3. Pravděpodobnost

3.1 Náhodné pokusy a náhodné jevy

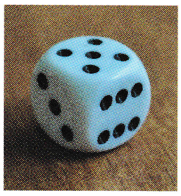
V přírodních vědách i v praktickém životě se setkáváme s pokusy, které při splnění předepsaných podmínek vedou vždy ke stejnému, předem očekávanému výsledku. Např. zahřejeme-li vodu na 100 °C při tlaku 100 kPa, začne se vařit. Nebo necháme-li vodičem procházet elektrický proud, magnetická střelka umístěná pod ním se vždy vychýlí určitým směrem. Takovýmto pokusům říkáme deterministické. Najdeme však mnoho příkladů, kdy výše uvedené neplatí. Např. hodíme-li hrací kostkou, nemůžeme s jistotou předem říct, jaké číslo padne. Otočíme-li klíčkem v zapalování automobilu, většinou motor naskočí, někdy ale kvůli poruše nenastartujeme.

Náhodným pokusem rozumíme pokus, který i za dodržení předepsaných podmínek může vést k různým výsledkům a nelze s jistotou předvídat, který z těchto výsledků nastane.

Klasickými příklady náhodných pokusů jsou hod kostkou, hod mincí, tažení karty z rozmíchaného balíčku, slosování loterie, sázení na výsledek sportovního utkání atd.
Pro praxi důležitějšími příklady mohou být kontrola kvality vyrobené součástky, destruktivní zkouška pevnosti určitého materiálu, testování účinnosti nového léku, realizace předvolebního průzkumu atd.

A Uvažujme hod kostkou. Jaké výsledky pokusu mohou nastat? (*Úmluva: Kostkou v této učebnici rozumíme klasickou hrací kostku ve tvaru krychle, na jejíchž stěnách jsou vyobrazeny následující počty „ok“: 1, 2, 3, 4, 5 a 6.*)

ŘEŠENÍ: Výsledkem pokusu může být libovolné přirozené číslo od 1 do 6. Množina všech těchto výsledků má šest prvků.



B Při kontrole určitého přístroje se prověřují tři jeho součástky. U každé z nich se zjišťuje, zda je, či není funkční. Označme si symbolem f situaci, kdy daná součástka funguje, symbolem n situaci, kdy tato součástka nefunguje. Jaké výsledky uvedeného pokusu mohou nastat?

ŘEŠENÍ: Jednotlivé součástky je z praktického hlediska zřejmě třeba rozlišovat (např. podle pořadí, v jakém byly kontrolovány). Může tedy nastat celkem $2^3 = 8$ výsledků, které lze popsat následujícími uspořádanými trojicemi písmen f a n:

$$(f, f, f),\ (f, f, n),\ (f, n, f),\ (n, f, f),\ (f, n, n),\ (n, f, n),\ (n, n, f),\ (n, n, n).$$

V pojmech kombinatoriky jde o tříčlenné variace s opakováním ze dvou prvků.

Při stanovení množiny všech možných výsledků daného náhodného pokusu máme občas určitou libovůli – podle toho, jak detailně chceme, resp. potřebujeme jednotlivé výsledky rozlišovat. Pokud by nás v úloze B nezajímalo konkrétně, které komponenty fungují a které ne, ale jen kolik komponent je vadných, pak bychom rozlišovali jen čtyři možné výsledky pokusu: 0, 1, 2 a 3.

C Hodíme najednou čtyřmi mincemi. Kolik různých výsledků pokusu může nastat, neumíme-li jednotlivé mince od sebe rozlišit?

ŘEŠENÍ: Výsledky pokusu lze v tomto případě charakterizovat např. pomocí počtu mincí, které ukážou líc. Možných výsledků je tedy pět (0, 1, 2, 3, 4).

Cvičení

1 Hodíme-li *postupně* čtyřmi mincemi, kolik výsledků pokusu umíme rozlišit?

2 Uvažujte hod dvěma kostkami.

a) Kolik výsledků pokusu může nastat, hodíme-li kostkami najednou a neumíme-li kostky rozlišit?

b) Kolik výsledků může nastat, umíme-li kostky rozlišit (např. podle velikosti, barvy nebo pořadí hodu)?

3 Do volejbalového turnaje se přihlásilo 12 družstev. V místním zpravodaji se objeví jen pořadí prvních tří družstev. Kolik je z tohoto hlediska možných výsledků turnaje?

4 Na ulici před sídlem určité firmy je osm parkovacích míst. Osm zaměstnanců ráno postupně přijede služebními vozy, každý si náhodně vybere dosud volné místo k parkování. Kolik je možných způsobů zaparkování?

Navzájem se vylučující výsledky náhodného pokusu, které již nelze jemněji rozlišit, se nazývají **elementární jevy**.

Jednoduché příklady:

- Při hodu jednou kostkou může nastat 6 elementárních jevů (může padnout libovolné přirozené číslo od 1 do 6).
- Při současném hodu dvěma nerozlišitelnými mincemi můžeme rozlišit 3 elementární jevy (dva líce, rub a líc, dva ruby).
- Při postupném hodu dvěma mincemi můžeme rozlišit 4 elementární jevy – uspořádané dvojice (líc, líc), (líc, rub), (rub, líc) a (rub, rub).

Množinu všech elementárních jevů, které mohou v daném pokusu nastat (tj. množinu všech možných výsledků pokusu) budeme označovat velkým řeckým písmenem Ω. Libovolná její podmnožina se nazývá **náhodný jev** (skládá-li se z více než jednoho elementárního jevu, říkáme, že je to **jev složený**). Náhodné jevy budeme označovat velkými písmeny A, B atd. Množina Ω je tzv. **jistý jev**, symbol prázdné množiny $\emptyset$ označuje **jev nemožný**.

D Hodíme postupně dvěma kostkami. Popišme pomocí elementárních jevů následující náhodné jevy:

a) Jev A: Na kostkách padnou stejná čísla.

ŘEŠENÍ: Celkový počet elementárních jevů je 36. Všechny tyto elementární jevy – jde o uspořádané dvojice čísel od jedné do šesti s možným opakováním – lze přehledně zapsat do schématu (tabulky):

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & \dots & (1,6)\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & \dots & (2,6)\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots & \dots & (3,6)\\
\dots & \dots & \dots & & & \dots\\
\dots & \dots & \dots & & & \dots\\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & \dots & \dots & (6,6)
\end{array}$$

Jev A se zřejmě skládá z těchto šesti elementárních jevů:

$$\mathsf{A} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}.$$

Ve výše uvedeném schématu se jedná o prvky na hlavní diagonále (úhlopříčce spojující levý horní a pravý dolní roh tabulky).

b) Jev B: Na kostkách padnou čísla, jejichž součet je větší než 8.

ŘEŠENÍ: Celkem 10 elementárních jevů je příznivých jevu B:

$$\mathsf{B} = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Ve schématu jde o prvky v „pravém dolním rohu“.

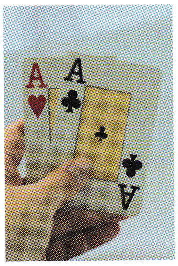
c) Jev C: Padne alespoň jedna šestka. (Zkuste vyřešit sami.)

E Hráč pokeru (varianta *Texas Hold'em*) dostane 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. Popišme pomocí elementárních jevů následující jevy (nerozlišujeme pořadí, v jakém hráč karty dostal):

a) Hráč dostane do ruky eso a krále.

ŘEŠENÍ: Uvažovaný balíček obsahuje karty čtyř různých barev: *piky* ♠, *srdce* ♥, *kára* ♦, *trefy* ♣. Od každé barvy je v balíčku 13 karet různých hodnot: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Elementární jevy jsou všechny možné neuspořádané dvojice karet, které lze vybrat z celkového počtu 52 karet. Těchto elementárních jevů je $\binom{52}{2} = 1\,326$ (jde o dvojčlenné kombinace bez opakování z 52 prvků). Příznivé jsou ty kombinace, které obsahují eso (A) a krále (K), jde o následujících 16 neuspořádaných dvojic:

{A♠, K♠} {A♠, K♥} {A♠, K♦} {A♠, K♣}
{A♥, K♠} {A♥, K♥} {A♥, K♦} {A♥, K♣}
{A♦, K♠} {A♦, K♥} {A♦, K♦} {A♦, K♣}
{A♣, K♠} {A♣, K♥} {A♣, K♦} {A♣, K♣}



b) Hráč dostane do ruky dvě esa. (Zkuste sami.)

Náhodné jevy jsou množinami (jejich prvky jsou elementární jevy), proto můžeme používat množinovou symboliku.

Je-li $\Omega \in A$, říkáme, že **výsledek** (elementární jev) **Ω je příznivý** jevu A.

Je-li $A \subset B$, říkáme, že jev A je **podjevem** jevu B. Tj. všechny výsledky příznivé jevu A jsou příznivé i jevu B.

Výsledky příznivé průniku $A \cap B$ jsou právě ty, které jsou příznivé současně jevům A a B.

Je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že **jevy** A a B **se vylučují** (jsou **neslučitelné**).

Výsledky příznivé sjednocení $A \cup B$ jsou právě ty, které jsou příznivé jevu A nebo jevu B (nebo oběma).

Opačný jev k jevu A označujeme A', výsledky příznivé tomuto opačnému jevu jsou právě ty, které nejsou příznivé jevu A. Užitím množinové symboliky lze psát $A' = \Omega \setminus A$.

F Sledujeme dobu bezporuchového provozu určitého zařízení měřenou v celých dnech, označíme ji T. Uvažujeme následující náhodné jevy:
Jev A: doba T je kratší než 2 dny;
Jev B: doba T je alespoň 5 dnů;
Jev C: doba T je alespoň 10 dnů.
Jaké platí vztahy mezi těmito jevy? Určeme opačné jevy k jevům A, B a C.

ŘEŠENÍ: Zřejmě je $A \cap B = \emptyset$, tj. jevy A a B se vylučují. Totéž platí pro jevy A a C. Jev $A \cup B$ znamená, že zařízení se porouchá během prvních 2 dnů nebo funguje bez poruchy minimálně prvních 5 dnů provozu. Podobně lze popsat jev $A \cup C$. Je-li doba bezporuchového provozu alespoň 10 dnů, pak samozřejmě musí nastat alespoň 5 dnů bez poruchy, tedy $C \subset B$ (jev C je podjevem jevu B). Platí tedy $B \cap C = C$ a $B \cup C = B$. Jev A' znamená, že se zařízení během prvních 2 dnů neporouchá, jev B' znamená, že se zařízení porouchá během prvních 5 dnů, interpretace C' je obdobná.

Cvičení

5 Náhodně vytočíme telefonní číslo. Jev A spočívá v tom, že toto číslo má na posledním místě čtyřku, jev B spočívá v tom, že toto číslo je dělitelné dvěma, a jev C spočívá v tom, že toto číslo je dělitelné čtyřmi.

a) Je některý z těchto jevů podjevem jiného jevu?
b) Co můžeme říci o předposlední číslici vytočeného čísla, víme-li, že nastaly současně jevy A a C?

6 Uvažujte hod dvěma kostkami. Jev A spočívá v tom, že padla alespoň jedna šestka, jev B spočívá v tom, že součet čísel je roven 6, a jev C spočívá v tom, že součet čísel je menší než 7.

a) Zapište jev B pomocí elementárních jevů. Předpokládejte, že kostky umíme rozlišit.
b) Popište slovně jev C'.
c) Jaký je vztah mezi jevy A a C'?
d) Co můžeme říci o jevech A a B?
e) Jaký je vztah mezi jevy B a C?
f) Popište slovně jev $C \setminus B$.

7 V osudí jsou 2 bílé a 4 černé koule. Postupně losujeme koule z osudí, dokud není prázdné, vytažené koule nevracíme zpět.

a) Kolik je možných výsledků losování za předpokladu, že koule stejné barvy neumíme rozlišit?
b) Kolik výsledků je příznivých jevu A, který spočívá v tom, že v prvním tahu byla tažena bílá koule?
c) Kolik výsledků je příznivých jevu B, který spočívá v tom, že obě bílé koule byly taženy během prvních tří tahů?
d) Popište slovně jev B'.
e) Kolik výsledků je příznivých jevu C, který spočívá v tom, že poslední tažená koule je černá?

f) Jaký je vztah mezi jevy B a C?

g) Popište slovně jev $A \cap B' \cap C$.

8 Ze skupiny 6 chlapců a 4 dívek náhodně vybereme čtveřici dětí.

a) Kolik je možných výsledků náhodného pokusu? Předpokládejte, že nezáleží na pořadí, v jakém jsou děti vybírány.

b) Kolik výsledků je příznivých jevu A, že mezi vybranými dětmi jsou dva chlapci a dvě dívky?

c) Kolik výsledků je příznivých jevu B, že mezi vybranými dětmi je nejvýše jedna dívka?

9 Závod vyrábí určitou součástku, která je podrobena třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraná součástka obstojí při první zkoušce, jev B v tom, že obstojí ve druhé zkoušce, a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Vyjádřete v množinové symbolice (tj. pomocí jevů A, B, C), že součástka obstojí:

a) jen v první zkoušce,

b) v první a ve druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce,

c) právě v jedné zkoušce,

d) alespoň v jedné zkoušce,

e) právě ve dvou zkouškách,

f) alespoň ve dvou zkouškách,

g) ve všech třech zkouškách,

h) nejvýše ve dvou zkouškách.

3.2 Pravděpodobnost – základní pojmy

Pravděpodobností určitého **náhodného jevu** rozumíme *číselné vyjádření šance* (resp. *možnosti*), že tento jev nastane. Pravděpodobnost je definována jako číslo mezi nulou a jednou, čím bližší je k 1, tím jistější si jsme, že daný jev nastane, naopak čím bližší je k 0, tím jistější si jsme, že nenastane. Pravděpodobnost náhodného jevu A zapisujeme $P(A)$.

Řekneme-li, že pravděpodobnost určitého jevu je rovna $\frac{1}{2}$, znamená to, že pokládáme za stejně možné, že tento jev nastane i že nenastane. Např. při hodu mincí (je-li mince symetrická a nesnažíme-li se výsledek nijak ovlivnit) je rozumné předpokládat, že pravděpodobnost padnutí líce je stejná jako pravděpodobnost padnutí rubu, tj. $\frac{1}{2}$. Napíšeme-li např., že $P(A) = 0{,}8$, znamená to, že „jsme si na 80 % jisti“, že jev A nastane. Pokud bychom mohli opakovaně realizovat náhodný pokus, jehož výsledkem může a nemusí být jev A, pak bychom očekávali, že zhruba v 80 % případů jev A skutečně nastane a ve zbývajících 20 % případů nastane opačný jev k jevu A, tedy jev A'.

Pravděpodobnost lze někdy též interpretovat jako ochotu k uzavření určité sázky. Řekneme-li např. kamarádovi: „Vsadím čtyři sta korun proti tvojí stovce, že Sparta zítra vyhraje!“, říkáme tím, že pokud Sparta nevyhraje, jsme ochotni mu dát 400 Kč, vyhraje-li, budeme od něj chtít 100 Kč. Označíme-li si symbolem A jev, že Sparta vyhraje, pak si myslíme, že pravděpodobnost jevu A je čtyřikrát větší než pravděpodobnost jevu A′. Protože součet pravděpodobnosti jevu a pravděpodobnosti jevu opačného musí být vždy roven jedné, platí:

$$P(\mathsf{A}) = 0{,}8 \text{ a } P(\mathsf{A}') = 0{,}2.$$

Na podobném principu fungují sázkové kanceláře. Vypíše-li sázková kancelář na vítězství Sparty kurs 1,25, znamená to, že vsadíme-li na toto vítězství 100 Kč, dostaneme v případě výhry Sparty nazpět 125 Kč – jinými slovy vyhrajeme pouze 25 Kč, v opačném případě o 100 Kč přijdeme. Tedy vsázíme 100 Kč proti 25 Kč sázkové kanceláře. Pokud by kancelář do kurzu 1,25 nepromítala náklady, bezpečnostní přirážku ani očekávaný zisk, dalo by se z něj odvodit, že analytik dané kanceláře soudí, že Sparta vyhraje s pravděpodobností 0,8.

