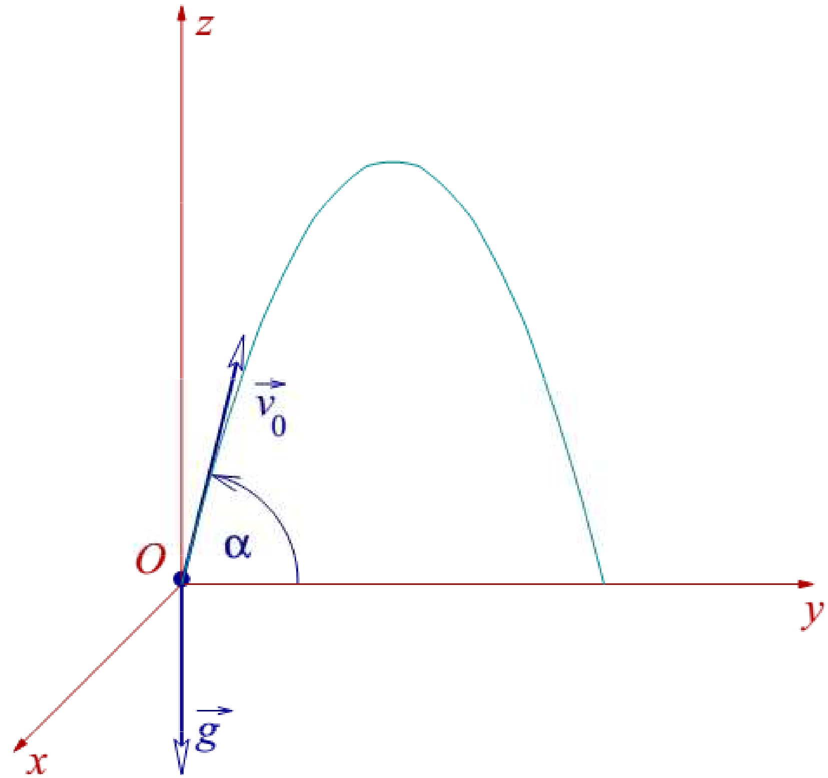
Definice radiánu !



Obrácená úloha: Od zrychlení k trajektorii

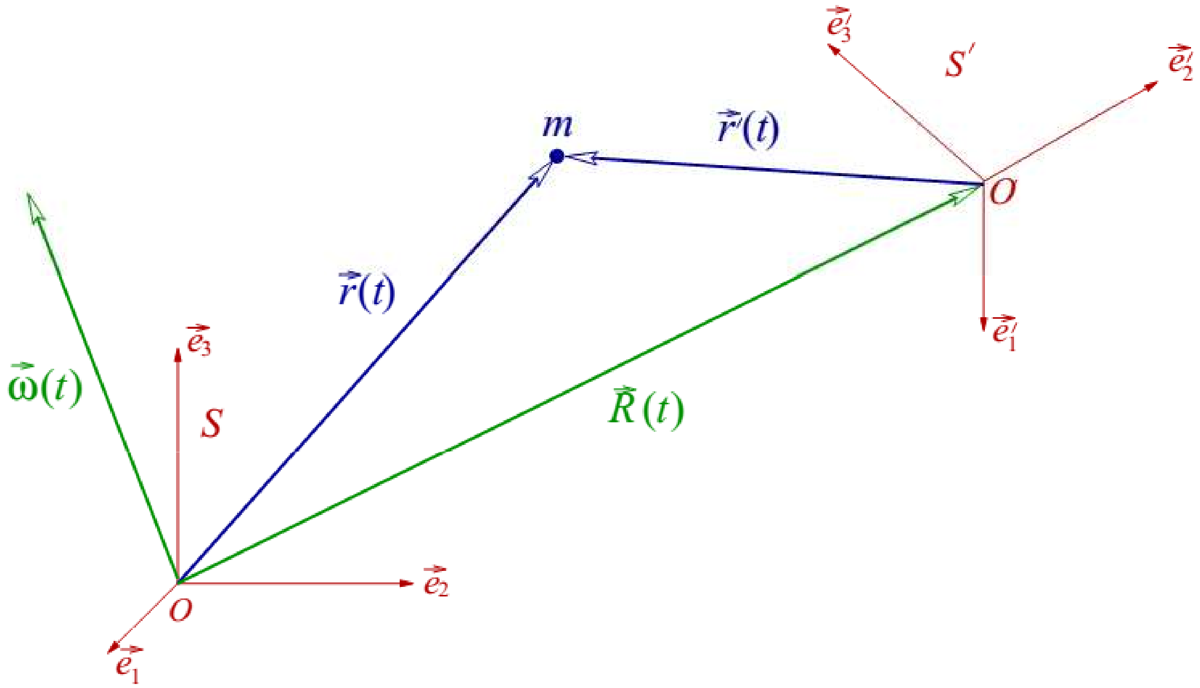
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int^{t} \vec{a}(\tau) d\tau,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_{0}^{t} \vec{v}(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$



