

**MA 0008 – teorie psti**

**přednáška 02: klasická a  
geometrická pst**

Z povahy množiny  $\Omega$  všech elementárních výsledků experimentu lze provést rozdělení na různé psní modely

# Ot. 07: model psti 01 – klasická pst

- a)  $\Omega$  má konečně mnoho možných výsledků a
- b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

• Pak pro pst jevu  $A \subseteq \Omega$  platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

(podíl počtu prvků obou množin)

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je  
pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega = \{[1; 1], [1; 2], [1; 3], \dots, [6; 5], [6; 6]\}$  ... možných výsledků je ...

A ... součet obou čísel je roven 5

$A = \{[1; 4], [4; 1], [2; 3], [3; 2]\}$

Tj.  $P(A) = ?$

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je  
pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega = \{[1; 1], [1; 2], [1; 3], \dots, [6; 5], [6; 6]\}$  ... možných výsledků je 36

A ... součet obou čísel je roven 5

$A = \{[1; 4], [4; 1], [2; 3], [3; 2]\}$

$$\text{Tj. } P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,11111111111111$$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 ...  
jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

$\Omega$  = všechny možné četveřice karet

A ... aspoň jedna z dané četveřice karet je eso

A = ty četveřice, kde právě jedna karta je eso + četveřice, kde právě dvě karty jsou eso + četveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná četveřice se všemi čtyřmi esy

○

$$\text{Tedy } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \dots$$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 ...  
jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

$\Omega$  = všechny možné čtveřice karet

A ... aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

A = ty čtveřice, kde právě jedna karta je eso + čtveřice, kde právě dvě karty jsou eso + čtveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná čtveřice se všemi čtyřmi esy

$$\text{Tedy } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1} + 1}{\binom{32}{4}} = 0,4305895 \doteq 0,4306.$$

## Př.2: Nešel by spočítat nějak jednodušeji?

$\Omega$  = všechny možné četveřice karet

A ... aspoň jedna z dané četveřice karet je eso

• Tedy  $P(A) = ??$



## Př.2: Ano, pomocí opačného jevu:

$\Omega$  = všechny možné čtveřice karet

A ... aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

$\bar{A}$  ... žádná z dané čtveřice není eso

○

$$\text{Tedy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} \doteq 0,4306.$$

# Ot. 08: model psti 02 – geometrická pst

- a)  $\Omega$  má nekonečně mnoho možných výsledků a
- b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

• Pak pro pst jevu  $A \subseteq \Omega$  platí

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

(kde  $\mu$  je míra daných množin ... podle dimenze množiny je to délka, obsah, objem množiny)

**Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech.  
Jaká je pst, že budeme čekat  $\geq 4$  min?**

Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky.  
Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat

$\Omega=?$

A ... na tramvaj čekáme více než 4 minuty

$P(A)=?$

(nelze počítat podle klasického modelu, protože množiny jsou nekonečné)

**Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech.  
Jaká je pst, že budeme čekat  $\geq 4$  min?**

**Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky.  
Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat**

$$\Omega = \langle 0; 7 \rangle$$

o **A ... na tramvaj čekáme aspoň 4 minuty,  $A = \langle 4; 7 \rangle$**

$$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)} = \frac{3}{7} = 0,4285714 \doteq 0,4286.$$

# Př.4: Honza a Marek se domluvili na setkání mezi 8 a 9 hod ráno

Ovšem oba vstávají náhodně, tj. jejich příchod v jakémkoli okamžiku dané hodiny je stejně možný.

Navíc oba odmítají čekat na toho druhého více než 15 minut.

Jaká je  $pst$ , že se vůbec Honza a Marek na daném místě setkají?

Označme:  $8+x$  ... doba přích. Honzy  
 $8+y$  ... doba přích. Marka

Pak  $\Omega = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$  ... jedná se o část roviny!!! Čtverec o straně 1.