Jestliže má určitý náhodný pokus konečný počet *n možných výsledků* (elementárních jevů), které jsou *stejně pravděpodobné*, tj. mají stejnou šanci se vyskytnout, je pravděpodobnost každého tohoto výsledku rovna $\frac{1}{n}$.

A Uvažujme hod kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne pětka?

ŘEŠENÍ: Hod kostkou má 6 možných výsledků. Předpokládáme-li, že kostka je symetrická a výsledek házení není nijak ovlivňován, lze se domnívat, že všechny výsledky jsou stejně možné. Tudíž pravděpodobnost, že padne číslo 5, je rovna $\frac{1}{6}$.

Má-li určitý náhodný pokus konečný počet n možných výsledků, které jsou stejně pravděpodobné, a uvažujeme-li náhodný jev A, který má při tomto pokusu $n(\mathsf{A})$ příznivých výsledků, pak pravděpodobnost jevu A je definována jako *podíl počtu příznivých výsledků a počtu všech možných výsledků*. Zapsáno symbolicky:

$$P(\mathsf{A}) = \frac{n(\mathsf{A})}{n}.$$

Jde o tzv. **klasickou definici pravděpodobnosti**.

B Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou čísla, jejichž součet je větší než 8?

ŘEŠENÍ: Abychom mohli vycházet z klasické definice pravděpodobnosti, musíme stanovit celkový počet elementárních jevů a poté počet příznivých elementárních jevů. Musíme si ale zároveň být jisti, že námi uvažované elementární jevy jsou stejně možné!

V zadání není řečeno, zda kostky rozlišujeme, či nikoli. Kdybychom kostky nerozlišovali (pokud s nimi hodíme současně a vypadají stejně, skutečně je rozlišit nemusíme umět), pak by počet elementárních jevů byl roven 21 – viz cvičení 2a z předchozího článku. Tyto elementární jevy by však nebyly stejně možné! Např. kombinace $\{1,2\}$ nám bude padat zhruba dvakrát častěji než kombinace $\{1,1\}$. Proto je vhodné, třeba jen v našich úvahách, kostky rozlišovat – představme si např., že jednu před pokusem barevně označíme nebo že jednou z nich hodíme o něco dříve.

Při rozlišování kostek je celkem 36 elementárních jevů, které jsou stejně možné (toto bylo vysvětleno v předcházejícím článku v úloze D). Počet elementárních jevů příznivých součtu většímu než 8 je roven deseti – máme vlastně vypočítat pravděpodobnost jevu B z citované úlohy D. Proto je hledaná pravděpodobnost rovna $P(\mathrm{B}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

C Na ulici před sídlem určité firmy je osm parkovacích míst v jedné řadě. Osm zaměstnanců ráno postupně přijede služebními vozy, každý si náhodně vybere dosud volné místo k parkování. S jakou pravděpodobností budou stát auta tří služebně nejstarších zaměstnanců vedle sebe?

Řešení: Pokud rozlišujeme všechny zaměstnance (můžeme si je předem očíslovat od 1 do 8), je $8! = 40\,320$ různých způsobů zaparkování – jde o permutace osmiprvkové množiny. Pokud si zaměstnanci parkovací místa vybírají náhodně, jsou tyto elementární výsledky stejně možné. Představme si, že 3 služebně nejstarší zaměstnanci, o které se zajímáme, mají čísla 1, 2 a 3. K výpočtu hledané pravděpodobnosti bychom museli určit počet těch permutací, které mají tato tři čísla vedle sebe. Příznivými výsledky by pak byly např. permutace $(8,6,1,3,2,5,7,4)$ nebo $(4,3,2,1,5,8,7,6)$ atd. Je jich však velmi mnoho a možná vám není na první pohled zřejmé, jak snadno a rychle určit jejich počet. Ukážeme si proto raději jednodušší postup.

Z hlediska toho, co nás zajímá, můžeme za elementární výsledek považovat neuspořádanou trojici parkovacích míst, na kterých budou stát auta našich tří uvažovaných zaměstnanců. Na pořadí v této trojici nám nemusí záležet a ostatní zaměstnance též nemusíme rozlišovat. Z tohoto hlediska máme tedy jen $\binom{8}{3} = 56$ elementárních výsledků (jde o tříčlenné kombinace z osmi prvků; např. kombinace $\{2,4,8\}$ znamená, že tři služebně nejstarší zaměstnanci obsadili druhé, čtvrté a osmé parkovací místo). Je zřejmé, že všechny tyto elementární jevy jsou stejně možné, a není těžké si rozmyslet, že počet výsledků příznivých našemu jevu je 6. Jde o kombinace $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}, \dots, \{6,7,8\}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

Všimněte si, že při výpočtu pravděpodobnosti máme často určitou libovůli při výběru množiny elementárních jevů. Není nutné vždy rozlišovat co nejjemněji možné výsledky náhodného pokusu. Musíme si však vždy být jisti tím, že námi uvažované elementární jevy jsou *stejně možné*, jinak nelze klasickou definici pravděpodobnosti použít.

Cvičení

1 Zapomněli jsme čtyřmístný PIN ke své platební kartě. Pamatujeme si, že obsahoval třináctku, tj. jedničku a trojku těsně za sebou (nejsme si však jisti, zda uspořádaná dvojice těchto čísel byla na začátku, uprostřed nebo na konci PINu). Pamatujeme si ještě to, že zbývající dvě čísla nebyla stejná. S jakou pravděpodobností můžeme PIN uhádnout?

2 Uvažujme hod dvěma kostkami.

a) S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka?

b) Jaký součet získáme s největší pravděpodobností?

3 Hodíme-li čtyřmi mincemi, s jakou pravděpodobností dvě mince ukážou líc a zbývající dvě rub?

4 Hráč pokeru (varianta Texas Hold'em) dostane 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností bude mít v ruce

a) eso a krále,

b) dvě esa,

c) pár, tj. dvě karty stejné hodnoty?

(Pro porovnání vyjádřete výsledky v procentech a zaokrouhlete na dvě desetinná místa.)

D Uvažujme hod krabičkou zápalek. Možné výsledky jsou ty, že krabička dopadne naplocho (tj. na stěnu s největším obsahem, ať už logem výrobce nahoru nebo dolů), na bok (tj. na „škrtátko") nebo na výšku (tj. na stěnu, kde se krabička otvírá). Co můžeme říci o pravděpodobnostech těchto výsledků?

ŘEŠENÍ: Podle zadání rozlišujeme celkem 3 možné výsledky pokusu, nemáme však žádný důvod se domnívat, že jsou stejně možné. Intuitivně je zřejmé (a můžeme se o tom přesvědčit sérií experimentů), že krabička bude padat naplocho mnohem častěji než na bok a jen zřídka dopadne na výšku. I kdybychom znali přesné rozměry krabičky, stejně bychom nebyli schopni vypočítat pravděpodobnosti výše uvedených výsledků. Tyto pravděpodobnosti sice na rozměrech závisí, určitě však ne jednoduchým způsobem. Roli nejspíš hraje i hmotnost krabičky, vlastnosti materiálu, na který krabička dopadá, počet sirek v krabičce atd. Jedinou možností, kterou máme, je provést dostatečné množství pokusů a pravděpodobnosti odhadnout – viz následující definice:

Uvažujme náhodný pokus, který za nezměněných podmínek mnohokrát opakujeme. Při každém opakování registrujeme, zda nastane určitý jev A. Jestliže se v sérii N opakování pokusu jev A vyskytne $N(\mathsf{A})$-krát, pak podíl $\frac{N(\mathsf{A})}{N}$ nazýváme *relativní četností jevu* A. Pokud se s rostoucím N blíží relativní četnosti $\frac{N(\mathsf{A})}{N}$ k nějakému číslu, pak toto číslo považujeme za *pravděpodobnost jevu* A. V praxi samozřejmě nemůžeme pokus opakovat donekonečna. Máme-li k dispozici dostatečný počet opakování N, pak pravděpodobnost jevu A aproximujeme jeho relativní četností a píšeme $P(\mathsf{A}) = \frac{N(\mathsf{A})}{N}$. Právě popsaný myšlenkový postup nazýváme **statistickou definicí pravděpodobnosti**.

E V podniku byla provedena analýza poruchovosti stroje. Podle zadaných údajů odhadněme pravděpodobnost poruchy tohoto stroje.

Rok	Pracovní hodiny	
	bez poruchy	s poruchou
2006	25 030	1 740
2007	26 120	1 790
2008	26 320	1 810
2009	27 430	1 810
2010	27 510	1 780

ŘEŠENÍ: Na každou pracovní hodinu stroje se můžeme dívat jako na náhodný pokus a sledovat, zda při něm došlo k poruše nebo ne. Máme odhadnout pravděpodobnost poruchy stroje, čímž se v daném případě rozumí pravděpodobnost, že se v náhodně vybrané pracovní hodině, ať už minulé či budoucí, vyskytla či vyskytne porucha. Použijeme statistickou definici pravděpodobnosti.
Celkový počet náhodných pokusů je roven celkovému počtu pracovních hodin stroje (bez poruchy i s poruchou) za všechny minulé roky. Tedy
$$N = 25\,030 + 1\,740 + 26\,120 + \cdots + 1\,780 = 141\,340.$$
Počet pokusů příznivých jevu A, že nastala porucha, je
$$N(\mathsf{A}) = 1\,740 + 1\,790 + 1\,810 + 1\,810 + 1\,780 = 8\,930.$$
Z uvedených výsledků vyplývá, že pravděpodobnost poruchy stroje je přibližně
$$P(\mathsf{A}) \doteq \frac{8\,930}{141\,340} \doteq 0{,}063\,18, \text{ tj. asi } 6{,}32\ \%.$$

Cvičení

5 V sérii 500 hodů krabičkou zápalek 385krát krabička padla naplocho, 82krát na bok a 33krát na výšku. Odhadněte pravděpodobnosti jevů A, že krabička padne naplocho, B, že padne na bok, a C, že padne na výšku.

6 V osmi dodávkách určitého druhu výrobku byl zjišťován počet vadných součástek. Výsledky jsou shrnuty v tabulce:

Dodávka č.	Počet dodaných součástek	Počet vadných součástek v dodávce
1	741	32
2	843	36
3	654	28
4	699	30
5	766	33
6	674	29
7	882	38
8	810	35

Odhadněte pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka z další dodávky bude vadná.

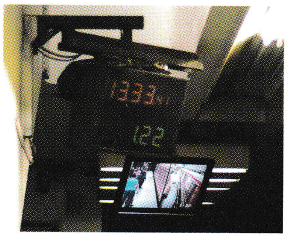
Někdy se setkáváme se situací, kdy výsledkem náhodného pokusu může být libovolný bod určité úsečky (určitého obrazce v rovině nebo určitého tělesa v prostoru) Ω. Předpokládáme-li, že všechny body této úsečky (obrazce, tělesa) představují *stejně možné výsledky*, a máme-li vypočítat pravděpodobnost, že tento bod bude ležet v určité podmnožině A dané úsečky (obrazce, tělesa), pak zřejmě tato pravděpodobnost musí být *přímo úměrná* „velikosti“ této podmnožiny.

Přesněji: $P(\mathrm{A}) = \dfrac{\mu(\mathrm{A})}{\mu(\Omega)}$, kde symbol μ vyjadřuje tzv. míru množiny.

V případě úsečky rozumíme mírou množiny její *délku*, v případě obrazce v rovině jeho *obsah* a v případě tělesa v prostoru jeho *objem*.

Tomuto přístupu se říká **geometrická definice pravděpodobnosti**.

F Pro večerní návrat z restaurace se rozhodneme použít metro. Neznáme přesný jízdní řád, víme jen, že v tuto dobu jezdí v pravidelných desetiminutových intervalech. S jakou pravděpodobností budeme čekat na soupravu déle než 6 minut?



Řešení: Hodiny ve stanici, ukazující čas, kdy odjel poslední vlak, mohou při našem příchodu ukazovat libovolný čas od 0 minut do 10 minut. Z praktického hlediska je jen konečný počet možností (čas je na hodinách uváděn v minutách a sekundách), ale je jednodušší si představit, že čas, po který budeme čekat, je vyjádřen libovolným reálným číslem z intervalu $\langle 0; 10 \rangle$, tj. geometricky libovolným bodem úsečky s krajními body 0, 10. Nemáme žádný důvod považovat některý z těchto časů za více či méně pravděpodobný. Do stanice jsme přišli v podstatě náhodně, proto je každý tento čas, znázorněný příslušným bodem úsečky, stejně možný. Označme si A jev, o který se zajímáme, tj. že budeme čekat déle než

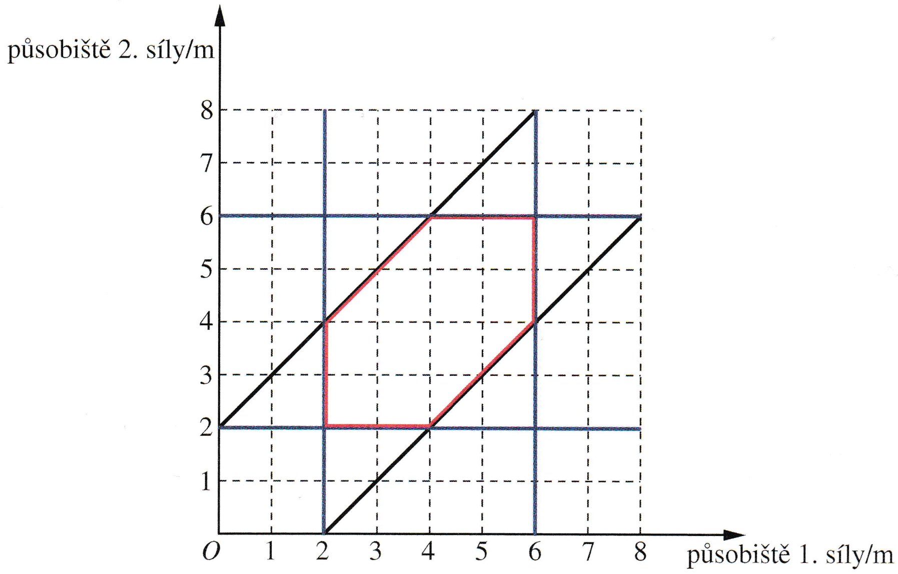
6 minut. Jev A nastane, budou-li staniční hodiny ukazovat čas od 0:00 do 4:00. Úsečka s krajními body 0 a 4 tedy představuje množinu výsledků příznivých jevu A, a jeho pravděpodobnost je tedy rovna podílu délek obou úseček: $P(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Používáme-li geometrickou definici pravděpodobnosti, nemá smysl se ptát na pravděpodobnost jednoho konkrétního bodu. Nemá např. smysl v úloze F hledat pravděpodobnost, že budeme čekat přesně 4 minuty a 12,456 sekundy apod. Předpokládáme-li, že výsledkem pokusu může být libovolné reálné číslo z daného intervalu, pak vzhledem k tomu, že těchto čísel je nekonečně mnoho, musí být pravděpodobnost každého z nich nulová. Z tohoto důvodu **není důležité, zda do našeho náhodného jevu započítáváme krajní hodnoty nebo ne**, pravděpodobnost jevu se tím nezmění.

V úloze F je tedy pravděpodobnost, že budeme čekat déle než 6 minut, stejná jako pravděpodobnost, že budeme čekat alespoň 6 minut, tj. přesně 6 minut nebo déle.

G Na železobetonový nosník o délce 8 m působí dvě síly. Předpokládejme, že polohy působišť obou sil jsou zcela náhodné a nezávislé na sobě. K poruše nosníku dojde, když budou tato působiště od sebe vzdálená méně než 2 m a současně budou obě vzdálená alespoň 2 m od konců nosníku. S jakou pravděpodobností se nosník poruší?

ŘEŠENÍ: Působiště první síly si můžeme představit jako náhodně zvolený bod na úsečce s krajními body 0 m a 8 m, stejně si můžeme představit i působiště druhé síly. Uspořádanou dvojici těchto působišť můžeme chápat jako bod čtverce o délce strany 8 m v pravoúhlém souřadnicovém systému – viz obrázek 3.1.