$$x(t) = 0 \ , \ y(t) = v_0 t \cos\alpha \ , \ z(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \ .$$

$$t = t' \; .$$



$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_u(t)$$

$$\vec{a}_u = \vec{A}(t) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t)$$

$$\vec{a}_u = \vec{A}(t) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) + \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t)$$

Unášivé zrychlení $\vec{a}_u(t)$ je součtem zrychlení $\vec{A}(t)$ translačního pohybu soustavy $\mathcal{S}'$ vzhledem k $\mathcal{S}$ a zrychlení pohybu rotačního, složeného z příspěvků $-\vec{a}_C = 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$, $-\vec{a}_{OD} = \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'(t))$ a $\vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}'(t)$. Výrazy

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t), \quad \vec{a}_{OD} = -\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)) \quad \text{a} \quad \vec{a}_E = \varepsilon(t) \times \vec{r}\,'(t)$$

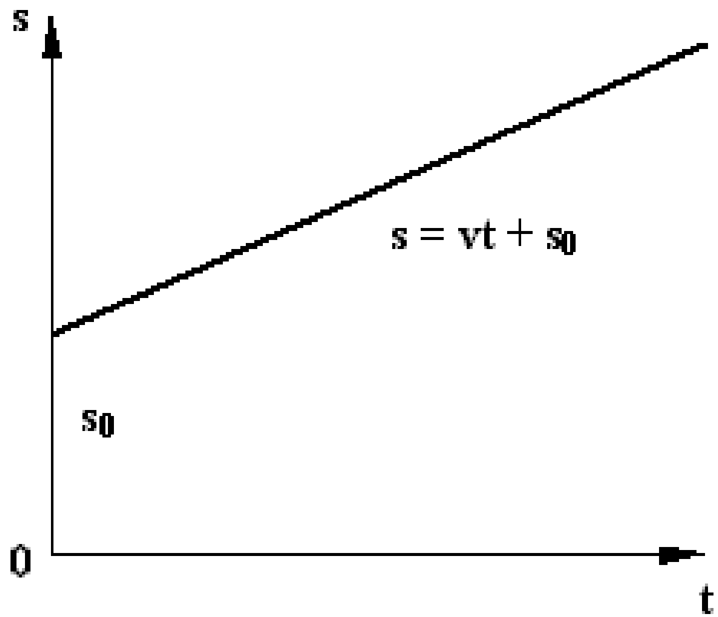
se nazývají *Coriolisovo*, *odstředivé* a *Eulerovo zrychlení.*

Pohyb přímočarý - rovnoměrný

- Zavedeme-li souřadnou soustavu tak, aby se jedna osa (např. x = s) ztotožňovala se směrem pohybu, potom vystačíme se skalární rychlostí $v = v_x$ a se skalárním zrychlením *a*. Pozůstatek vektorové povahy těchto veličin je jejich orientace (+/-).

Pohyb rovnoměrný přímočarý $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
$v = dx/dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v\,t$

kde $x_0 = x(t=0)$ je integrační konstanta - počáteční podmínky.