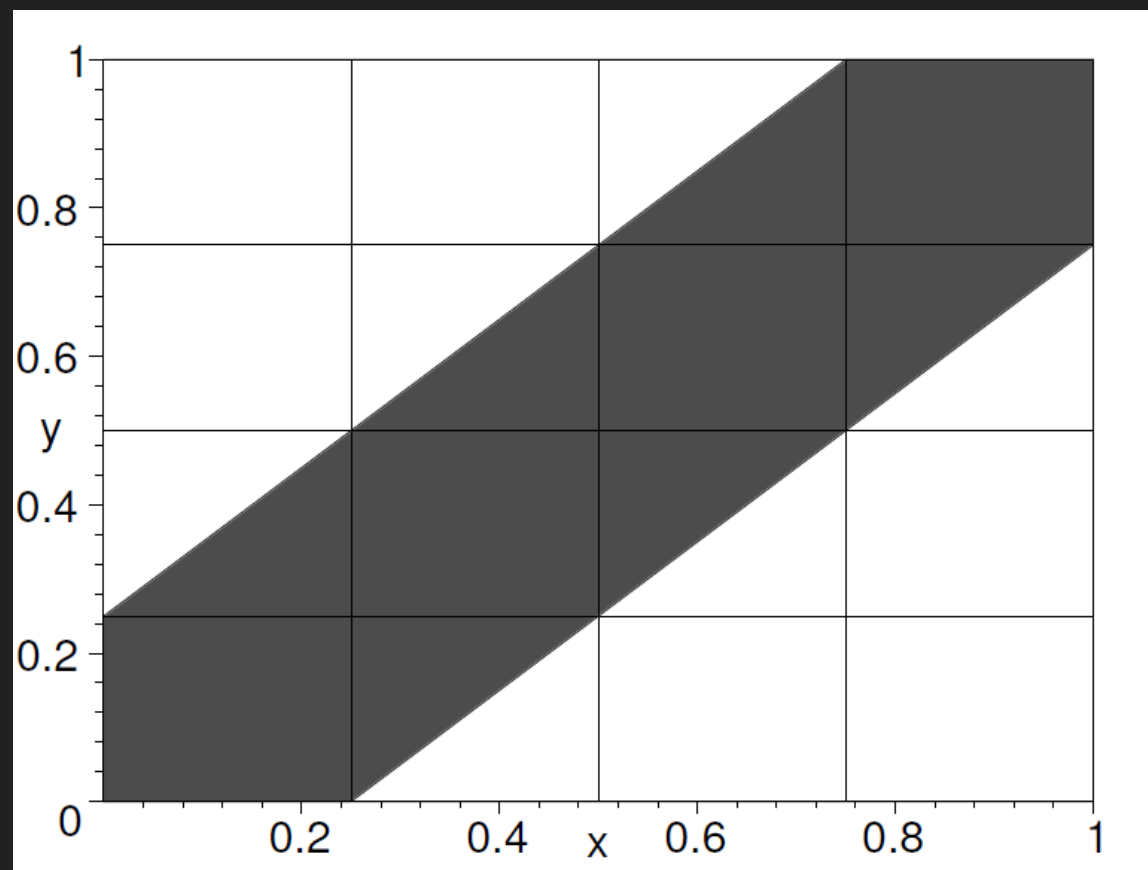
A ... Honza a Marek se setkají;

a) Které body v dané části roviny odpovídají jevu A?

b) Jedná se o dvoudimenzionální úlohu,  $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \dots$  ???,

kde  $S()$  je obsah plochy

$x, y$  se nesmí lišit o více než 0,25 hod:



Obsah plochy A lze zjistit podle počtu vyšrafovaných čtverců o hraně 0,25:

$$\bullet P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$



# Ot. 09: model psti 03 – diskrétní pst

a)  $\Omega$  má konečně mnoho elementárních výsledků, nebo je jich stejně jako přirozených čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

○ Pak pro pst jevu  $A \subseteq \Omega$  platí

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p(\omega_j)$$

(kde  $p$  je tzv pstní funkce)

# Z axiomů psti plyne pro pstní funkci:

1.  $\sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = 1$  ... axiom normovanosti
2.  $p(\omega_i) \geq 0$  pro každý elementární výsledek  $\omega_i \in \Omega$
3.  $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$  (axiom součtu pstí neslučitelných jevů)

**Př.: hážeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme;  $\omega_i$  je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.**

# Ot. 10: model psti 04 – spojitá pst

a)  $\Omega$  má nespočetně nekonečně mnoho elementárních výsledků, tedy se jedná o interval reálných čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

○ Pak pro pst jevu  $(a;b) \subseteq \Omega$  platí

$$P((a;b)) = \int_a^b f(x) dx$$

(kde  $f$  je tzv hustota psti ... je to funkce nezáporná a po částech spojitá)

# Z axiomů psti plyne pro hustotu psti:

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$  ... axiom normovanosti
2.  $p(\omega_i)=\int_{\omega_i}^{\omega_i} f(x)dx = 0$  (pst měříme pomocí obsahů, nikoli pomocí funkčních hodnot);  
 $P((a;b)) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$  (protože hustota  $f$  je nezáporná, tj. obsah podgrafu je nezáporný)
3.  $P((a;b)) = \int_a^b f(x)dx$  (součet má formu integrálu)

**Př: mobily jisté firmy mají životnost v průměru 15 let; jaká je pst, že náhodně koupený mobil vydrží více než 10 let?**

# Rekapitulace otázek:

7. Klasická pst
8. Geometrická pst
9. Diskrétní pst
10. Spojitá pst