Obr. 3.1

Protože polohy působišť sil jsou náhodné a na sobě nezávislé, je každý z bodů tohoto čtverce stejně pravděpodobný. Tento čtverec tedy reprezentuje množinu Ω z geometrické definice pravděpodobnosti a její míra, tj. obsah, je rovna $64\,\mathrm{m}^2$. Obě působiště budou od sebe vzdálena méně než 2 m právě tehdy, když bod, který je reprezentuje, bude ležet uvnitř pásu ohraničeného černými šikmými čarami. Obě působiště budou vzdálená alespoň 2 m od konců nosníku právě tehdy, když bod, který je reprezentuje, bude ležet uvnitř vnitřního čtverce, ohraničeného modrými čarami. Výsledky příznivé jevu A, že se nosník poruší, jsou tedy všechny body uvnitř červeně ohraničeného obrazce. Jeho obsah lze snadno zjistit z obrázku, např. od obsahu vnitřního čtverce ($16\,\mathrm{m}^2$) odečteme obsahy dvou trojúhelníčků v jeho levém horním a pravém dolním rohu a dostaneme $12\,\mathrm{m}^2$. Pravděpodobnost poruchy nosníku je tedy podle geometrické definice rovna $P(\mathsf{A}) = \dfrac{\mu(\mathsf{A})}{\mu(\Omega)} = \dfrac{12}{64} = \dfrac{3}{16}$.

Cvičení

7 Stroj vyrábí skleněné trubičky o délce 1 m. Rozlomí-li se trubička kvůli poruše materiálu na dva kusy, s jakou pravděpodobností bude jeden z nich delší než 80 cm, a bude jej tedy možno dále využít? (Předpokládejte, že trubička se může zlomit na kterémkoliv místě se stejnou pravděpodobností.)

8 Vedoucí prodejny nábytku očekává během dne dodávku zboží od dvou různých dodavatelů. Od prvního dodavatele byl informován, že auto může přijet kdykoliv mezi 9. a 12. hodinou, auto druhého dodavatele může přijet kdykoliv od 9 do 14 hodin. Přejímka zboží (od kteréhokoliv dodavatele) trvá hodinu. S jakou pravděpodobností se stane, že auto, které přijede později, bude muset čekat na dokončení přejímky zboží z auta, které dorazilo dřív?

3.3 Základní pravidla pro výpočet pravděpodobnosti

Již v předcházejícím článku jsme občas mlčky použili některé samozřejmé vlastnosti pravděpodobnosti. Nyní si je postupně shrneme. Všechny následující vlastnosti a vzorce platí bez ohledu na to, zda v dané situaci používáme klasickou, statistickou nebo geometrickou definici pravděpodobnosti.

1. Pravděpodobnost libovolného jevu A je číslo z intervalu $\langle 0; 1\rangle$.
   Pravděpodobnost *jistého* jevu je rovna jedné: $P(\Omega) = 1$.
   Pravděpodobnost *nemožného* jevu je rovna nule: $P(\emptyset) = 0$.

2. Jsou-li A a B dva *neslučitelné* jevy, pak pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu jejich pravděpodobností:

$$P(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{B}).$$

   Tomuto vztahu říkáme **vzorec pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů.**

3. Součet pravděpodobnosti *libovolného* jevu a pravděpodobnosti jevu *k němu opačného* je roven jedné:

$$P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{A}') = 1.$$

   Z toho samozřejmě plyne, že $P(\mathsf{A}') = 1 - P(\mathsf{A})$. Poslednímu vztahu budeme říkat **vzorec pro pravděpodobnost opačného jevu**.

A

Zásilkový prodejce rozlišuje objednávky od zákazníků podle způsobu přijetí do tří skupin: telefonické, e-mailové a objednávky na tištěném formuláři pro stálé zákazníky. Podle velikosti objednávky rozděluje objednávky do čtyř skupin: malé (do 500 Kč), střední (od 501 do 3 000 Kč), velké (od 3 001 do 10 000 Kč) a prioritní (nad 10 000 Kč). Z databáze všech objednávek za poslední časové období lze vyčíst následující informace:

		Velikost objednávky				Celkem
		malá	střední	velká	prioritní	
Způsob přijetí objednávky	telefon	1 021	216	109	14	1 360
	e-mail	86	371	308	49	814
	formulář	1 497	230	86	13	1 826
Celkem		2 604	817	503	76	4 000

Význam tabulky je zřejmý – např. číslo v prvním řádku a prvním sloupci říká, že v posledním časovém období bylo 1 021 malých objednávek přijato po telefonu.

a) Určeme pravděpodobnost jevu F, že náhodně vybraná objednávka byla (bude) přijata na tištěném formuláři pro stálé zákazníky.

   ŘEŠENÍ: Především uveďme, že otázku lze chápat dvojím způsobem. Jedna možnost je, že opravdu vybereme náhodně jednu objednávku z existující databáze 4 000 minulých objednávek. Pak číslo 4 000 představuje počet všech elementárních výsledků našeho náhodného pokusu a číslo 1 826 reprezentuje počet výsledků příznivých jevu F. Proto podle klasické definice pravděpodobnosti dostaneme $P(\mathsf{F}) = \dfrac{1\,826}{4\,000} = 0{,}4565$, tj. 45,65 %. Nebo, což je z praktického hlediska zajímavější a užitečnější, si můžeme představit náhodně vybranou *budoucí* objednávku. Pak se na databázi 4 000 minulých objednávek díváme jako na sérii opakování náhodného pokusu (který spočívá v přijetí a zařazení objednávky), v této sérii došlo v 1 826 případech k výskytu jevu F, a proto za předpokladu, že se struktura objednávek v budoucnu nebude měnit, dostaneme podle statistické definice pravděpodobnosti stejný výsledek: $P(\mathsf{F}) = \dfrac{1\,826}{4\,000} = 0{,}4565$, tj. 45,65 %. Vidíme tedy, že bez ohledu na přesnou interpretaci otázky je číselný výsledek stejný.

b) Určeme pravděpodobnost jevu A, že náhodně vybraná objednávka bude přijata prostřednictvím e-mailu nebo na formuláři.

Řešení: Můžeme postupovat přímo podle tabulky. Při klasické interpretaci pravděpodobnosti je počet výsledků příznivých jevu A roven součtu e-mailových objednávek a objednávek na formuláři. Proto $P(\mathsf{A}) = \dfrac{814+1\,826}{4\,000} = 0{,}66$, tj. 66 %.

Ukažme si však také, že lze použít vzorec pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů. Jev A je totiž sjednocením dvou neslučitelných jevů – jevu M, který spočívá v tom, že objednávka bude přijata prostřednictvím e-mailu, a jevu F, že bude přijata na formuláři. Platí tedy

$$P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{M}) + P(\mathsf{F}) = \frac{814}{4\,000} + \frac{1\,826}{4\,000} = 0{,}66, \text{ tj. } 66\ \%.$$

c) U všech velkých a prioritních objednávek a též u všech objednávek přijatých prostřednictvím e-mailu nebo po telefonu prodejce vyžaduje platbu předem na svůj účet. Určeme pravděpodobnost jevu B, že u náhodně vybrané objednávky bude vyžadována platba předem.

Řešení: Hledanou pravděpodobnost by bylo možné určit přímo z tabulky. Je však jednodušší použít vzorec pro pravděpodobnost opačného jevu. Opačný jev k jevu B je jev B′, který spočívá v tom, že u náhodně vybrané objednávky nebude vyžadována platba předem. Tato platba není vyžadována jen u malých a středních objednávek, a to přijatých na formuláři – rozmyslete si sami. Proto

$P(\mathsf{B}') = \dfrac{1\,497+230}{4\,000} = 0{,}43175$, a tudíž $P(\mathsf{B}) = 1 - 0{,}43175 = 0{,}56825$, tj. 56,825 %.

d) Je-li objednávka přijata na formuláři nebo patří-li podle finančního kritéria do prioritní skupiny, dostane kupující jako bonus malý dárek. Určeme pravděpodobnost jevu C, že náhodně vybraná objednávka bude mít nárok na bonus.

Řešení: Objednávky, u kterých má zákazník nárok na malý dárek, jsou uvedeny v předposledním řádku a v předposledním sloupci tabulky. Jejich celkový počet je roven $1\,497 + 230 + 86 + 14 + 49 + 13 = 1\,889$. Proto je hledaná pravděpodobnost rovna $P(\mathsf{C}) = \dfrac{1\,889}{4\,000} = 0{,}47225$, tj. 47,225 %.

Možná vás napadlo, proč jsme při určování celkového počtu těchto objednávek místo zdlouhavého sčítání šesti čísel z vnitřní části tabulky prostě nesečetli celkový počet objednávek na formuláři a celkový počet prioritních objednávek. Takové zjednodušení by bylo chybné, protože $1\,826 + 76 = 1\,902 \neq 1\,889$. Problém je v tom, že při uvedeném postupu počítáme prioritní objednávky přijaté na formuláři *dvakrát*. Skutečně: $1\,902 - 1\,889 = 13$. Tato poznámka úzce souvisí s následující důležitou úvahou.

Jev C je sjednocením dvou jevů: jevu F, že objednávka dojde na formuláři, a jevu R, že má prioritní velikost. Je tedy $\mathsf{C} = \mathsf{F} \cup \mathsf{R}$. Bylo by však chybné použít vzorec pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů, protože jevy F a R se nevylučují. Skutečně:

$$P(\mathrm{C}) = \frac{1\,889}{4000} = 0{,}472\,25 \neq P(\mathrm{F}) + P(\mathrm{R}) = \frac{1\,826}{4\,000} + \frac{76}{4\,000} = 0{,}4755.$$

Abychom dostali správný výsledek, musíme od součtu pravděpodobností jevů F a R *odečíst pravděpodobnost jejich průniku*, tj.

$$P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{F}) + P(\mathrm{R}) - P(\mathrm{F} \cap \mathrm{R}) = \frac{1\,826}{4\,000} + \frac{76}{4\,000} - \frac{13}{4\,000} = 0{,}472\,25.$$

Na tomto příkladu jsme vlastně odvodili velmi důležitý vzorec, který přidáme k našemu seznamu.

4. Jsou-li A a B *libovolné* jevy, pak platí:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Tomuto vztahu budeme říkat **obecný vzorec pro sčítání pravděpodobností**.

B Z databáze klientů, kteří mají otevřený běžný účet u určité banky, plyne, že 71 % z nich využívá tzv. *kontokorent*, tj. možnost „jít na svém účtu do minusu“. 32 % klientů z celé databáze používá kreditní kartu této banky. 21 % klientů z databáze využívá současně kontokorent a kreditní kartu. S jakou pravděpodobností má náhodně vybraný klient zřízen kontokorent nebo používá kreditní kartu? S jakou pravděpodobností nevyužívá ani jednu z těchto služeb?

ŘEŠENÍ: Pro správné pochopení zadání uveďme nejprve, že první uvedený údaj říká, že zhruba 71 klientů ze sta náhodně vybraných má kontokorent, přičemž *někteří* z nich *mohou* mít i kreditní kartu. Procentuální podíl klientů majících *pouze* kontokorent bez kreditní karty je samozřejmě menší než 71 % (dal by se snadno určit ze zadání – rozmyslete si sami).

Označme si A jev, že náhodně vybraný klient využívá kontokorent, a B jev, že má kreditní kartu. Ze zadání plyne:

$$P(\mathrm{A}) = 71\,\%, \quad P(\mathrm{B}) = 32\,\%, \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 21\,\%.$$

Jev, že náhodně vybraný klient má kontokorent nebo kreditní kartu, je třeba chápat tak, že využívá jednu nebo druhou nebo i obě služby zároveň. Jde o sjednocení jevů A a B a jeho pravděpodobnost je podle obecného vzorce pro sčítání pravděpodobností rovna:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}71 + 0{,}32 - 0{,}21 = 0{,}82.$$

To znamená, že 82 % klientů využívá alespoň jednu z uvedených služeb.

Jev C spočívající v tom, že klient nevyužívá ani jednu ze služeb, je opačným jevem k jevu $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Podle vzorce pro pravděpodobnost opačného jevu dostaneme hledanou pravděpodobnost:

$$P(\mathrm{C}) = 1 - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18.$$

Jinak řečeno, 18 % klientů nevyužívá ani jednu ze služeb.

Vzorec pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů se dá zobecnit i na situace, kdy pracujeme s více než dvěma jevy. Je-li jev A sjednocením konečného počtu *po dvou neslučitelných* jevů, tj. je-li $\mathsf{A} = \mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2 \cup \cdots \cup \mathsf{B}_n$, přičemž jevy B_i a B_j jsou *neslučitelné pro libovolnou dvojici navzájem různých i, j*, pak

$$P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{B}_1) + P(\mathsf{B}_2) + \cdots + P(\mathsf{B}_n).$$

***C** Hráč bridže dostane do ruky 13 karet z dobře rozmíchaného balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností má alespoň 8 karet stejné barvy?

ŘEŠENÍ: Balíček bridžových karet již byl popsán v úloze E prvního článku kapitoly. Připomeňme, že obsahuje karty čtyř různých barev: piky, srdce, kára a trefy a že od každé této barvy je v balíčku 13 karet různých hodnot: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

V zadání naší úlohy není barva konkrétně specifikována, jev (označme si ho A), jehož pravděpodobnost máme určit, si tedy můžeme vyjádřit jako sjednocení čtyř jevů:

$$\mathsf{A} = \mathsf{S} \cup \mathsf{H} \cup \mathsf{D} \cup \mathsf{C}.$$

Přitom S označuje jev, že hráč dostane alespoň 8 piků (v angličtině *spades*), H označuje jev, že hráč dostane alespoň 8 srdcí (*hearts*), D označuje jev, že dostane alespoň 8 kár (*diamonds*), a C označuje jev, že dostane alespoň 8 trefů (*clubs*). Jevy S, H, D a C jsou po dvou neslučitelné, proto platí $P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{S}) + P(\mathsf{H}) + P(\mathsf{D}) + P(\mathsf{C})$. Z názoru i z následujících úvah je zřejmé, že všechny tyto čtyři pravděpodobnosti jsou stejné, stačí tedy určit jen jednu z nich.

Spočítejme tedy např. pravděpodobnost jevu H, že hráč dostane alespoň 8 srdcí. Jev H můžeme rozepsat jako sjednocení šesti jevů: $\mathsf{H} = \mathsf{H}_8 \cup \mathsf{H}_9 \cup \mathsf{H}_{10} \cup \mathsf{H}_{11} \cup \mathsf{H}_{12} \cup \mathsf{H}_{13}$. Zde H_8 označuje jev, že hráč dostane přesně 8 srdcí (a zbylých 5 karet je jiných barev), H_9 znamená, že dostane přesně 9 srdcí atd. Vzhledem k neslučitelnosti je $P(\mathsf{H}) = P(\mathsf{H}_8) + P(\mathsf{H}_9) + \cdots + P(\mathsf{H}_{13})$. Jednotlivé pravděpodobnosti v tomto součtu však nejsou stejné, je třeba spočítat každou zvlášť.

Pro další výpočty použijeme klasickou definici pravděpodobnosti. Elementární jevy jsou všechny možné kombinace 13 karet, které hráč může dostat. Takových kombinací je $n = \binom{52}{13}$ a jsou zřejmě stejně pravděpodobné.

Počet kombinací, které obsahují přesně 8 srdcí, tj. počet kombinací příznivých jevu H_8, určíme jako součin $\binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5}$. Můžeme totiž sestavit celkem $\binom{13}{8}$ různých kombinací osmi srdcových karet a každou z nich můžeme doplnit libovolnou pěticí zbývajících 39 karet, těchto pětic je $\binom{39}{5}$. Z obdobné úvahy plyne, že počet kombinací obsahujících přesně 9 srdcí je roven $\binom{13}{9} \cdot \binom{39}{4}$, počet kombinací obsahujících přesně 10 srdcí je roven $\binom{13}{10} \cdot \binom{39}{3}$ atd. Kombinace příznivá jevu, že hráč dostane všech 13 srdcových karet, je jen jedna, nicméně pro zajímavost uveďme, že i tento výsledek dostaneme na základě předchozích úvah, neboť $\binom{13}{13}\cdot\binom{39}{0}=1$.