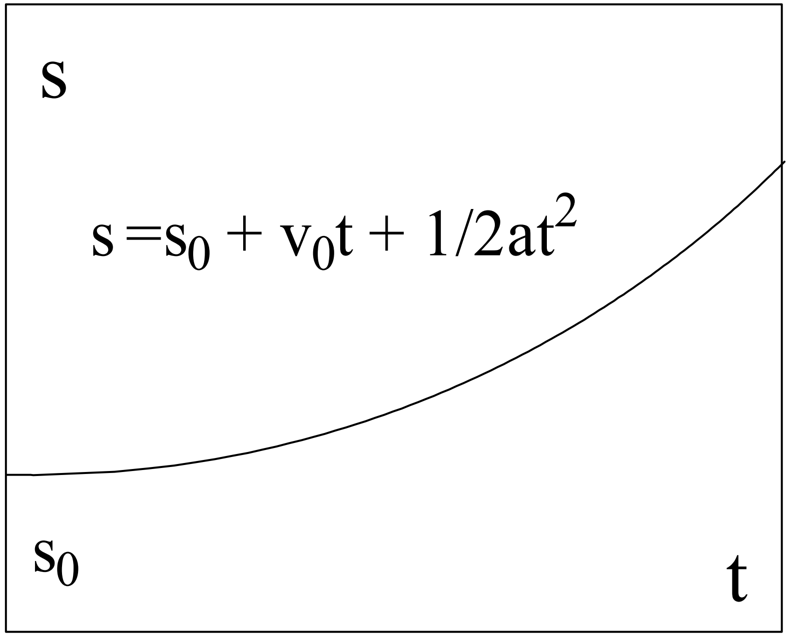
Pohyb přímočarý – rovnoměrně zrychlený

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_t}. = konst.$

$a = dv/dt \Rightarrow v(t) = v_0 + a\,t$,
kde $v_0 = x(t{=}0)$ je opět integrační konstanta

$x(t) = x_0 + v_0 t + a\,t^2/2$.

Po druhé integraci přibyla další integrační konstanta. Počáteční podmínky jsou určeny dvěma parametry x_0 a v_0.



-Rychlost roste s časem lineárně

-Draha roste s časem kvadraticky

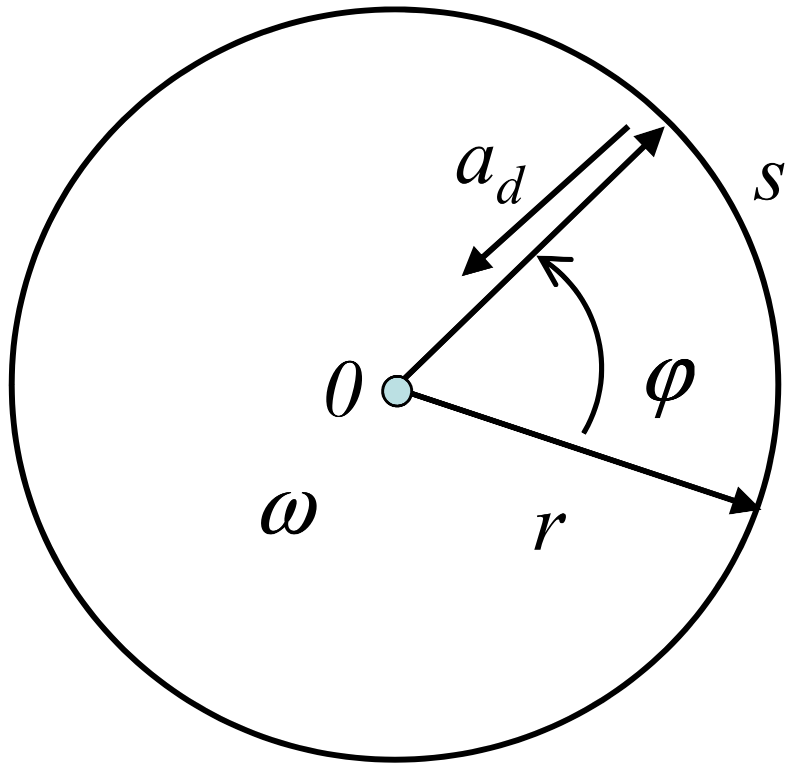
Pohyb křivočarý

- Normálová složka zrychlení a_n musí být obecně alespoň někde nenulová a poloměr křivosti $\underline{r}$ se může měnit.
- Speciální případ je pohyb po kružnici. Odehrává se v jedné rovině a poloměr $\underline{r}$ křivosti je konstantní. $\Rightarrow$

