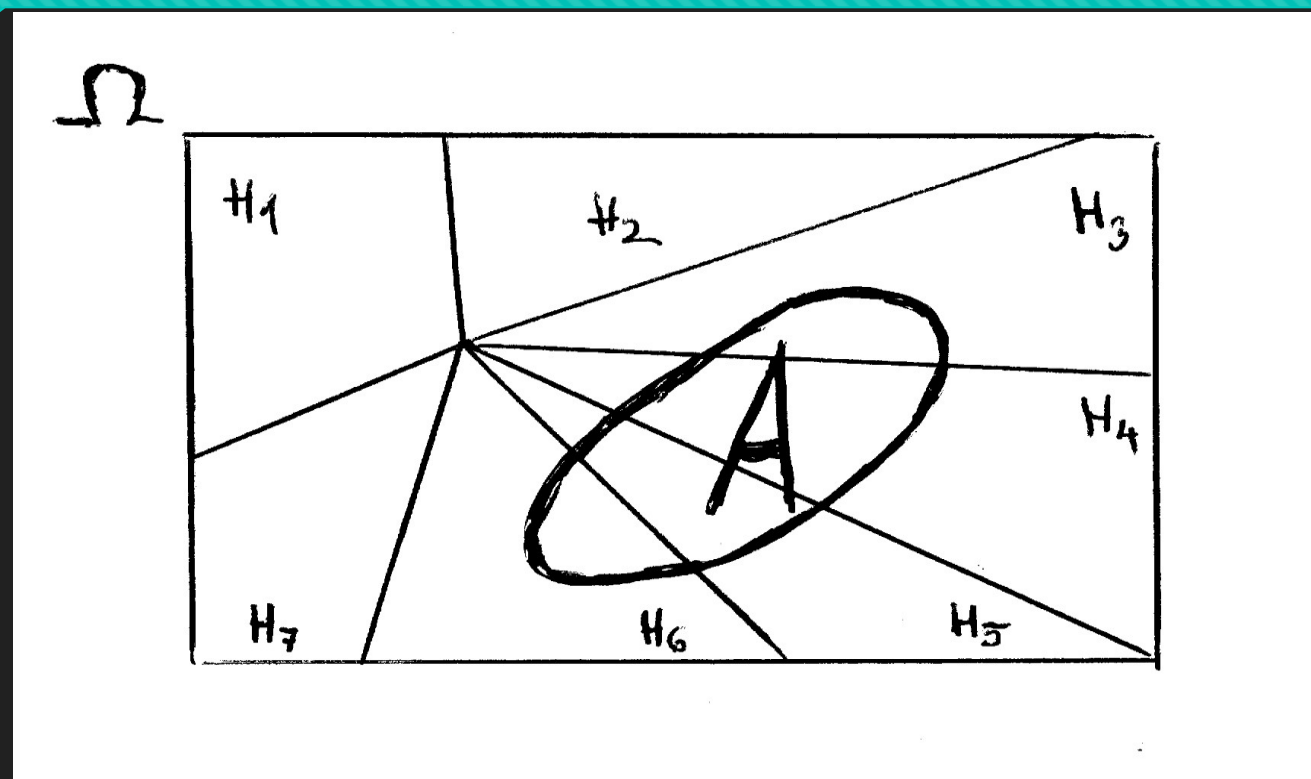


**přednáška 04:  
věta o úplné psti  
Bayesův vzorec**

# Otázka č. 15: věta o úplné psti - obrazem



## Ot. č 15: Věta o úplné psti - slovem

Pokud  $\{H_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  je rozklad množiny  $\Omega$  a  $P(H_i) > 0$  pro všechna  $i$ , tak pst jevu  $A \in \Omega$  lze určit ze vztahu

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n)$$

○ (větu užijeme tehdy, když  $P(A)$  nelze spočítat přímo, ale  $P(H_i) \cdot P(A | H_i)$  lze určit relativně snadno)

Důkaz: plyne z axiomu 3 a vyjádření  $A$  jako slednocení neslučitelných jevů  $A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_n \cap A)$

(a pro každý průnik 2 jevů užijeme větu o součinu pstí)

## *Příklad: v čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách*

Linka 1 ... kompletuje 40 % produkce, pokazí 5 % bonb.