Nyní můžeme vypočítat pravděpodobnosti jednotlivých jevů:

$$P(\mathsf{H}_8)=\frac{\binom{13}{8}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{52}{13}}\doteq 0{,}001\,167,\quad P(\mathsf{H}_9)=\frac{\binom{13}{9}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{52}{13}}\doteq 0{,}000\,093 \text{ atd.}$$

Pravděpodobnost jevu H, že hráč dostane alespoň 8 srdcí, je

$$P(\mathsf{H})=P(\mathsf{H}_8)+P(\mathsf{H}_9)+\cdots+P(\mathsf{H}_{13})\doteq 0{,}001\,264,$$

pravděpodobnost jevu A, že hráč dostane alespoň 8 karet stejné barvy, je pak

$$P(\mathsf{A})=4\cdot P(\mathsf{H})\doteq 0{,}005\,055\doteq 0{,}5\ \%.$$

Námi získaný výsledek prakticky znamená, že hráč bridže zhruba v 5 hrách z 1 000 může očekávat při rozdání alespoň 8 karet stejné barvy.

***D** Expert sázkové kanceláře soudí, že určité fotbalové mužstvo v následujícím utkání doma zvítězí s pravděpodobností a, prohraje s pravděpodobností b a bude hrát nerozhodně s pravděpodobností c. Jaké kursy by měla sázková kancelář teoreticky vypsat na jednotlivé výsledky, pokud by do nich nepromítala ani své náklady, ani očekávaný zisk? Jakou matematickou vlastnost by tyto kursy měly?

ŘEŠENÍ: Označme si jednotlivé výsledky zápasu takto: Výsledek A znamená, že mužstvo vyhraje, výsledek B, že prohraje, a výsledek C, že remizuje. Tyto výsledky se navzájem vylučují, jeden z nich však musí nastat. Proto $\mathsf{A}\cup\mathsf{B}\cup\mathsf{C}=\Omega$ (kde Ω označuje jistý jev), a tedy podle vzorce pro sčítání pravděpodobností neslučitelných jevů platí

$$1=P(\Omega)=P(\mathsf{A})+P(\mathsf{B})+P(\mathsf{C})=a+b+c.$$

Vyjádříme-li si kurs na vítězství mužstva ve tvaru $1+k$, pak tento kurs znamená, že vsadíme-li si 1 Kč na vítězství daného mužstva a toto mužstvo opravdu vyhraje, sázková kancelář nám vyplatí $(1+k)$ Kč, tj. vyhrajeme k Kč. Pokud mužstvo nevyhraje, o 1 Kč přijdeme. Jak již bylo vysvětleno v úvodu článku 3.2, poměr mezi pravděpodobností, že mužstvo nevyhraje, a pravděpodobností, že vyhraje, by měl být stejný jako poměr naší možné výhry a prohry. Tedy $(b+c):a=k:1$ čili $k=\frac{b+c}{a}$, a konečně vlastní kurs na vítězství je roven $1+k=1+\frac{b+c}{a}=\frac{a+b+c}{a}=\frac{1}{a}$. Odvodili jsme jednoduchou a zajímavou vlastnost – kurs na vítězství daného mužstva by měl být roven převrácené hodnotě pravděpodobnosti tohoto vítězství. Stejnými úvahami lze odvodit totéž pro kursy na prohru a remízu – obecně kurs na určitý výsledek zápasu, dostihu apod. by měl teoreticky být roven převrácené hodnotě pravděpodobnosti tohoto výsledku. Nebo jinak řečeno, převrácené hodnoty kursů na jednotlivé výsledky by se měly rovnat pravděpodobnostem těchto výsledků.

E Sázková kancelář Fortuna měla 2 dny před zápasem kvalifikace MS ve fotbale Slovensko–Česko (hraným 5. září 2009) aktuální kursy na vítězství domácího mužstva (Slovenska) 2,75, na nerozhodný výsledek 3,2 a na vítězství hostů (Česka) 2,3. Co lze říci o předpokládaných pravděpodobnostech těchto výsledků? Je to možné?

ŘEŠENÍ: Z předchozí úlohy víme, že pravděpodobnosti uvedených výsledků by měly být rovny převráceným hodnotám kursů, tj. pravděpodobnost výhry Slovenska by měla být $\frac{1}{2,75} \doteq 0,3636$, pravděpodobnost remízy $\frac{1}{3,2} = 0,3125$ a pravděpodobnost výhry Česka $\frac{1}{2,3} \doteq 0,4348$. Součet těchto pravděpodobností pak má být roven jedné, zde je však tento součet roven přibližně 1,1109. Nemůže tedy jít o pravděpodobnosti. Znamená to, že kursy nebyly odvozeny čistě jen z pravděpodobností, ale že do nich kancelář logicky zahrnula i náklady na provoz, bezpečnostní přirážku, očekávaný zisk atd.

Cvičení

1 Loterie má 1 000 losů, z nichž na jeden los připadá výhra 500 Kč, na 10 losů výhra po 100 Kč, na 50 losů výhra po 20 Kč, na 100 losů výhra po 5 Kč, ostatní losy nevyhrávají. Petr si koupí jeden los. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje nejméně 20 Kč?

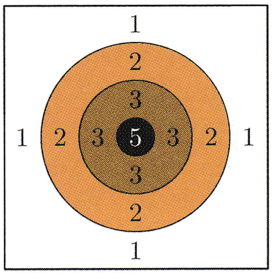
2 V dodávce zboží je 50 matic a 150 šroubů. Polovina matic a polovina šroubů je poškozena. Jestliže náhodně vybereme jednu součástku, jaká je pravděpodobnost, že to bude matice nebo poškozená součástka?

3 V krabici je 20 součástek stejného druhu, z nich jsou 3 vadné. K sestavení přístroje vybereme náhodně 5 součástek. S jakou pravděpodobností budou (bude)

a) všechny bez vady,
b) právě jedna vadná,
c) právě dvě vadné,
d) právě tři vadné,
e) právě čtyři vadné,
f) alespoň jedna vadná?

4 Při zkoušce si student náhodně vybere ze 30 různých otázek tři. Aby zkoušku úspěšně absolvoval, musí správně zodpovědět alespoň dvě z nich. Jaká je pravděpodobnost, že student, který umí 20 otázek z celkového počtu 30, absolvuje úspěšně zkoušku?

5 Chlapec vystřelí bez míření na terč – viz obrázek 3.2. S jakou pravděpodobností získá více než 1 bod, ale přitom méně než 5 bodů, víme-li, že zasáhl základní desku terče? Základní deska má tvar čtverce o délce strany 35 cm a jednotlivá pásma jsou ohraničena soustřednými kružnicemi o průměrech 5 cm, 15 cm a 25 cm.



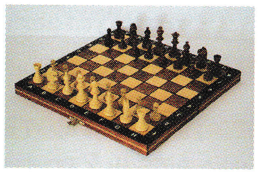
Obr. 3.2

6 V sáčku je 30 kuliček. Z toho je 8 kuliček bílých, 10 modrých a 12 červených. Jaká je pravděpodobnost, že ze sáčku vytáhneme tři kuličky téže barvy?

7 Padesát účastníků šachového turnaje je náhodně rozlosováno do 5 skupin po deseti. S jakou pravděpodobností budou hrát

a) dva výkonnostně nejlepší hráči ve stejné skupině,

b) tři výkonnostně nejlepší hráči ve stejné skupině?



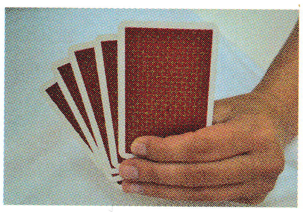
8 V loterii bylo vydáno 1 000 losů, z nich 100 vyhrává. S jakou pravděpodobností získáte alespoň jednu výhru, koupíte-li si

a) jeden los,
b) pět losů,
c) deset losů,
d) dvacet losů?

***9** Hráč pokeru (varianta *Five Card Draw*) dostane pětici karet z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností drží v ruce

a) všech 5 karet stejné barvy (např. 5 srdcí), což v pokerové terminologii znamená, že drží *flush* nebo *straight flush* nebo dokonce *royal flush*;

b) *quads*, tj. čtveřici karet stejné hodnoty (např. čtyři krále a jednu další, libovolnou kartu);



c) *fullhouse*, tj. trojici karet stejné hodnoty doplněnou dvojicí karet jiné stejné hodnoty (např. tři sedmičky a dvě esa nebo tři krále a dvě pětky apod.)?

d) Který z jevů uvedených v a), b), c) má největší pravděpodobnost a který nejmenší?

10 Prodejce automobilů se specializuje na dvě značky, označme je H a L. Pro prodané vozy zajišťuje záruční opravy. Každá oprava je klasifikována podle typu odstraňovaného problému a podle značky vozu. Záznamy o počtech oprav za poslední rok jsou shrnuty v následující tabulce:

		Problém				
		motor	převodovka	výfuk	karoserie	ostatní
Značka	H	106	211	67	133	24
	L	21	115	16	24	6

a) S jakou pravděpodobností se náhodně vybraná oprava týká vozu značky H?

b) Za vážné problémy se považují poruchy motoru a převodovky, opravy vozů značky L bývají časově náročné kvůli lhůtám dodání náhradních dílů. S jakou pravděpodobností se bude náhodně vybraná oprava týkat vážného problému nebo vozu značky L?

11 Říká se, že ženy bývají v zaměstnání často diskriminovány při obsazování vedoucích pozic – zastávají častěji spíše okrajové pozice (např. vedoucí osobního oddělení, oddělení pro styk s veřejností apod.) na rozdíl od mužů, kteří jsou typicky dosazováni do pozic jako je finanční ředitel, ředitel pro strategii a rozvoj podniku apod. V určité firmě je 12 vedoucích pozic, z nichž 5 lze považovat za okrajové. Na těchto 12 pozicích pracuje 8 mužů a 4 ženy. Pokud by pozice byly obsazovány náhodně, bez ohledu na pohlaví, s jakou pravděpodobností by na okrajových pozicích pracovaly tři nebo dokonce všechny čtyři ženy?

***12** Výrobce počítačů používá při přejímce harddisků od dodavatele následující strategii: Z celé dodávky detailně zkontroluje soubor náhodně vybraných disků a najde-li mezi nimi 5 % nebo více disků s vadnými sektory, odmítne dodávku převzít. V opačném případě dodávku přijme. S jakou pravděpodobností výrobce odmítne dodávku 300 disků, která ve skutečnosti obsahuje přesně 4 % disků s vadnými sektory, pokud detailně kontroluje soubor

a) 20 náhodně vybraných disků,

b) 40 náhodně vybraných disků?

S jakou pravděpodobností výrobce přijme dodávku 300 disků, která ve skutečnosti obsahuje přesně 6 % disků s vadnými sektory, pokud detailně kontroluje soubor

c) 20 náhodně vybraných disků,

d) 40 náhodně vybraných disků?

3.4 Podmíněná pravděpodobnost

Často se setkáváme s požadavkem určit pravděpodobnost nějakého náhodného jevu A, máme-li *dodatečnou informaci*, tj. víme-li, že nastal nějaký jiný náhodný jev B. Ukažme si několik motivačních příkladů.

A Uvažujme situaci z úlohy A předchozího článku, kde jsme se zabývali strukturou objednávek zásilkového prodejce. Uveďme znovu tabulku s informacemi o velikosti objednávek, jejich počtu a způsobu přijetí:

		Velikost objednávky				Celkem
		malá	střední	velká	prioritní	
Způsob přijetí objednávky	telefon	1 021	216	109	14	1 360
	e-mail	86	371	308	49	814
	formulář	1 497	230	86	13	1 826
Celkem		2 604	817	503	76	4 000

a) Představme si, že právě volá zákazník, který si chce objednat zboží. S jakou pravděpodobností bude jeho objednávka prioritní?

ŘEŠENÍ: Víme, že objednávka, o kterou se zajímáme, bude přijata telefonicky. Z tabulky vidíme, že z celkového počtu 1 360 telefonických objednávek bylo 14 prioritních, a proto je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{14}{1\,360} \doteq 1{,}03\ \%$. Číslo, které jsme právě určili, je tzv. **podmíněná pravděpodobnost jevu** R, že objednávka bude mít prioritní velikost, **za podmínky, že nastal jev** T spočívající v tom, že objednávka je přijata telefonicky. Tuto podmíněnou pravděpodobnost budeme označovat $P(\mathrm{R}|\mathrm{T})$. V tomto příkladu bylo snadné ji určit z tabulky.

b) Referentka řekla, že právě vyřídila prioritní objednávku. S jakou pravděpodobností ji vyřizovala se zákazníkem telefonicky?

ŘEŠENÍ: Máme určit podmíněnou pravděpodobnost jevu T, víme-li, že nastal jev R. Z tabulky vidíme, že $P(\mathrm{T}|\mathrm{R}) = \frac{14}{76} \doteq 18{,}42\ \%$. Všimněte si, že $P(\mathrm{R}|\mathrm{T}) \neq P(\mathrm{T}|\mathrm{R})$!

B Vraťme se k úloze E prvního článku této kapitoly, kde jsme se zabývali jednou z variant pokeru. Hráč své dvě karty z balíčku 52 karet dostává postupně. Je-li první karta, kterou dostal, král, s jakou pravděpodobností mu jako druhá karta přijde také král?

ŘEŠENÍ: Hráč má v ruce krále a v balíčku zbývá 51 karet. Mezi nimi jsou již jen 3 králové, proto hledaná pravděpodobnost musí být $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. Ve skutečnosti jsme opět počítali podmíněnou pravděpodobnost. Označíme-li symbolem K_1 jev spočívající v tom, že první karta, kterou hráč dostane, je král, a symbolem K_2 jev spočívající v tom, že druhá karta, kterou hráč dostane, je král, pak jsme vlastně určili $P(\mathrm{K}_2|\mathrm{K}_1) = \frac{1}{17}$.

Poznamenejme, že v obou předchozích příkladech jsme mohli postupovat i jinak.

V úloze A jsme podmíněnou pravděpodobnost jevu R za podmínky, že nastal jev T, našli jako podíl počtu případů, kdy nastaly oba jevy R a T současně k počtu případů, kdy nastal jev T. Úplně stejný výsledek ale dostaneme, když vydělíme *pravděpodobnost současného výskytu jevů* R a T *pravděpodobností jevu* T.

Skutečně: $$\frac{P(\mathrm{R}\cap\mathrm{T})}{P(\mathrm{T})} = \frac{\frac{14}{4\,000}}{\frac{1\,360}{4\,000}} = \frac{14}{1\,360} = P(\mathrm{R}|\mathrm{T}).$$

V úloze B je $P(\mathrm{K}_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Úvahami používanými mnohokrát v minulém článku můžeme vypočítat $P(\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{1\,326} = \frac{1}{221}$. Dostáváme obdobný vztah:
$$\frac{P(\mathrm{K}_1\cap\mathrm{K}_2)}{P(\mathrm{K}_1)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17} = P(\mathrm{K}_2|\mathrm{K}_1).$$ Tyto úvahy nám poslouží jako motivace k obecné definici podmíněné pravděpodobnosti:

5. Jsou-li A a B libovolné dva jevy takové, že jev B má nenulovou pravděpodobnost, pak **podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B** (nebo stručněji **podmíněnou pravděpodobnost jevu A jevem B**), definujeme jako podíl pravděpodobnosti současného výskytu jevů A a B a pravděpodobnosti jevu B a píšeme:

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})}.$$

C Uvažujme situaci z úlohy B minulého článku, kde jsme se zabývali databází klientů určité banky. Vybereme-li náhodně klienta, který používá kreditní kartu této banky, s jakou pravděpodobností má sjednaný i kontokorent?

Řešení: Máme určit podmíněnou pravděpodobnost jevu A, víme-li, že nastal jev B (používáme označení zavedené v citované úloze). Podle definice podmíněné pravděpodobnosti je: $P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})} = \frac{0{,}21}{0{,}32} = 65{,}625\ \%$.

Odvozený výsledek se dá snadno vysvětlit i laicky, bez použití pravděpodobnostní terminologie. Prostě zhruba 65,6 % (asi dvě třetiny) klientů používajících kreditní kartu má sjednaný i kontokorent.

D Vybereme-li v situaci z předchozí úlohy náhodně klienta, který má sjednaný kontokorent, s jakou pravděpodobností používá i kreditní kartu? (Zkuste sami.)