  Umožňuje analytické vyjádření časových závislostí sledovaných veličin

Pohyb po kružnici I - rovnoměrný

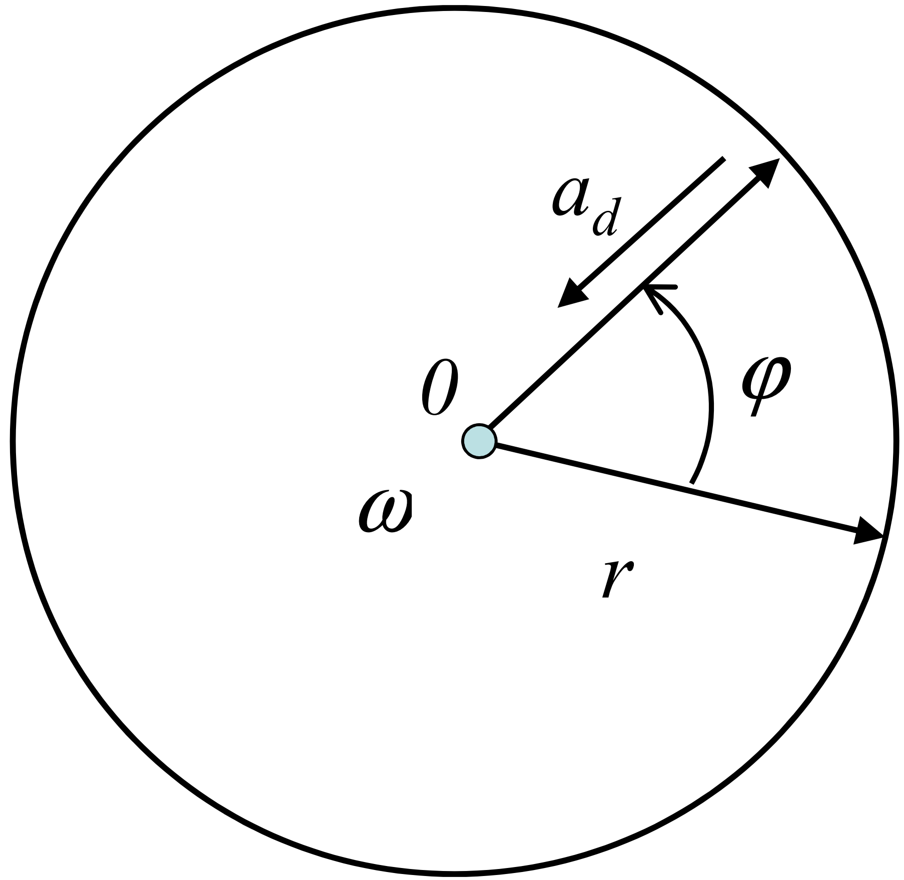
- Vzhledem k periodičnosti pohybu požíváme úhlové veličiny:
  - $ds = r\,d\varphi$
  - $v = ds/dt = r\,d\varphi/dt = r\,\omega$
  - $\omega = d\varphi/dt = 2\pi / T$ ($\varphi = 2\pi$ za dobu jednoho oběhu T) $= 2\pi f$
- Takto se zavádí úhlová rychlost ω $[s^{-1}]$, která je zde konstantní = rovnoměrný pohyb



- Normálové / dostředivé zrychlení
- $a_d = v^2/r = \omega^2 r = v\omega$
- $a_d = konst.$ $a_t = 0$

$$\omega = d\varphi/dt = konst., \qquad a_t = 0, \qquad a_d = \omega^2 r = v^2/r$$

- Po integraci:
  - $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$
  - $s(t) = s_0 + r\omega t$
  - φ_0 nebo s_0 jsou integrační konstanty opět dané počátečními podmínkami.



Pohyb po kružnici – pohyb kmitavý

Průměty rovnoměrného kruhového pohybu do kolmých os jsou pohyby kmitavé.