Linka 2 ... kompletuje 45 % produkce, pokazí 4 % bonb.

Linka 3 ... kompletuje zbytek produkce, pokazí 2 % bonb.

Zkontrolujeme náhodně vybranou bonboniéru ... jaká je šance, že nebude v normě (= není správně zabalena)?

**Řešení úlohy na úplnou psť je hračkou tehdy, pokud dobře určíme jevy  $H_1, H_2, H_3$ , jejichž psťi známe**

$H_1$  ... ?

$P(H_1)=??$

$H_2$  ... ?

$P(H_2)=??$

$H_3$  ... ?

$P(H_3)=??$

A ... ???????

$H_1$  ... čokoláda byla balena na lince 1

$P(H_1)=??$

$H_2$  ... čokoláda byla balena na lince 2

$P(H_2)=??$

$H_3$  ... čokoláda byla balena na lince 3

$P(H_3)=??$

A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$H_1$  ... čokoláda byla balena na lince 1

$$P(H_1)=0,40$$

$H_2$  ... čokoláda byla balena na lince 2

$$P(H_2)=0,45$$

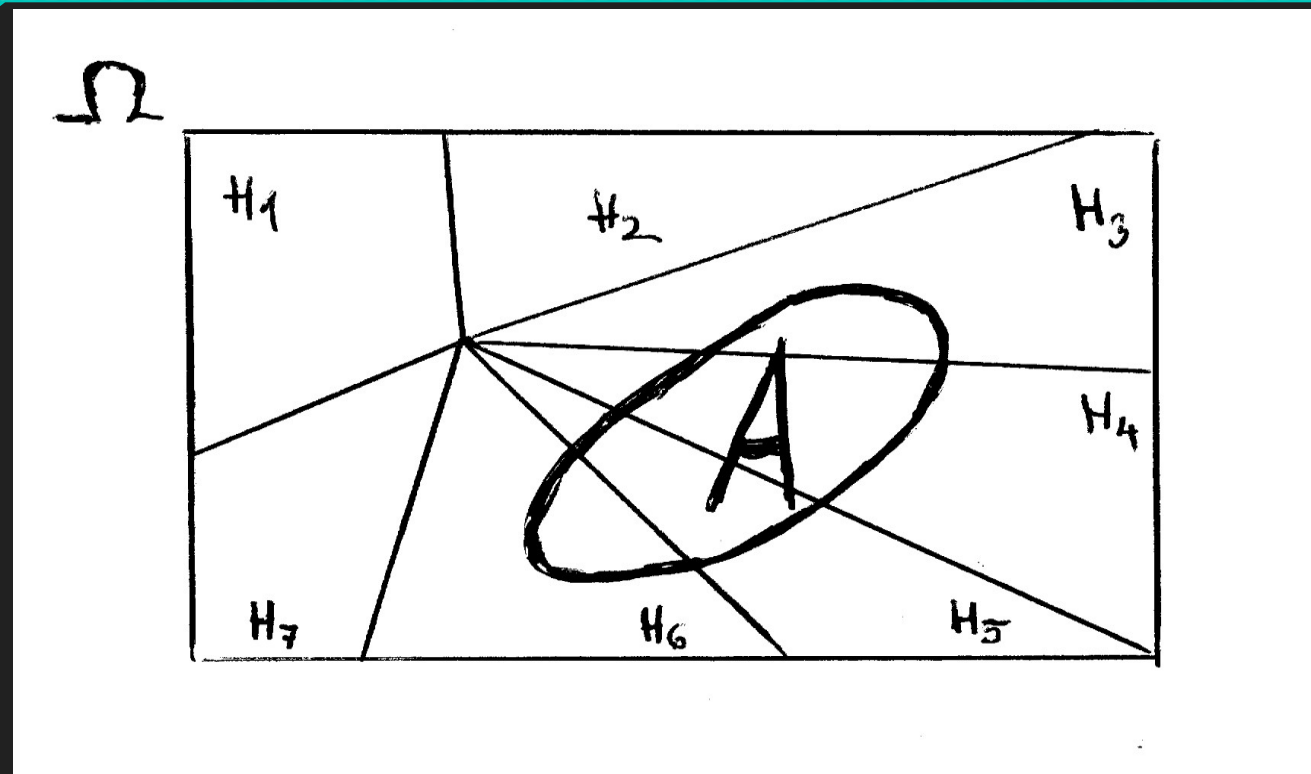
$H_3$  ... čokoláda byla balena na lince 3