Cvičení

1 Víme, že mezi 50 součástkami jsou 4 vadné. Při postupné kontrole celé série bylo prvních 8 součástek kvalitních. Jaká je pravděpodobnost, že devátá kontrolovaná součástka bude vadná?

2 Hodili jsme současně dvěma kostkami.

a) S jakou pravděpodobností padla alespoň jedna šestka, víme-li, že padl součet 8?

b) S jakou pravděpodobností padl součet větší než 10, víme-li, že padla alespoň jedna šestka?

3 Hráč pokeru (varianty *Five Card Draw*, při které dostane 5 karet z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet) drží po rozdání v ruce tři krále, eso a sedmičku. Rozhodne se sedmičku vyměnit za jinou kartu z balíčku. S jakou pravděpodobností mu dojde král (tj. bude mít *quads*) nebo eso (tj. bude mít *fullhouse*)?

4 Uvažujte situaci ze cvičení 10 minulého článku, týkajícího se záručních oprav automobilů. Uvedeme znovu tabulku, shrnující počty oprav za poslední rok podle typu závady a podle značky vozu:

		Problém				
		motor	převodovka	výfuk	karoserie	ostatní
Značka	H	106	211	67	133	24
	L	21	115	16	24	6

a) S jakou pravděpodobností se oprava vozu značky L, který je objednán do servisu, bude týkat motoru?

b) Spočítejte všechny možné podmíněné pravděpodobnosti jevů, že se oprava bude týkat jednotlivých problémů za podmínky, že vůz je značky H, resp. L. Výsledky uspořádejte do tabulky. Pokuste se je okomentovat z praktického hlediska.

Z obecné definice podmíněné pravděpodobnosti (vzorec 5 našeho průběžně vytvářeného seznamu) lze pouhým vynásobením obou stran rovnosti $P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \dfrac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})}$ jmenovatelem z pravé strany odvodit **obecný vzorec pro násobení pravděpodobností:**

6. Pro libovolné dva náhodné jevy A a B platí:

$$P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) \cdot P(\mathsf{B}).$$

Pravděpodobnost současného výskytu dvou jevů $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$ budeme též nazývat **sdruženou pravděpodobností jevů** A a B.

Vzhledem k tomu, že operace průnik je komutativní, tj. *nezáleží na pořadí jevů*, můžeme vzorec 6 přepsat do ekvivalentní podoby:

6*. $$P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{B}|\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{A}).$$

E Vraťme se ještě jednou k situaci hráče, který postupně dostane dvě karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet.

a) Pomocí obecného vzorce pro násobení pravděpodobností vypočítejme pravděpodobnost, že hráč dostane dva krále.

ŘEŠENÍ: Hledanou pravděpodobnost můžeme určit přímo pomocí klasické definice pravděpodobnosti jako podíl dvou kombinačních čísel, viz poznámka za úlohou B. Můžeme však také postupovat takto: Máme vypočítat $P(\mathsf{K}_1 \cap \mathsf{K}_2)$ (označení z úlohy B). Podle vzorce pro násobení pravděpodobností je:

$$P(\mathsf{K}_1 \cap \mathsf{K}_2) = P(\mathsf{K}_2|\mathsf{K}_1) \cdot P(\mathsf{K}_1) = \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{221}$$ (porovnejte s řešením úlohy B).

b) Vypočítejme pomocí vzorce pro násobení pravděpodobností pravděpodobnost, že hráč dostane eso a krále.

ŘEŠENÍ: I zde bychom mohli pravděpodobnost určit přímo. V řešení úlohy E článku 3.1 jsme odvodili, že počet kombinací karet příznivých tomuto jevu je 16, počet všech možných kombinací dvou karet z 52 je $\binom{52}{2} = 1\,326$, a proto je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{16}{1\,326} = \frac{8}{663} \doteq 1{,}21\ \%$.

Ukažme si nyní jiný postup, využívající vzorec pro násobení pravděpodobností.

Hráč má mít v ruce eso a krále, nezáleží na tom, v jakém pořadí tyto karty dostane. Toto pořadí však musíme v následujícím výpočtu zohlednit. Zavedeme obdobné označení jako u jevů K_1 a K_2. A_1 nechť označuje jev, že první karta, kterou hráč dostane, je eso, a A_2 označuje jev, že druhá karta je eso. Jev, jehož pravděpodobnost máme určit, nastane, když hráč nejdříve dostane krále a potom eso nebo naopak, tj. můžeme ho vyjádřit ve tvaru $(K_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap K_2)$. Jde o sjednocení dvou neslučitelných jevů, proto jeho pravděpodobnost je součtem jednotlivých pravděpodobností. Je: $P(K_1 \cap A_2) = P(A_2|K_1) \cdot P(K_1) = \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{13} = \frac{4}{663}$ (rozmyslete si sami), obdobně $P(A_1 \cap K_2) = P(K_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{51} \cdot \frac{1}{13} = \frac{4}{663}$, a proto je hledaná pravděpodobnost rovna součtu dvou stejných čísel: $\frac{4}{663} + \frac{4}{663} = \frac{8}{663}$.

Netvrdíme, že právě předvedený postup řešení je zde výhodnější (spíše asi ne), ale pro pochopení souvislostí je dobré o něm vědět.

Cvičení

5 Mezi 50 kontrolovanými součástkami jsou 4 součástky vadné. Použijeme-li 2 náhodně vybrané součástky, s jakou pravděpodobností budou obě bez vady? Zapište výsledek pomocí násobení pravděpodobností.

6 V losovací urně je 5 bílých a 8 černých koulí. Postupně vylosujeme 2 koule, přičemž vylosované koule nevracíme zpět.

a) S jakou pravděpodobností jsou obě vylosované koule bílé?

b) S jakou pravděpodobností jsou vylosované koule různých barev?

Zapište výsledky pomocí násobení pravděpodobností.

7 Základní dělení výrobků určité produkce je na vadné výrobky a kvalitní výrobky, kvalitní výrobky pak jsou zařazeny do první nebo do druhé jakosti. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je první jakosti, víte-li, že 4 % produkce jsou vadné výrobky a 75 % kvalitních výrobků je první jakosti.

8 Je známo, že 4 % panelů od určitého výrobce mají odchylku od požadované délky, 3 % panelů mají odchylku od požadované šířky. Přitom celá čtvrtina panelů majících odchylku délky má i odchylku šířky. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný panel

a) odchylku délky i šířky,

b) odchylku délky nebo šířky,

c) odchylku délky, ale ne šířky,

d) oba rozměry v pořádku,

e) odchylku délky, má-li odchylku šířky?

3.5 Nezávislost jevů, Bernoulliovo schéma

Dostáváme se ke klíčovému pojmu teorie pravděpodobnosti. Řekneme-li v běžné řeči, že dvě situace, dva problémy, dva možné výsledky apod. jsou nezávislé, myslíme tím, že mezi nimi není žádná logická vazba nebo spojitost. Co znamená, když řekneme, že *dva náhodné jevy jsou nezávislé*? Budeme tím též rozumět, že mezi nimi není žádná vazba, a to v následujícím pravděpodobnostním smyslu: Dva jevy jsou nezávislé, když *výskyt jednoho* z nich *neovlivní* (tj. nezmění, nepomůže zpřesnit, opravit) *pravděpodobnost druhého*. Přesněji viz následující definice.

Řekneme, že dva náhodné jevy A a B jsou **nezávislé**, je-li pravděpodobnost prvního z těchto jevů rovna podmíněné pravděpodobnosti tohoto jevu druhým jevem, tj. platí-li $P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$.

U nezávislých jevů, tedy i v předchozí definici by na pořadí jevů nemělo záležet. Skutečně tomu tak je: Platí-li $P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{A}|\mathsf{B})$, pak vzhledem k definici podmíněné pravděpodobnosti (vzorec 5) musí být $P(\mathsf{A}) = \dfrac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})}$. Odtud plyne rovnost $P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{B})$ a z ní dostaneme, že platí také $P(\mathsf{B}) = \dfrac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{A})} = P(\mathsf{B}|\mathsf{A})$. Odvodili jsme tak následující důležitou **větu o nezávislosti jevů:**

7. Dva náhodné jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když platí alespoň jedna z rovností:

$$P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{A}|\mathsf{B}), \quad P(\mathsf{B}) = P(\mathsf{B}|\mathsf{A}), \quad P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{B}).$$

Tyto tři rovnosti jsou ekvivalentní, tj. platí-li kterákoli z nich, musí platit i zbývající dvě. V aplikacích se nejčastěji používá ta poslední, která říká, že **sdružená pravděpodobnost dvou nezávislých jevů je rovna součinu jejich pravděpodobností**.

Nyní se budeme vracet k některým z předchozích úloh a ukážeme si, které jevy jsou nezávislé a které nikoli.

A Uvažujme opět situaci z úlohy A předchozího článku, kde jsme se zabývali strukturou objednávek zásilkového prodejce. Jsou náhodné jevy R, že objednávka je prioritní, a T, že objednávka je přijata telefonicky, nezávislé?

ŘEŠENÍ: Uveďme znovu tabulku struktury objednávek zásilkového prodejce.

		Velikost objednávky				Celkem
		malá	střední	velká	prioritní	
Způsob přijetí objednávky	telefon	1 021	216	109	14	1 360
	e-mail	86	371	308	49	814
	formulář	1 497	230	86	13	1 826
Celkem		2 604	817	503	76	4 000

Z tabulky vidíme, že $P(\mathsf{R}) = \dfrac{76}{4\,000}$, $P(\mathsf{T}) = \dfrac{1\,360}{4\,000}$, $P(\mathsf{R} \cap \mathsf{T}) = \dfrac{14}{4\,000}$. Poslední rovnost z věty o nezávislosti neplatí:

$$P(\mathsf{R} \cap \mathsf{T}) = \frac{14}{4\,000} = 0{,}0035 \neq P(\mathsf{R}) \cdot P(\mathsf{T}) = 0{,}00646,$$

jevy R a T tedy nejsou nezávislé.

Příklad je již vyřešen, ukažme si nicméně ještě jiné, názornější řešení. Z tabulky vidíme, že $P(\mathsf{R}|\mathsf{T}) = \dfrac{14}{1\,360}$. První rovnost z věty o nezávislosti tedy také neplatí:

$$P(\mathsf{R}) = \frac{76}{4\,000} = 1{,}9\ \% \neq P(\mathsf{R}|\mathsf{T}) = \frac{14}{1\,360} \doteq 1{,}03\ \%.$$

Co tato nerovnost znamená? Řekne-li referentka, že právě přijala novou objednávku, odhadneme šanci, tj. pravděpodobnost, že tato objednávka je prioritní, číslem 1,9 %. Prozradí-li nám k tomu, že tuto objednávku vyřizovala po telefonu, *změní* to náš původní odhad. Nyní pravděpodobnost, že tato objednávka je prioritní, klesne na 1,03 %. Je tomu tak proto, že podíl prioritních objednávek mezi telefonickými je *menší* než podíl prioritních objednávek mezi všemi objednávkami v databázi. Výskyt jevu T tedy *ovlivňuje* (mění) pravděpodobnost jevu R.

B V prvním ročníku určité vysoké školy je 220 chlapců, z toho 120 absolventů gymnázia a 100 absolventů jiné střední školy. Dále je v ročníku 132 dívek, z toho 72 absolventek gymnázia a 60 absolventek jiné střední školy. Vybereme-li náhodně jednoho studenta, jsou jevy A, že tento student je chlapec, a B, že tento student absolvoval gymnázium, nezávislé?

Řešení: Platí $P(\mathsf{B}) = \dfrac{120+72}{220+132} = \dfrac{192}{352} = \dfrac{6}{11}$, $P(\mathsf{B}|\mathsf{A}) = \dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$. Uvažované jevy jsou tedy nezávislé. (Jednoduché vysvětlení: Podíl absolventů gymnázia je na uvažované vysoké škole stejný mezi chlapci jako mezi dívkami. Kdyby tyto podíly stejné nebyly, pak by o nezávislé jevy nešlo.)

C Hodíme postupně dvěma kostkami. Označíme si symbolem A jev spočívající v tom, že na první kostce padne liché číslo, a symbolem B jev spočívající v tom, že na druhé kostce padne šestka. Jsou tyto dva jevy nezávislé?

ŘEŠENÍ: Je zřejmé, že tyto jevy jsou nezávislé. Případný výskyt jevu A nám nijak nepomůže zpřesnit (opravit) pravděpodobnost jevu B. Bez ohledu na to, co padlo na první kostce, pravděpodobnost, že na druhé kostce padne šestka, je $\frac{1}{6}$. Tedy $P(\mathrm{B}) = \frac{1}{6} = P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$.

V předchozí úloze jsme se setkali s poměrně častou situací. Uvažovaný náhodný pokus (hod dvěma kostkami) se skládal ze dvou dílčích pokusů – hodu první kostkou a hodu druhou kostkou. Ať nastane v prvním pokusu jakýkoli výsledek, nijak to neovlivní pravděpodobnosti jednotlivých výsledků v pokusu druhém. (Kostky „nemají paměť“, padla-li poprvé šestka, pravděpodobnost, že padne i podruhé šestka, zůstává stejná, a to $\frac{1}{6}$.) Můžeme říci, že tyto dva dílčí pokusy jsou nezávislé. Obecně platí:

Skládá-li se náhodný pokus ze dvou nezávislých dílčích pokusů a je-li jev A určen prvním dílčím pokusem a jev B druhým dílčím pokusem, pak jsou jevy A a B nezávislé.

Uveďme alespoň dva další typické příklady takto nezávislých jevů:

- Koupíme dva losy z různých loterií. Jev A označuje skutečnost, že první los vyhrává, jev B označuje skutečnost, že druhý los vyhrává.
- Honza a Adam si koupí notebooky dvou různých značek. Jev A spočívá v tom, že Honzův notebook se porouchá během záruční doby, jev B spočívá v tom, že Adamův notebook se porouchá během záruční doby.

8. Zobecníme nyní definici nezávislosti jevů pro více než dva jevy. Vyjdeme přitom ze třetí rovnosti ve větě o nezávislosti dvou jevů (věta 7 z našeho seznamu).
   - Řekneme, že **tři náhodné jevy** A, B a C **jsou nezávislé**, jestliže platí:
     $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$, $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{C})$, $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{C})$,
     $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{C})$.
   - Řekneme, že **čtyři náhodné jevy** A, B, C a D **jsou nezávislé**, jestliže pro každou dvojici těchto jevů je pravděpodobnost jejich průniku rovna součinu příslušných dvou pravděpodobností, dále jestliže pro každou trojici těchto jevů je pravděpodobnost jejich průniku rovna součinu příslušných tří pravděpodobností, a konečně jestliže pro celou čtveřici těchto jevů je pravděpodobnost jejich průniku rovna součinu všech čtyř pravděpodobností.
   - Obecně: **Konečná množina náhodných jevů je tvořena nezávislými jevy**, jestliže pro její libovolnou podmnožinu platí, že pravděpodobnost průniku jevů z této podmnožiny je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

D V kopírovacím centru je 5 kopírek, z toho jsou 3 černobílé a 2 barevné. Předpokládejme, že z dlouhodobé zkušenosti je známo, že pravděpodobnost poruchy černobílé kopírky je 0,1, pravděpodobnost poruchy barevné kopírky je 0,2. (Pravděpodobností poruchy rozumíme pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném okamžiku během pracovní doby bude mít kopírka poruchu.) Předpokládejme, že poruchy kopírek vznikají nezávisle na sobě. Předpokládejme dále, že v případě nutnosti může být barevná kopírka použita k černobílému kopírování.

a) S jakou pravděpodobností bude zákazník, který požaduje černobílou kopii, obsloužen?