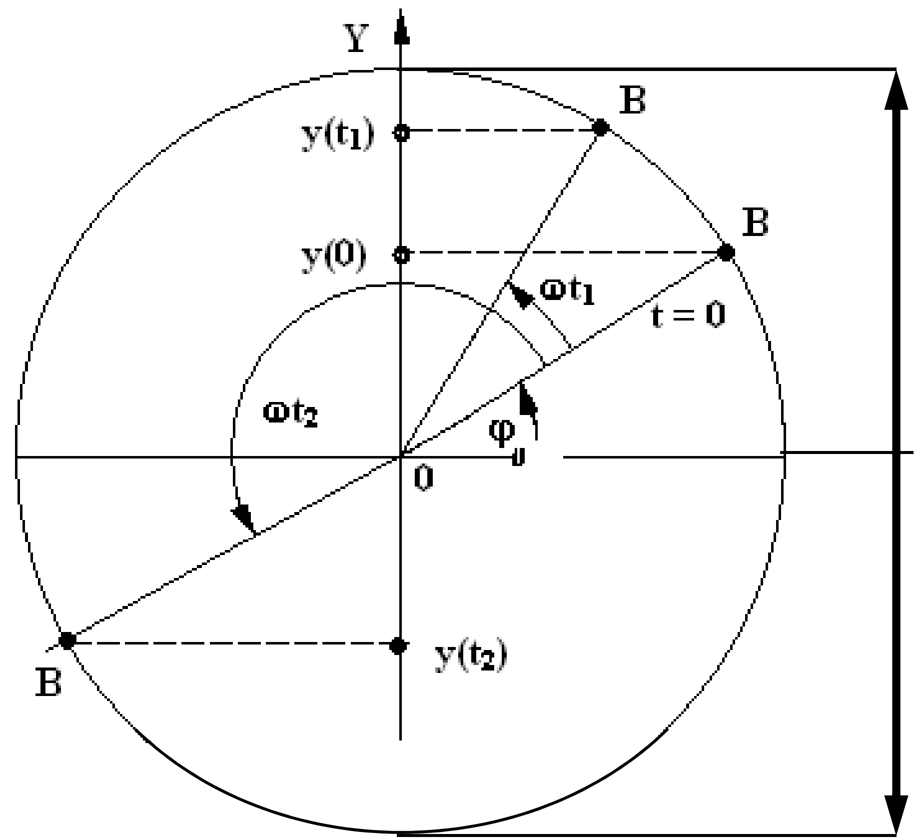
Souřadnice hmotného bodu B :

$x(t) = r.\cos \varphi(t) = r.\cos(\varphi_0 + \omega t)$

$y(t) = r.\sin \varphi(t) = r.\sin(\varphi_0 + \omega t)$

φ_0 se zde nazývá počáteční fáze (v čase t = 0)

$r \approx A$ …se nazývá amplituda



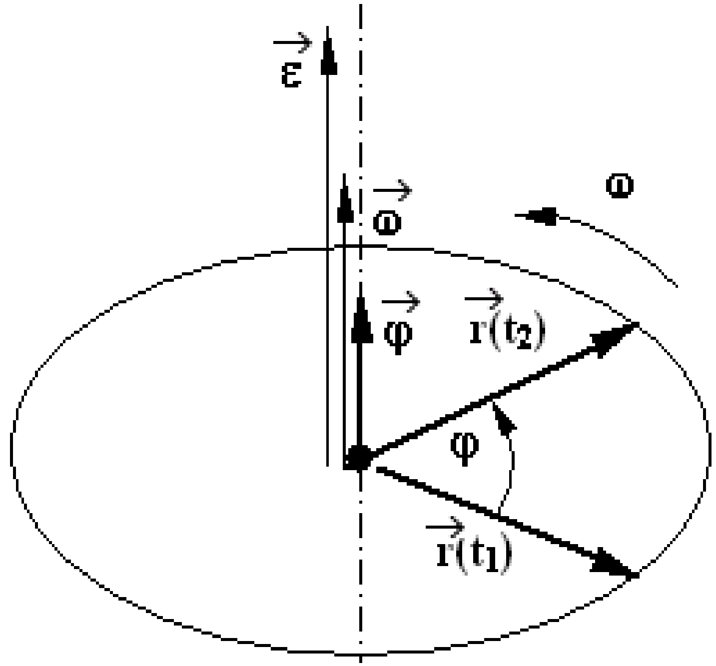
VYNECHAT

Pohyb po kružnici II - zrychlený

- Pohyb rovnoměrně zrychlený po kružnici.
- Hmotný bod se pohybuje s konstantním Úhlovým a tečným zrychlením :