$$P(H_3)=0,15$$

A ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

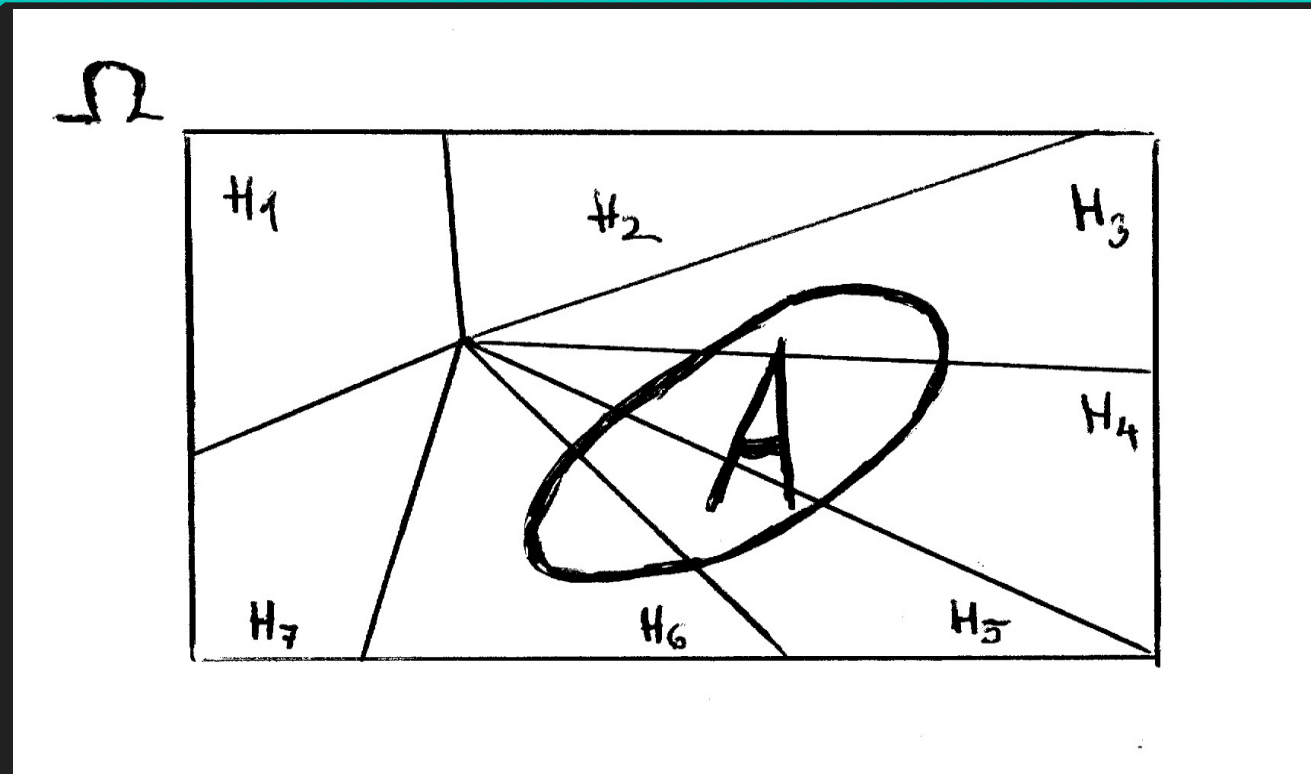
$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02 = 0,041$$

Otázka č. 16: Bayesův vzorec – obrazem  
(stejný obr, ale jiný vzorec!!!)