Řešení: Spočítejme pravděpodobnost *opačného* jevu, tj. jevu, že zákazník nebude obsloužen. Toto nastane právě tehdy, když všech 5 kopírek bude kvůli poruchám současně mimo provoz. Označíme si A_1 jev, že první černobílá kopírka má poruchu, A_2 jev, že druhá černobílá kopírka má poruchu, A_3 jev, že třetí černobílá kopírka má poruchu, B_1 jev, že první barevná kopírka má poruchu, a B_2 jev, že druhá barevná kopírka má poruchu. Jev spočívající v tom, že všech pět kopírek má poruchu, můžeme zapsat jako průnik $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3 \cap \mathsf{B}_1 \cap \mathsf{B}_2$. Jeho pravděpodobnost je vzhledem k předpokladu nezávislosti rovna součinu

$$P(\mathsf{A}_1) \cdot P(\mathsf{A}_2) \cdot P(\mathsf{A}_3) \cdot P(\mathsf{B}_1) \cdot P(\mathsf{B}_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}000\,04.$$

Pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen, je tedy rovna $1 - 0{,}000\,04 = 0{,}999\,96$ (tedy téměř 100 %).

b) S jakou pravděpodobností bude zákazník, který požaduje černobílou i barevnou kopii, obsloužen?

Řešení: Aby byl tento zákazník obsloužen, musí být alespoň jedna barevná kopírka v provozu. Naopak obsloužen nebude, když budou obě barevné kopírky kvůli poruchám stát. Na počtu a funkčnosti černobílých kopírek zde tedy nezáleží. Pravděpodobnost, že obě barevné kopírky mají poruchu, je $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$, a tedy pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen, je 0,96.

c) S jakou pravděpodobností bude v náhodně zvoleném okamžiku všech 5 kopírek v provozu?

Řešení: Tento jev můžeme zapsat jako $\mathsf{A}_1' \cap \mathsf{A}_2' \cap \mathsf{A}_3' \cap \mathsf{B}_1' \cap \mathsf{B}_2'$ a jeho pravděpodobnost je rovna $(1 - 0{,}1)^3 \cdot (1 - 0{,}2)^2 = 0{,}466\,56$.

Cvičení

1 Pokus se skládá z hodu dvěma mincemi. Uvažujte následující dva jevy. Jev A: na první minci padne líc, jev B: na druhé minci padne líc. Jsou tyto jevy nezávislé?

2 Určitý výrobek má s pravděpodobností 0,1 vadu vzhledu, s pravděpodobností 0,06 funkční vadu a s pravděpodobností 0,03 obě vady současně. Jsou jevy „vada vzhledu“ a „funkční vada“ nezávislé?

3 Z rozmíchaného balíčku 32 mariášových karet vytáhneme jednu kartu. Upřesněme, že tento balíček se skládá ze čtyř různých barev (*červené, zelené, žaludy* a *kule*), od každé barvy je v něm 8 karet různých hodnot (*eso, král, dáma, kluk,* *desítka, devítka, osmička* a *sedmička*). Jev A spočívá v tom, že vytažená karta je červená, jev B spočívá v tom, že je to desítka, a jev C v tom, že jde o eso.

a) Jsou jevy A a B nezávislé?

b) Jsou jevy A a C nezávislé?

c) Jsou jevy B a C nezávislé?

4 Z 500 výrobků je 430 výrobků první jakosti a 70 druhé jakosti. Z výrobků první jakosti bylo 350 vyrobeno v dílně C a 80 v dílně D. Z výrobků druhé jakosti bylo 50 vyrobeno v dílně C a 20 v dílně D. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybereme výrobek první jakosti, a jev C v tom, že náhodně vybereme výrobek vyrobený v dílně C. Jsou jevy A a C nezávislé?

5 Tři kamarádi se v baru domluvili, že ten, na kterého padne los, zaplatí za všechny útratu. Losují tak, že každý hodí mincí a ten, kterému jeho mince ukáže jinou stranu než mince zbývajících dvou, musí zaplatit. Pokud všechny mince ukážou stejnou stranu, házení opakují až do rozhodnutí.

a) S jakou pravděpodobností se rozhodne již prvním hodem?

b) S jakou pravděpodobností nebude ani po druhém hodu rozhodnuto?

c) S jakou pravděpodobností nebude ani po čtvrtém hodu rozhodnuto?

d) Lze předem stanovit, po kolikátém hodu již musí být rozhodnuto?

6 V osudí jsou dvě bílé a tři černé koule. Vytáhneme postupně dvě koule, přičemž po prvním tahu kouli vracíme do osudí a osudí promícháme. Jaká je pravděpodobnost, že obě koule budou bílé?

7 Přístroj se skládá ze tří částí, z nichž každá nezávisle na zbývajících může mít v průběhu určité doby poruchu. Porucha kterékoliv části má za následek poruchu celého přístroje. Spolehlivost (tj. pravděpodobnost, že nedojde k poruše) první části je 0,8, druhé 0,9 a třetí 0,7. Jaká je spolehlivost celého přístroje?

8 Pravděpodobnost vyrobení výrobku I. jakosti na stroji A je rovna 0,9, na stroji B je rovna 0,85. Na stroji A mají být zhotoveny tři výrobky a na stroji B dva výrobky. Určete, s jakou pravděpodobností budou všechny výrobky I. jakosti.

9 V nádražní hale jsou umístěny tři automaty na kávu. U prvního nastane porucha s pravděpodobností 0,1, u druhého s pravděpodobností 0,15 a u třetího s pravděpodobností 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že nastane porucha

a) právě jednoho automatu,

b) nejvýše jednoho automatu?

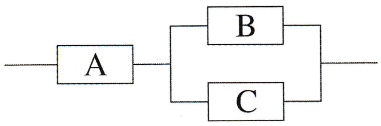
10 Sportovní střelec střílí opakovaně do terče (obr. 3.2, str. 120). Předpokládejme, že střelec zasáhne střed terče a získá tím 5 bodů s pravděpodobností 0,55, zasáhne vnitřní mezikruží a získá 3 body s pravděpodobností 0,35, zasáhne vnější mezikruží a získá 2 body s pravděpodobností 0,05, zasáhne základní desku a získá 1 bod s pravděpodobností 0,03. Terč mine se zbývající pravděpodobností 0,02. S jakou pravděpodobností bude mít

a) po dvou výstřelech přesně 5 bodů,

b) po třech výstřelech alespoň 12 bodů?

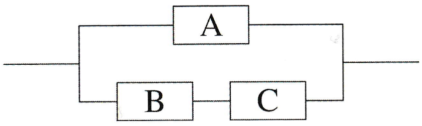
Předpokládejte, že výsledky jednotlivých výstřelů lze považovat za nezávislé jevy.

11 Určité zařízení se skládá ze tří prvků – viz obrázek 3.3. Aby celé zařízení fungovalo, musí fungovat prvek A a současně alespoň jeden z prvků B a C (tyto dva prvky se nahrazují – ve schématu je to naznačeno jejich paralelním zapojením). Spolehlivosti (tj. pravděpodobnosti, že nedojde k poruše) jednotlivých součástí jsou 0,9 pro prvek A, 0,8 pro prvek B a 0,7 pro prvek C. Jaká je spolehlivost celého zařízení za předpokladu nezávislosti vzniku poruch u jednotlivých prvků?



Obr. 3.3

12 Uvažujte zařízení sestavené ze stejných prvků se stejnými spolehlivostmi jako v předchozím cvičení, avšak s jiným způsobem zapojení – viz obrázek 3.4. Nyní, jak vidíme ze schématu, je k funkčnosti zařízení potřeba, aby fungoval prvek A nebo oba prvky B, C současně (neboli prvek A může být nahrazen současným zapojením prvků B a C). Jaká je spolehlivost tohoto zařízení?



Obr. 3.4

E Z osudí, ve kterém je patnáct bílých a pět černých koulí, postupně vylosujeme čtyři koule, přičemž po každém tahu taženou kouli vrátíme do osudí a osudí promícháme.

a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny tažené koule budou bílé?

Řešení: Jde o náhodný pokus se čtyřmi dílčími nezávislými pokusy. Označíme-li si symbolem A_i, kde $i = 1, 2, 3, 4$, jev, že v i-tém tahu vytáhneme bílou kouli, pak jevy A_1, A_2, A_3, A_4 jsou nezávislé a všechny mají stejnou pravděpodobnost $\frac{15}{20} = 0{,}75$. Jev spočívající v tom, že všechny tažené koule jsou bílé, je průnikem těchto čtyř jevů, a proto je jeho pravděpodobnost rovna součinu jednotlivých pravděpodobností, tj. $0{,}75^4 \doteq 31{,}64\ \%$.

b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi taženými koulemi budou tři bílé a jedna černá?

Řešení: Jev, že mezi taženými koulemi je právě jedna černá, může nastat následujícími čtyřmi navzájem se vylučujícími způsoby:

- vytáhneme černou kouli hned v prvním tahu a pak tři bílé;
- vytáhneme napřed bílou, pak černou a dále dvě bílé;
- vytáhneme nejprve dvě bílé, pak černou a nakonec bílou;
- vytáhneme napřed tři bílé a nakonec černou.

Pravděpodobnost každého z těchto čtyř jevů je však stejná. První z těchto jevů můžeme symbolicky vyjádřit jako $\mathsf{A}_1' \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3 \cap \mathsf{A}_4$ a jeho pravděpodobnost je rovna $(1-0{,}75)\cdot 0{,}75\cdot 0{,}75\cdot 0{,}75 = 0{,}75^3\cdot 0{,}25$. Druhý jev můžeme vyjádřit jako $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2' \cap \mathsf{A}_3 \cap \mathsf{A}_4$ a jeho pravděpodobnost je $0{,}75\cdot(1-0{,}75)\cdot 0{,}75\cdot 0{,}75 = 0{,}75^3\cdot 0{,}25$ atd.

Hledaná pravděpodobnost, že mezi vylosovanými budou právě tři bílé a jedna černá koule, je tedy rovna součtu čtyř stejných pravděpodobností:

$$4\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25 \doteq 42{,}19\ \%.$$

c) Jaká je pravděpodobnost, že vylosujeme dvě bílé a dvě černé koule?

Řešení: Jev, že mezi vytaženými koulemi jsou právě dvě bílé a právě dvě černé koule, může nastat šesti navzájem se vylučujícími způsoby. Každý z těchto způsobů je jednoznačně vyjádřen např. neuspořádanou dvojicí čísel tahů, ve kterých jsme vylosovali bílou kouli. Těchto dvojic je právě šest, jde o počet dvojčlenných kombinací ze čtyř prvků. Každý z těchto způsobů má opět stejnou pravděpodobnost. Např. pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním a čtvrtém tahu (a černou ve zbývajících dvou tazích), je rovna $0{,}75\cdot(1-0{,}75)\cdot(1-0{,}75)\cdot 0{,}75 = 0{,}75^2\cdot 0{,}25^2$, stejná je však třeba pravděpodobnost, že bílou kouli vytáhneme poprvé a podruhé a pak vytáhneme dvě černé koule apod. Tudíž hledaná pravděpodobnost, že mezi čtyřmi losovanými koulemi jsou právě dvě bílé, je rovna

$$\binom{4}{2}\cdot 0{,}75^2\cdot 0{,}25^2 = 6\cdot 0{,}75^2\cdot 0{,}25^2 \doteq 21{,}09\ \%.$$

Uvědomíme-li si, že $\binom{4}{3} = 4$, dala by se i již odvozená pravděpodobnost z otázky b) zapsat pomocí kombinací: $4\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25 = \binom{4}{3}\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25$.

Není už těžké shrnout odvozené výsledky a uvědomit si, že z hlediska počtu tažených bílých koulí mezi čtyřmi vylosovanými může nastat celkem 5 navzájem se vylučujících situací – jevů B_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, kde jev B_k spočívá v tom, že mezi čtyřmi vylosovanými bylo taženo právě k bílých koulí. Pravděpodobnost každé z těchto situací je dána vzorcem: $P(\mathsf{B}_k) = \binom{4}{k}\cdot 0{,}75^k\cdot 0{,}25^{4-k}$. Již jsme ukázali, že tento vzorec platí pro $k = 3$ a $k = 2$. Platí i pro $k = 4$, neboť $\binom{4}{4} = 1$ a $P(\mathsf{B}_4) = \binom{4}{4}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^0 = 0{,}75^4$ (srovnejte s výslednou pravděpodobností z a)). Jeho platnost pro $k = 0$ a $k = 1$ si ověřte sami.

V úloze E jsme uvažovali čtyři nezávislé dílčí pokusy, které spočívaly v losování koule z osudí. V každém dílčím pokusu mohl nastat jen jeden ze dvou možných výsledků – *zdar* nebo *nezdar*. Domluvme se, že za zdar považujeme vytažení bílé a za nezdar vytažení černé koule. Ve všech dílčích pokusech je pravděpodobnost zdaru konstantní, tj. během pokusů se nemění. Tato pravděpodobnost je rovna 0,75, její neměnnost plyne z toho, že taženou kouli do osudí vždy před dalším tahem vracíme, poměr bílých a černých koulí je tedy stále stejný. Během řešení úlohy E jsme odvodili vzorec, jak lze vypočítat pravděpodobnost, že v dané sérii čtyř dílčích pokusů nastane určitý (předem daný) počet zdarů. Nyní tento vzorec zobecníme pro libovolný konečný počet dílčích pokusů a libovolnou pravděpodobnost zdaru.

Uvažujme sérii n dílčích pokusů, z nichž každý může skončit buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností $q = 1 - p$. Jestliže jsou tyto dílčí pokusy *nezávislé* a pravděpodobnost zdaru p je v každém z nich *stejná*, pak pravděpodobnost náhodného jevu A_k, že v celé sérii nastane *právě k zdarů*, je rovna

$$P(\mathsf{A}_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ kde } k \text{ je libovolné číslo z množiny } \{0, 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}.$$

Uvedené pravděpodobnosti tvoří tzv. **Bernoulliovo schéma** nebo také **binomické rozdělení**.

Výše uvedené jevy A_k se navzájem vylučují. Vždy však musí nastat právě jeden z nich, tj. jejich sjednocení je jistý jev. Proto součet jejich pravděpodobností musí být roven jedné. To lze odvodit také následujícím způsobem:
Podle binomické věty pro libovolná čísla p a q platí

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^1 + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0,$$

ale jelikož $p + q = 1$, musí být i součet na pravé straně předchozí rovnosti roven jedné.

F Házíme postupně kostkou. Určeme, s jakou pravděpodobností nastanou následující jevy:

a) V šesti po sobě jdoucích hodech padne právě jedna šestka.

Řešení: Použijeme *Bernoulliovo schéma*. Jde o šest nezávislých dílčích pokusů (hody kostkou), v každém z nich buď padne šestka s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, nebo padne jiné číslo s pravděpodobností $\frac{5}{6}$. Tedy $n = 6$ a $p = \frac{1}{6}$ (padnutí šestky považujeme za zdar). Máme spočítat pravděpodobnost, že nastane právě jeden zdar, tj. $k = 1$. Hledaná pravděpodobnost je rovna $\binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \doteq 40{,}19\ \%$.

b) Ve dvanácti po sobě jdoucích hodech padnou právě dvě šestky.

ŘEŠENÍ: Použijeme stejné úvahy a označení jako v úloze a). Nyní je $n = 12$ a $k = 2$, pravděpodobnost zdaru p je samozřejmě beze změny. Hledaná pravděpodobnost je rovna $\binom{12}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \doteq 29{,}61\ \%$.

c) Ve dvanácti po sobě jdoucích hodech padnou alespoň dvě šestky.

ŘEŠENÍ: Je opět $n = 12$ a $p = \frac{1}{6}$; mohli bychom sečíst pravděpodobnosti pro $k = 2$, $k = 3$ atd. až po $k = 12$. Je však jednodušší spočítat pravděpodobnost opačného jevu.

Opačným jevem k jevu, že padnou alespoň dvě šestky, je jev, že nepadne žádná nebo padne jedna šestka. Pravděpodobnost tohoto jevu je rovna

$$\binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \doteq 0{,}112\,16 + 0{,}269\,18 \doteq 0{,}381\,3.$$

Tedy hledaná pravděpodobnost je přibližně rovna $1 - 0{,}381\,3 = 0{,}618\,7$, tj. 61,87 %.

G Student má u přijímací zkoušky odpovědět na 15 testových otázek. U každé otázky jsou nabídnuty čtyři odpovědi A, B, C a D, z nichž je vždy právě jedna správná. Aby student u zkoušky uspěl, musí správně odpovědět alespoň na 10 otázek. Vypočtěte, s jakou pravděpodobností se mu to podaří v následujících případech:

a) Vůbec nic neumí a odpovědi volí zcela náhodně.