$\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2 = konst.\ [s^{-2}]$

$\boldsymbol{a}_t = d\boldsymbol{v}/dt = \varepsilon\ .\ \boldsymbol{r} = konst.$



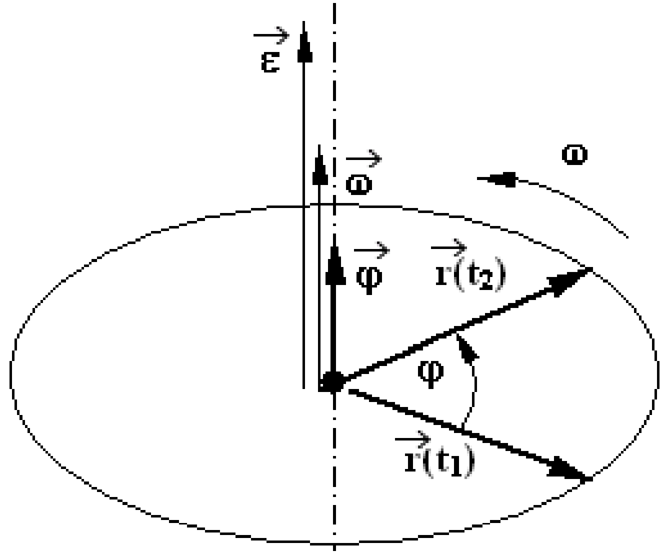
- Po integraci:
  - $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon\, t$
  - $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$

Srovnej s

$$x(t) = x_0 + v_0 t + a\, t^2/2 = r\ .\ \varphi(t) = r.\ (\varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2)$$

Pohyb po kružnici - obecně

- Protože rovina kruhové dráhy může mít různou polohu v prostoru, je nutné pro obecný případ pohybu použít vektorů



- Orientovaný úhlel $d\varphi$ má směr normály ke kružnici, orientované tak, že je úhel vidět jako pravotočivý.

  (proti směru hodinových ručiček)

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

- Obdobně je definován i směr a orientace úhlové rychlosti ω a úhlového zrychlení ε.

Pohyb v prostoru

- Při obecném pohybu v prostoru je nutné pracovat s vektory a operace se provádějí v souřadnicích.
- Pro zjednodušení se snažíme využít případné symetrie a snížit počet složek, ve kterých dochází ke změně.
- Příkladem je pohyb v blízkosti povrchu Země - vrhy, odehrávající se ve svislé rovině x,z.

Vrhy

- U všech vrhů předpokládáme:
  - Zrychlení, které působí svisle dolů a má velikost tíhového zrychlení $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$
  - pohyb začíná z bodu $\underline{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{0}} = (x_0, y_0, z_0)$
  - počáteční rychlostí $\underline{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{0}} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$
- Z pedagogických důvodů se vrhy dělí podle počátečních podmínek na speciální případy.

- Všechny vektory se dají volbou souřadného systému převést na dvourozměrné

Vrh svislý

- Počáteční podmínky:
  - $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$ $\underline{\boldsymbol{r}}^{0} = (0, 0, z_0)$, $\underline{\boldsymbol{v}}^{0} = (0, 0, v_{z0})$
- Smysl má soustředit se jen na svislou osu z:
  - $v_z(t) = v_{z0} - g\,t$
  - $z(t) = z_0 + v_{z0}\,t - g\,t^2/2$

  - Podmnožinou jsou a) volný pád : $v_{z0} = 0$.

    b) vrh vzhůru : $v_{z0} > 0$, $z_0 = 0$.