Otázka č. 16: Bayesův vzorec – obrazem  
(co bychom tak ještě mohli chtít spočítat v této situaci?)



Ot. č 16: Bayesův vzorec – slovem  
(co bychom tak mohli chtít ještě spočítat v té situaci??)

řekněte

Ot. č 16: Bayesův vzorec – slovem  
(co bychom tak mohli chtít ještě spočítat v té situaci??)

$P(A | H_1)$  je relativně snadné většinou určit; ovšem

- $P(H_1 | A)$  není často jednoduché určit, i když máme k dispozici vzorec  $P(H_1 | A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$  jako základní vzorec pro podmíněnou pst

Veškerá věda Bayesova vzorce spočívá v tom, že

Do čitatele základního vzorce pro podmíněnou pst

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$  dosadíme větu o součinu

o A do jmenovatele větu o úplné psti:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$$

(všimněte si, že v čitateli Bayesova vzorce se vyskytuje jeden člen sumy ze jmenovatele ... pomůcka pro zapamatování)

Tímto způsobem nespočteme jen  $P(H_1 | A)$ , ale také  $P(H_i | A)$  pro jakékoli  $i$ :

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n)}$$

(v čitateli je pevné  $i$ , ve jmenovateli se  $i$  mění)

**Vraťme se k příkladu s čokoládovnou:**  
**v čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách**

Linka 1 ... kompletuje 40 % produkce, pokazí 5 % bonb.

Linka 2 ... kompletuje 45 % produkce, pokazí 4 % bonb.

Linka 3 ... kompletuje zbytek produkce, pokazí 2 % bonb.

Zkontrolovali jsme náhodně vybranou bonboniéru a zjistili, že není v normě (tato podmínka nastala) ... s jakou psťí byla zkompletována na lince 1 (nebo 2, nebo 3)?

Tohle všechno už jsme spočítali v otázce 15:

$H_1$  ... čokoláda byla balena na lince 1  $P(H_1)=0,40$

$H_2$  ... čokoláda byla balena na lince 2  $P(H_2)=0,45$

$H_3$  ... čokoláda byla balena na lince 3  $P(H_3)=0,15$

$A$  ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02=0,041$$

$$P(H_1|A)=? \quad P(H_2|A)=?? \quad P(H_3|A)=???$$

Nyní přidáme  $P(H_1|A)=?$   $P(H_2|A)=??$   $P(H_3|A)=???$

$H_1$  ... čokoláda byla balena na lince 1  $P(H_1)=0,40$

$H_2$  ... čokoláda byla balena na lince 2  $P(H_2)=0,45$

$H_3$  ... čokoláda byla balena na lince 3  $P(H_3)=0,15$

○  $A$  ... náhodně vybraná bonboniéra je zmetkově zabalena

$$P(A)=0,40 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,15 \cdot 0,02=0,041$$

$$P(H_1|A)=\frac{0,40 \cdot 0,05}{0,041}, P(H_2|A)=\frac{0,45 \cdot 0,04}{0,041}, P(H_3|A)=\frac{0,15 \cdot 0,02}{0,041},$$



**$P(H_i)$  ... apriorní psti (a priori = předem, před měřením)**  
 **$P(H_i | A)$  ... aposteriorní psti = psti po měření**

**Apriorní psti:**

$$P(H_1) = 0,40$$

$$P(H_2) = 0,45$$

$$P(H_3) = 0,15$$

**Aposteriorní psti:**

$$P(H_1 | A) = 0,4878$$

$$P(H_2 | A) = 0,439$$

$$P(H_3 | A) = 0,0732$$

Po nalezení chybně balené čokolády narostla pst, že byla balena na lince 1, kdežto klesly psti, že byla balena na lince 2 nebo že byla balena na lince 3

# Rekapitulace otázek:

15. Věta o úplné psti

16. Bayesův vzorec