ŘEŠENÍ: Můžeme opět použít Bernoulliovo schéma. Studentovy odpovědi na jednotlivé otázky lze považovat za dílčí nezávislé pokusy; pravděpodobnost zdaru, tj. označení správné odpovědi, je pokaždé rovna $\frac{1}{4}$. Je tedy $n = 15$, $p = 0{,}25$. Máme spočítat pravděpodobnost, že počet zdarů bude alespoň 10, tj. musíme sečíst pravděpodobnosti z Bernoulliova schématu pro $k = 10, 11, \ldots, 15$:

$$\binom{15}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^5 + \binom{15}{11} \cdot 0{,}25^{11} \cdot 0{,}75^4 + \cdots + \binom{15}{15} \cdot 0{,}25^{15} \cdot 0{,}75^0 \doteq 0{,}079\,5\ \%.$$

Jak se dalo očekávat, hledaná pravděpodobnost je velice malá.

b) Část látky se naučil, a tak si je u šesti otázek jistý, jaká odpověď je správná, u dalších však opět hádá.

ŘEŠENÍ: Student nyní hádá jen devětkrát (6 správných odpovědí zná), tedy $n = 9$. Aby uspěl, musí alespoň čtyřikrát označit správnou odpověď. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$\binom{9}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^5 + \binom{9}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^4 + \cdots + \binom{9}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^0 \doteq 16{,}57\ \%.$$

Cvičení

13 Hodíme a) deseti, b) dvaceti, c) třiceti mincemi. S jakou pravděpodobností na polovině z nich padne líc?

14 Pravděpodobnost, že spotřeba plynu ve všední den určitého období přesáhne stanovenou normu, je 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že během pěti náhodně volených pracovních dnů

a) nebude norma překročena, b) bude překročena dvakrát?

15 Rozhlasová aparatura se skládá z 1 000 prvků, z nichž každý se během jednoho roku porouchá s pravděpodobností 0,001. Tato pravděpodobnost nezávisí na stavu ostatních prvků. Jaká je pravděpodobnost, že se za rok porouchají

a) dva prvky, b) nejméně dva prvky?

16 Určitý lék úspěšně vyléčí určitou nemoc v 90 % případů. Je-li podán deseti pacientům, s jakou pravděpodobností bude alespoň osm z nich vyléčeno?

17 Je známo, že 8 % hodinek určité značky je reklamováno kvůli poruše během záruční doby. S jakou pravděpodobností budou u 15 prodaných hodinek více než dvě reklamace?

*3.6 Rozšiřující učivo: Úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

V tomto článku se vrátíme k podmíněné pravděpodobnosti a doplníme naše znalosti o dva vzorce důležité v aplikacích. Pro motivaci se nejprve vrátíme k již několikrát rozebírané karetní hře.

A Hráč pokeru dostane postupně dvě karty z balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností je druhá karta král?

ŘEŠENÍ: Otázka zdánlivě nemá smysl, na první pohled se zdá, že je nutno doplnit informaci, jakou kartu dostal hráč jako první. Tuto informaci ale nemusíme mít. Prakticky si to lze dobře představit: Hráč dostává své dvě karty postupně, lícem dolů. Chce-li se na ně podívat, může napřed otočit tu, kterou dostal jako druhou, a tedy první karta je v tuto chvíli pro něj opravdu neznámá. Nicméně za účelem vyřešení úlohy se musíme i touto první kartou zabývat.

Použijeme již dříve zavedené označení a odvozené výsledky:

K_1 označuje jev, že první karta je král, $P(\mathsf{K}_1) = \frac{1}{13}$. K_2 označuje jev, že druhá karta je král, pravděpodobnost tohoto jevu máme určit. Kdybychom věděli, jaká karta přišla hráči jako první, uměli bychom podmíněnou pravděpodobnost jevu K_2 vypočítat velmi snadno: $P(\mathsf{K}_2|\mathsf{K}_1) = \frac{3}{51}$, podobně platí $P(\mathsf{K}_2|\mathsf{K}_1') = \frac{4}{51}$. Jevy K_1 a K_1' jsou opačné – navzájem se vylučují a jeden z nich musí nastat. Proto platí $\mathsf{K}_2 = (\mathsf{K}_2 \cap \mathsf{K}_1) \cup (\mathsf{K}_2 \cap \mathsf{K}_1')$.

Jevy $K_2 \cap K_1$ a $K_2 \cap K_1'$ se však také vylučují, a proto můžeme náš výpočet dokončit s použitím vzorců 2 a 6 z předchozích článků:

$$P(K_2) = P(K_2 \cap K_1) + P(K_2 \cap K_1') = P(K_2|K_1) \cdot P(K_1) + P(K_2|K_1') \cdot P(K_1') =$$
$$= \frac{3}{51} \cdot \frac{1}{13} + \frac{4}{51} \cdot \frac{12}{13} = \frac{1}{13}.$$

Dokázali jsme na první pohled překvapivý výsledek. Pravděpodobnost, že druhá karta, kterou hráč dostane, bude král, nemáme-li informaci o první kartě, je stejná jako pravděpodobnost, že první karta je král. Tento výsledek se dá zobecnit i na jiné situace, např.:

- Losujeme-li postupně bez vracení koule z osudí, kde na počátku bylo b bílých koulí a c černých koulí, pak pravděpodobnost, že první vylosovaná koule je bílá, je rovna $\frac{b}{b+c}$. Stejná je ale i pravděpodobnost, že druhá koule bude bílá, nemáme-li žádnou informaci o barvě první koule (např. pokud jsme se na ni nepodívali a dali ji stranou).
- Kontrolujeme-li postupně kvalitu určité produkce, kde je celkem k kvalitních a n nekvalitních výrobků, pak pravděpodobnost, že první kontrolovaný výrobek je nekvalitní, je rovna $\frac{n}{n+k}$. Opět stejná je i pravděpodobnost, že druhý kontrolovaný výrobek je nekvalitní, nemáme-li dosud k dispozici žádnou informaci o kvalitě prvního kontrolovaného výrobku.

V řešení úlohy A jsme pracovali se dvěma opačnými jevy K_1 a K_1'. Takové jevy se samozřejmě vylučují, přičemž právě jeden z nich musí vždy nastat, tj. jejich sjednocení je rovno jistému jevu. Navzájem opačné dva jevy jsou speciálním případem tzv. *úplného systému vylučujících se jevů*. Obecně se takový systém definuje následovně:

Jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tvoří **úplný systém vylučujících se jevů**, jestliže se libovolné dva z těchto jevů navzájem vylučují a jestliže vždy musí právě jeden z jevů $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nastat, tj. jestliže $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.

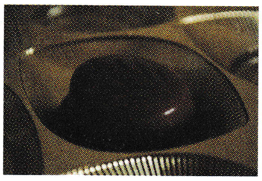
Princip výpočtu pravděpodobnosti jevu K_2 v řešení úlohy A lze zobecnit pro libovolný jev a pro libovolný úplný systém vylučujících se jevů:

9. Je-li A libovolný náhodný jev a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ libovolný úplný systém vylučujících se jevů, pak platí

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

Této rovnosti říkáme **věta o úplné pravděpodobnosti**.

B V čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách. Na lince A je zkompletováno 40 % denní produkce a na základě dlouhodobé zkušenosti se odhaduje, že 5 % bonboniér z této linky není v normě (obsahuje více nebo méně bonbonů, než má být). Na lince B je zkompletováno 45 % denní produkce a odhaduje se, že 4 % bonboniér z této linky nejsou v normě. Na modernější lince C, která běží zatím ve zkušebním provozu, je zkompletován zbytek denní produkce, přičemž podle odhadu jen 2 % bonboniér nejsou v normě. Zkontrolujeme-li bonboniéru náhodně vybranou z celé denní produkce, s jakou pravděpodobností nebude v normě?



ŘEŠENÍ: Ukážeme si postup používající větu o úplné pravděpodobnosti. Označme si A jev, že náhodně vybraná bonboniéra byla zkompletována na lince A, B jev, že byla zkompletována na lince B, a C jev, že byla zkompletována na lince C. Jevy A, B a C evidentně tvoří úplný systém vylučujících se jevů; ze zadání plyne, že $P(\mathsf{A}) = 0{,}4$, $P(\mathsf{B}) = 0{,}45$ a $P(\mathsf{C}) = 1 - 0{,}4 - 0{,}45 = 0{,}15$. Označme si N jev spočívající v tom, že náhodně vybraná bonboniéra není v normě. Fakt, že 5 % bonboniér zkompletovaných na lince A není v normě, musíme chápat jako podmíněnou pravděpodobnost, že bonboniéra není v normě za podmínky, že pochází z linky A, tj. $P(\mathsf{N}|\mathsf{A}) = 0{,}05$. Podobně platí: $P(\mathsf{N}|\mathsf{B}) = 0{,}04$, $P(\mathsf{N}|\mathsf{C}) = 0{,}02$.

Nyní můžeme dokončit výpočet pomocí věty o úplné pravděpodobnosti:
Roli jevu A hraje jev N, $n = 3$ a roli jevů B_1, B_2 a B_3 hrají jevy A, B a C. Tedy:

$$P(\mathsf{N}) = P(\mathsf{N}|\mathsf{A}) \cdot P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{N}|\mathsf{B}) \cdot P(\mathsf{B}) + P(\mathsf{N}|\mathsf{C}) \cdot P(\mathsf{C}) =$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}4 + 0{,}04 \cdot 0{,}45 + 0{,}02 \cdot 0{,}15 = 0{,}041.$$

Výsledek úlohy B se dá odvodit a vysvětlit i bez použití pravděpodobnostních termínů: Počet procent nevyhovujících bonboniér v celé produkci je *váženým průměrem* počtu procent nevyhovujících bonboniér z jednotlivých linek, kde vahami jsou podíly linek na celkové produkci. Tj. $5\ \% \cdot 0{,}4 + 4\ \% \cdot 0{,}45 + 2\ \% \cdot 0{,}15 = 4{,}1\ \%$. O váženém průměru se dozvíte více v kapitole věnované statistice.

Cvičení

1 V osudí je 6 bílých, 8 červených a 10 modrých kuliček. Postupně bez vracení vylosujeme dvě kuličky. S jakou pravděpodobností bude

a) první modrá,

b) druhá modrá, víme-li, že první byla červená,

c) druhá modrá (aniž víme, jakou barvu měla první)?

2 V zásilce je 400 výrobků, z nichž 150 dodal závod A a 250 závod B. Každý závod měl ve své dodávce 5 vadných výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme vadný výrobek, pokud

a) jej vybíráme náhodně z celé zásilky,

b) nejdříve náhodně vybereme dodávku, a teprve poté z ní výrobek?

3 V přístroji jsou tři lampy, které pracují zcela nezávisle. Pravděpodobnost poruchy první lampy je 0,1, druhé 0,2 a třetí 0,3. Přístroj je vyřazen z provozu při poruše jedné lampy s pravděpodobností 0,25, při poruše dvou lamp s pravděpodobností 0,6 a při poruše tří lamp s pravděpodobností 0,9. Fungují-li všechny tři lampy, pak je přístroj v provozu vždy. Určete pravděpodobnost, že

a) nefunguje právě jedna lampa,

b) nefungují právě dvě lampy,

c) nefungují všechny tři lampy,

d) přístroj je vyřazen z provozu.

C Vraťme se k úloze B a položme si doplňující otázku: Jestliže vybereme z celé produkce náhodně bonboniéru a zjistíme, že *není v normě*, s jakou pravděpodobností byla zkompletována na lince A, resp. na lince B, resp. na lince C?

ŘEŠENÍ: Použijeme označení a odvozené výsledky z řešení úlohy B.
Především je třeba si uvědomit, že nyní máme vypočítat *podmíněné pravděpodobnosti* $P(\mathrm{A}|\mathrm{N})$, $P(\mathrm{B}|\mathrm{N})$ a $P(\mathrm{C}|\mathrm{N})$. K tomu použijeme definici podmíněné pravděpodobnosti (vzorec 5), obecný vzorec pro násobení pravděpodobností (vzorec 6) a větu o úplné pravděpodobnosti (vzorec 9):

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{N}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \frac{P(\mathrm{N}|\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{N}|\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{C})\cdot P(\mathrm{C})} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}4}{0{,}041} \doteq 48{,}78\ \%.$$

Zcela obdobně vypočteme

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{N}) = \frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \frac{P(\mathrm{N}|\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{N}|\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{C})\cdot P(\mathrm{C})} = \frac{0{,}04\cdot 0{,}45}{0{,}041} \doteq 43{,}90\ \%,$$

$$P(\mathrm{C}|\mathrm{N}) = \frac{P(\mathrm{C}\cap\mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \frac{P(\mathrm{N}|\mathrm{C})\cdot P(\mathrm{C})}{P(\mathrm{N}|\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{N}|\mathrm{C})\cdot P(\mathrm{C})} = \frac{0{,}02\cdot 0{,}15}{0{,}041} \doteq 7{,}32\ \%.$$

Všimněte si, že součet podmíněných pravděpodobností $P(\mathrm{A}|\mathrm{N})$, $P(\mathrm{B}|\mathrm{N})$ a $P(\mathrm{C}|\mathrm{N})$ je roven 1 (tj. 100 %). Musí tomu tak být, neboť jevy A, B a C tvoří úplný systém vylučujících se jevů.

Praktický význam odvozených výsledků můžeme vysvětlit třeba takto:
Vybereme-li náhodně bonboniéru a nezkoumáme její kvalitu, pak máme celkem tři hypotézy, odkud může pocházet – z linky A, B nebo C. Bez dalších informací je nejpravděpodobnější hypotézou, že pochází z linky B ($P(\mathrm{B}) = 45$ %).
Zjistíme-li však, že vybraná bonboniéra není v normě, pak je třeba změnit odhad – nyní soudíme, že s největší pravděpodobností (48,78 %) pochází z linky A, zatímco z linky B pochází s pravděpodobností pouze 43,9 %.

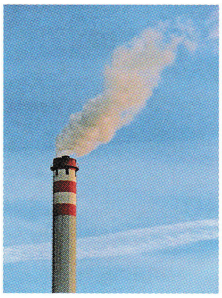
Původní odhad pravděpodobnosti (45 %), že ještě nezkontrolovaná bonboniéra pochází z linky B, je tzv. *apriorní* pravděpodobnost hypotézy B. Opravený odhad této pravděpodobnosti, víme-li, že nastal jev N, je tzv. *aposteriorní* pravděpodobnost hypotézy B. Řešení úlohy C dává vcelku jasný návod, jak hledat aposteriorní pravděpodobnosti – viz následující, již poslední vzorec v této kapitole.

10. Je-li A libovolný náhodný jev a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ libovolný úplný systém vylučujících se jevů, tzv. hypotéz jevu A, pak pro libovolnou hypotézu B_k, $1 \leq k \leq n$, platí tzv. **Bayesův vzorec**:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}.$$

Bayesův vzorec se používá, jestliže známe *apriorní pravděpodobnosti* všech hypotéz $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ a také všechny *podmíněné pravděpodobnosti* určitého jevu A za podmínky platnosti těchto hypotéz $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, ..., $P(A|B_n)$. Víme-li, že nastal jev A, potom Bayesovým vzorcem můžeme opravit (zpřesnit) původní apriorní pravděpodobnost $P(B_k)$ libovolné hypotézy B_k a nahradit ji aposteriorní pravděpodobností $P(B_k|A)$.

D Komín tepelné elektrárny čas od času vypouští nadlimitní (nepřípustné) množství škodlivých emisí. Z dlouhodobé zkušenosti víme, že k tomu dochází v průměru v 1 % případů (v jedné setině provozní doby).



Na komín bylo namontováno čidlo sledující množství emisí. Toto čidlo však není stoprocentně spolehlivé. Při jeho kalibraci bylo zjištěno, že pokud komín ve skutečnosti vypouští přípustné množství emisí, pak čidlo indikuje nadlimitní množství s pravděpodobností 4 %, hraniční množství s pravděpodobností 5 % a přípustné množství s pravděpodobností 91 %. Pokud komín ve skutečnosti vypouští nadlimitní množství emisí, pak čidlo indikuje nadlimitní množství s pravděpodobností 92 %, hraniční množství s pravděpodobností 5 % a přípustné množství s pravděpodobností 3 %. Zjistí-li obsluha, že čidlo právě ukazuje nadlimitní množství emisí, s jakou pravděpodobností opravdu komín nadlimitní množství právě vypouští?