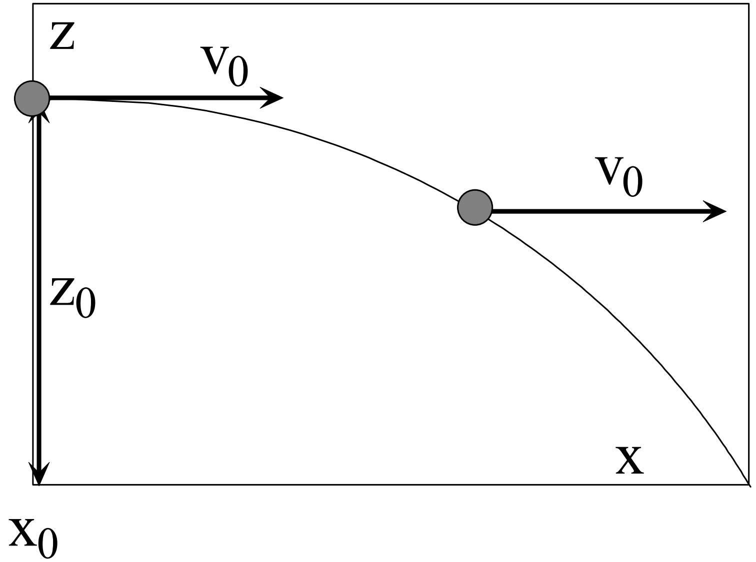
Rychlost se zmenšuje , až dosáhne nuly v čase $t_m = v_{z0}/g$

horní úvrati kde dráha (max. výška) $z(t_m) = v^2_{z0}/2g$

Potom těleso padá a rychlost je záporná. Na zem (souřadnice z_0) dopadne v čase t_n, který je řešením kvadr. rovnice

$$z(t_n) = t_n v_{z0} - g t^2_n/2 = 0 \Rightarrow \qquad t_n = 0$$

Vrh vodorovný



- Počáteční podmínky:
  - $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$
  - $\underline{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{0}} = (x_0, y_0, z_0), (x_0 = y_0 = 0)$
  - $\underline{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{0}} = (v_{x0}, 0, 0)$
- Pohyb je nyní nutno popsat ve dvou osách. Ve svislé *z* se

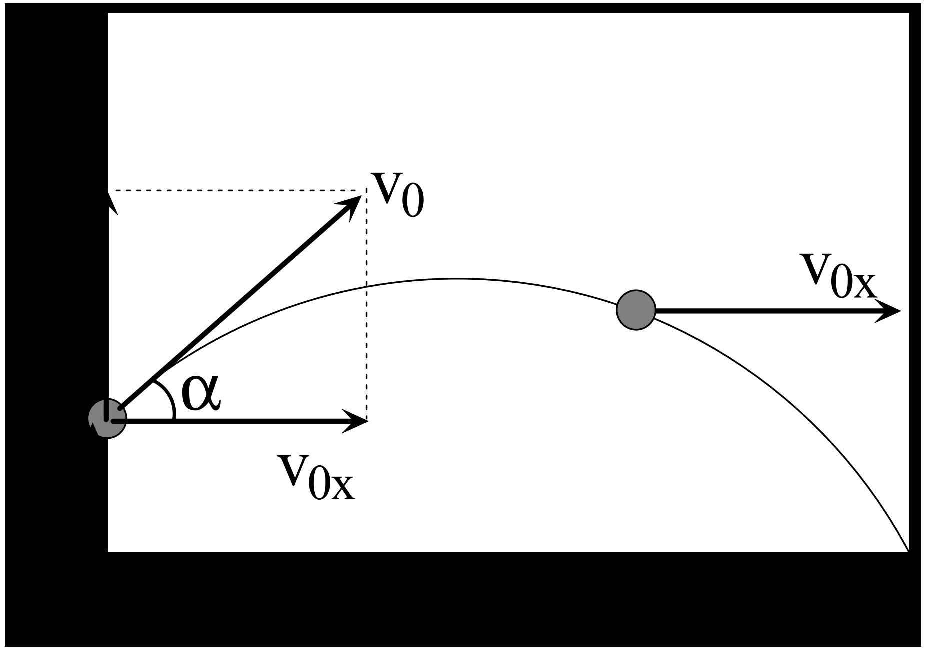
  jedná o volný pád - pohyb pohyb rovnoměrně zrychlený: ve vodorovné *x* o rovnoměrný přímočarý :

  - $v_z(t) = -g\,t$ $\qquad v_x(t) = v_{x0}$
  - $z(t) = z_0 - gt^2/2$ $\qquad x(t) = x_0 + v_{x0}t$

Vrh je ukončen dopadem tělesa $\Rightarrow$

t (maximální) = doba vrhu *t* společná pro obě složky pohybu

Vrh šikmý I



- Počáteční podmínky:
  - $\underline{\boldsymbol{a}} = (0, 0, -g)$
  - $\underline{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{0}} = (x_0, y_0, z_0), (x_0 = y_0 = 0)$
  - $\underline{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{0}} = (v_{x0}, 0, v_{z0})$
- Počáteční rychlosti jsou spolu vázány:
  - $v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$
  - $v_{z0} = v_0 \sin(\alpha)$
- Těleso je tedy vrženo počáteční rychlostí v_0 pod elevačním úhlem s vodorovnou rovinou α.

Popis stavu kvantověmechanické soustavy, popis fyzikálních veličin, vlastní hodnoty a vlastní stavy, Schrödingerova rovnice

Stav kvantověmechanického objektu nebo soustavy je popsán vlnovou funkcí. Tato funkce nese veškerou informaci o systému, který popisuje, sama o sobě však nemá konkrétní fyzikální význam. Až kvadrát její absolutní hodnoty $\left|(\psi(\vec{r},t))^2\right|$ udává pravděpodobnost nalezení daného kvantového systému v daném stavu $(\vec{r},t)$. Platí zde princip superpozice. Fyzikální veličiny jsou reprezentovány lineárními hermiteovskými operátory[6], ty mají totiž reálné spektrum vlastních hodnot. Mezi operátory reprezentujícími fyzikální veličiny platí tytéž vztahy, jako mezi příslušnými veličinami v klasické mechanice, s výjimkou integrálů a derivací podle času. Pokud spolu dva operátory komutují a splňují vztah:

$$\left(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}\right)\psi=0\,;\forall\psi$$

Pak jsou veličiny jimi reprezentované současně přesně měřitelné. V případě polohy a hybnosti tomu tak není. Tyto veličiny nelze současně přesně měřit, měření je zatíženo neurčitostí vyplývající z Heisenbergovy relace neurčitosti a zadání stavu podle klasické mechaniky není možné. Z důvodu nemožnosti určit zároveň polohu a hybnost mikroobjektu vyplývá i nemožnost zavést v mikrosvětě pojem trajektorie.

Časový vývoj mikroobjektu můžeme určit z pohybové rovnice. Tato rovnice musí být lineární (to aby splňovala princip superpozice), dále musí splňovat princip kauzality - tedy bude diferenciální rovnicí prvního stupně vzhledem k času. Navíc známe její řešení pro volný mikroobjekt, a sice de Broglieho vlnu. Výsledkem je obecná Schrödingerova rovnice:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

V této rovnici lze provést separaci proměnných. Výsledné řešení $\psi = \varphi\left(t\right)\cdot\psi\left(E\right)$ se pak bude skládat z obecného časového faktoru:

$$\varphi\left(t\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}E\cdot t}$$

A řešení stacionární Schrödingerovy rovnice:

$$\hat{H}\psi = E\cdot\psi$$

Což je vlastně rovnice pro vlastní funkce a vlastní hodnoty Hamiltonova operátoru.

Elektrické pole popisuje Coulombův zákon:

$$\vec{F_{1,2}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Lorentzova síla

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = e\boldsymbol{E} + e(\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}) \; ,$$

- Elektrický náboj je zdrojem elektrického pole

$$div\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad ; \qquad \oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Magnetické pole nemá zdroj

$$div\vec{B} = 0 \qquad ; \qquad \oint \vec{B}d\vec{s} = 0$$

- Faradayův zákon

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad ; \qquad \oint \vec{E}d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{B}d\vec{S}$$

- Maxwellovo zobecnění

$$rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad ; \qquad \oint \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 \cdot J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{E}d\vec{S}$$