Řešení: V úloze můžeme rozlišit celkem pět náhodných jevů:

- jev B_1: komín vypouští nadlimitní množství emisí;
- jev B_2: komín vypouští přípustné množství emisí;
- jev A_1: čidlo indikuje nadlimitní množství emisí;

- jev A_2: čidlo indikuje hraniční množství emisí;
- jev A_3: čidlo indikuje přípustné množství emisí.

Samozřejmě platí, že $B_2 = B_1'$, ale ponechme označení ve stavu co nejpodobnějším Bayesovu vzorci.
Ze zadání známe apriorní pravděpodobnosti jevů B_1 a B_2 (apriorní zde znamená původní, odhadnuté jen na základě předchozí zkušenosti bez použití informace z čidla). Tyto jsou: $P(B_1) = 0{,}01$ a $P(B_2) = 0{,}99$.
Dále ze zadání známe podmíněné pravděpodobnosti toho, co ukáže čidlo, víme-li, jaká je skutečná hladina emisí:

$$P(A_1|B_1) = 0{,}92, \quad P(A_2|B_1) = 0{,}05, \quad P(A_3|B_1) = 0{,}03,$$
$$P(A_1|B_2) = 0{,}04, \quad P(A_2|B_2) = 0{,}05, \quad P(A_3|B_2) = 0{,}91.$$

Máme vypočítat pravděpodobnost, že komín vypouští nadlimitní množství emisí, víme-li, že čidlo ukazuje právě tuto skutečnost, tj. máme spočítat podmíněnou pravděpodobnost $P(B_1|A_1)$.
Vše je připraveno k použití Bayesova vzorce. Možné hypotézy zde máme jen dvě: B_1 a B_2, tj. n v Bayesově vzorci je rovno dvěma. Roli jevu A z Bayesova vzorce zde hraje jev A_1. Podle vzorce 10 již snadno dostaneme:

$$P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A_1|B_1)\cdot P(B_1) + P(A_1|B_2)\cdot P(B_2)} = \frac{0{,}92\cdot 0{,}01}{0{,}92\cdot 0{,}01 + 0{,}04\cdot 0{,}99} =$$
$$= \frac{0{,}0092}{0{,}0488} \doteq 18{,}85\ \%.$$

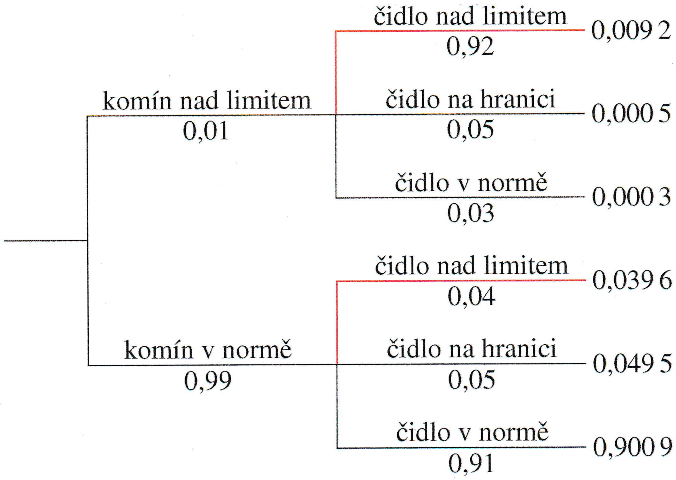
Praktický význam právě odvozeného výsledku je překvapivý. Ukazuje-li čidlo nepřípustné množství emisí, jen s cca 19% pravděpodobností tyto emise komín skutečně vypouští. Je to způsobeno nedokonalostí čidla v kombinaci s tím, že skutečné překročení hraničního množství emisí nastává jen velmi zřídka. Poznamenejme ještě, že číslo ve jmenovateli zlomku je podle věty o úplné pravděpodobnosti rovno pravděpodobnosti jevu A_1. Zjistili jsme mimoděk, že i když komín vypouští nadlimitní množství emisí jen v jedné setině provozní doby, čidlo indikuje (díky chybovosti) nadlimitní množství s pravděpodobností 0,048 8, tj. přibližně v jedné dvacetině provozní doby.

V komplikovanějších situacích, kdy při výpočtu pravděpodobnosti vycházíme z mnoha údajů a v průběhu řešení musíme použít složitý vzorec nebo více vzorců, může k pochopení příkladu pomoci tzv. *pravděpodobnostní strom*. Ukážeme si nyní, jak by takový strom mohl v předchozí úloze vypadat.

Pravděpodobnostním stromem se prochází zleva doprava, a to v náhodně zvoleném čase během pracovní doby. V tomto čase mohou nastat dva vylučující se jevy, v bayesovské terminologii tzv. *hypotézy* nebo také tzv. *přirozené stavy*, ve kterých se komín nachází – komín buď vypouští přípustné, nebo nepřípustné množství emisí. Proto se strom rozděluje na dvě větve, pod nimi jsou zapsány pravděpodobnosti obou hypotéz. Další rozvětvení stromu vyjadřuje možné stavy čidla – tzv. *pozorovatelné jevy*. Známe podmíněné pravděpodobnosti těchto jevů za podmínky platnosti jednotlivých hypotéz – tyto jsou opět zapsány pod jednotlivými větvemi. Vpravo vedle každé větve jsou zapsány součiny pravděpodobností podél této větve. První tento součin 0,009 2 vyjadřuje sdruženou pravděpodobnost toho, že komín vypouští nadlimitní množství emisí a současně čidlo správně indikuje emise nad limitem. V zavedeném označení jde o vztah:

$$P(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{B}_1) = P(\mathsf{A}_1|\mathsf{B}_1) \cdot P(\mathsf{B}_1) = 0{,}92 \cdot 0{,}01 = 0{,}009\,2.$$

Podobný význam mají i zbylé součiny.



Obr. 3.5

Naší úlohou bylo vypočítat podmíněnou pravděpodobnost jevu, že komín vypouští množství emisí nad limitem, víme-li, že čidlo indikuje emise nad limitem. Tuto pravděpodobnost dostaneme pomocí stromu takto:

Důležité jsou pro nás nyní jen větve příslušné ke stavu čidla nad limitem (tj. 1. a 4. větev odshora – jsou vyznačeny červeně). Součet sdružených pravděpodobností podél těchto dvou větví, tj. $0{,}009\,2 + 0{,}039\,6 = 0{,}048\,8$, vyjadřuje (jak již bylo konstatováno) pravděpodobnost, že čidlo ukazuje stav nad limitem. Vydělíme-li sdruženou pravděpodobnost stojící u první větve, tj. 0,009 2 pravděpodobností 0,048 8, dostaneme konečný výsledek.

Strom je vlastně *grafickou podobou Bayesova vzorce* – podívejte se ještě jednou na konečný výpočet v původním řešení úlohy a pokuste se beze zbytku porozumět, jak s tímto výpočtem koresponduje náš strom.

E Vraťme se ještě k úloze D.

a) Zjistí-li obsluha, že čidlo právě ukazuje hraniční množství emisí, s jakou pravděpodobností komín v tomto okamžiku opravdu vypouští nadlimitní množství?
Co můžeme říci o jevech *komín vypouští nadlimitní množství emisí* a *čidlo indikuje hraniční množství emisí*?

ŘEŠENÍ: Zkuste sami – je výhodné použít strom z předchozí úlohy. Důležité pro výpočet jsou tentokrát 2. a 5. větev stromu.

b) Zjistí-li obsluha, že čidlo právě ukazuje přípustné množství emisí, s jakou pravděpodobností je vše v pořádku, tj. komín v tomto okamžiku opravdu vypouští přípustné množství?

ŘEŠENÍ: Zkuste sami – můžete opět použít strom z předchozí úlohy. Důležité pro výpočet jsou 3. a 6. větev stromu.

Cvičení

4 Ilustrujte řešení úlohy C pravděpodobnostním stromem. Jak můžeme určit pomocí stromu podmíněnou pravděpodobnost, že vybraná bonboniéra, která nevyhovuje normě, byla zkompletována na lince A?

5 Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, zatímco u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je standardní?

6 Petr si chce koupit v bazaru starší auto určité značky. Je známo, že zhruba čtvrtina takových aut má vadnou převodovku. Petr se v autech moc nevyzná, domluví se proto se známým automechanikem, aby s ním šel auto projet a odhadl stav vozu. Automechanik však též není neomylný – ve 20 % případů při jízdě vadu převodovky neodhalí a naopak v 10 % případů, kdy je převodovka v pořádku, tvrdí, že je vadná. S jakou pravděpodobností Petr koupí auto s dobrou převodovkou, tvrdí-li automechanik, že je v pořádku?

3.7 Úlohy k opakování

1 V krabici jsou matice a šrouby. Náhodně z krabice vybereme jednu součástku. Označme si tyto jevy:

A: vybraná součástka je šroub,

B: vybraná součástka je rezavá,

C: vybraná součástka má levotočivý závit.

a) Kdy nastane jev $D = A \cap B \cap C'$?
b) Při jaké podmínce bude platit rovnost $A \cap B \cap C = A$?
c) Kdy bude jev C' podjevem jevu B?
d) Kdy bude platit rovnost $A' = B$?
e) Bude platit rovnost $A' = B$, když žádný šroub nebude rezavý?
f) Co vyjadřuje jev $E = A \cup B$?

2 Plesová tombola má 1 000 losů. Jakou pravděpodobnost hlavní výhry v tombole má návštěvník plesu, který si zakoupil 20 losů?

3 Na šachovnici náhodně na dvě různá políčka umístíme dvě věže, bílou a černou. S jakou pravděpodobností se navzájem ohrožují?

4 Velitel záchranné operace soudí, že kdekoli v oblasti ve tvaru čtverce o délce strany 200 mil může být člun s trosečníky.

a) S jakou pravděpodobností ho objeví záchranné letadlo, které proletí celou oblastí po přímce od středu jedné strany čtverce ke středu protilehlé strany, má-li pilot po celou dobu letu dostatečný rozhled na vzdálenost 25 mil?

b) Druhé záchranné letadlo proletí nad oblastí stejným způsobem, ale kolmo na trasu prvního. S jakou pravděpodobností objeví člun alespoň jedno z obou letadel?

c) Vyřešte znovu otázku a), letí-li letadlo nad úhlopříčkou čtverce. Je tento způsob letu efektivnější z hlediska pravděpodobnosti nalezení člunu?

d) Vyřešte znovu otázku b), letí-li obě letadla po úhlopříčkách čtverce. Je tento způsob efektivnější z hlediska pravděpodobnosti nalezení člunu?

5 Krychle má všechny stěny obarvené. Rozřežeme ji na 1 000 stejných krychliček a tyto pečlivě promícháme. Vybereme-li náhodně jednu krychličku, s jakou pravděpodobností bude mít

a) jednu obarvenou stěnu,

b) dvě obarvené stěny,

c) tři obarvené stěny?

d) S jakou pravděpodobností nebude ani jedna stěna obarvená?

6 Je pravděpodobnější získat součet 9 při hodu dvěma kostkami, nebo třemi kostkami? Doložte výpočtem.

7 Ze 100 výrobků, mezi nimiž je 15 nekvalitních, náhodně vybíráme ke kontrole 10. Ukázalo se, že prvních 8 výrobků bylo kvalitních. Jaká je pravděpodobnost, že i devátý výrobek bude kvalitní?

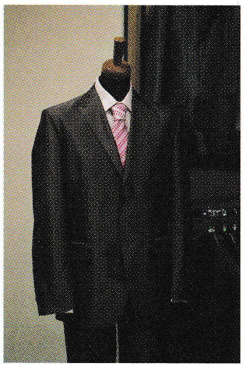
8 Prodejce luxusních pánských obleků má zkušenost, že zákazníci požadují krejčovskou úpravu u 10 % prodaných kalhot a u 15 % prodaných sak. U 7 % zakoupených obleků zákazníci požadují úpravu jak kalhot, tak saka. S jakou pravděpodobností u náhodně vybraného prodaného obleku

a) nebude požadována žádná úprava,

b) bude zákazník požadovat jen jednu úpravu (kalhot nebo saka, ne však obojího)?

c) Prodá-li obchodník za odpoledne čtyři obleky čtyřem různým zákazníkům, s jakou pravděpodobností bude požadována alespoň jedna úprava saka? Jakou vlastnost náhodných jevů jste při výpočtu předpokládali?

d) Prodá-li obchodník čtyři obleky jednomu zákazníkovi, můžeme odhadnout, s jakou pravděpodobností bude požadována alespoň jedna úprava saka?



9 Z celkového počtu 26 žáků třídy, ve které je 12 chlapců a 14 dívek, jsou losováni 3 zástupci třídy. Jaká je pravděpodobnost, že to budou

a) pouze chlapci,

b) dvě dívky a jeden chlapec?

10 Jeden tah Sportky spočívá ve vylosování 6 základních a jednoho dodatkového čísla z množiny čísel od 1 do 49. Vsadíme-li jeden sloupec (tj. označíme-li na jednom sloupci tiketu šest čísel z této množiny), s jakou pravděpodobností vyhrajeme v tomto tahu tzv.

a) třetí pořadí,

b) čtvrté pořadí,

c) páté pořadí?

Upřesněme, že třetí pořadí vyhrává ten, kdo označí právě pět čísel z šesti základních losovaných, čtvrté pořadí vyhrává ten, kdo označí čtyři čísla ze šesti a pro výhru pátého pořadí je třeba označit tři z uvedených čísel. Dodatkové číslo nemá ani na jedno z těchto pořadí vliv.

11 Honza a Pavel hodí každý jednou kostkou. Vyhraje ten, komu padne větší číslo. (Kdyby padla stejná čísla, hod by opakovali.) Po hodu se Honza raduje, že vyhrál – s jakou pravděpodobností mu padla pětka?

12 Na určité škole propadá 15 % studentů z matematiky, 10 % z fyziky a 5 % z obou těchto předmětů. Označme si symbolem A jev, že náhodně vybraný student propadá z matematiky, a symbolem B jev, že náhodně vybraný student propadá z fyziky. Jsou tyto dva jevy nezávislé?

13 Je známo, že chlapců se rodí v průměru o něco více než dívek. Na základě statistických údajů pro Českou republiku můžeme pravděpodobnost narození chlapce aproximovat číslem 0,516 a pravděpodobnost narození dívky číslem 0,484. S jakou pravděpodobností jsou mezi osmi dětmi, které se narodily v určité porodnici určitý den, alespoň tři dívky? Jak by se tato pravděpodobnost změnila, kdybychom (nepřesně) předpokládali, že pravděpodobnosti narození chlapce a narození dívky jsou stejné?

14 Revizor ze zkušenosti ví, že zhruba ve čtvrtině tramvají najde při kontrole černého pasažéra. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby měl alespoň 95% jistotu, že alespoň jednoho černého pasažéra objeví?

15 V účetních dokladech určité firmy je chyba. Kontrolují je nezávisle na sobě dva auditoři. První z nich chybu odhalí s pravděpodobností 0,9, druhý s pravděpodobností 0,95. S jakou pravděpodobností ji odhalí alespoň jeden z nich?

16 Sonda má dvě kamery, které pracují nezávisle na sobě. Každá z nich je vybavena pro případ poruchy korekčním mechanismem. Pravděpodobnost poruchy libovolné kamery je 0,1, porouchá-li se, pak se ji pomocí korekčního mechanismu s pravděpodobností 0,3 podaří zprovoznit. S jakou pravděpodobností sonda kvůli poruchám nic nenafilmuje?

17 Do bazénu přitéká voda třemi vzájemně nepropojenými čerpadly. První se porouchá s pravděpodobností 0,08, druhé s pravděpodobností 0,1 a třetí s pravděpodobností 0,12.

a) Jaká je pravděpodobnost, že se porouchají alespoň dvě čerpadla?

b) Je-li z pomalé rychlosti napouštění zřejmé, že jedno čerpadlo nefunguje, s jakou pravděpodobností je jím první z nich?

18 Tři střelci vystřelili každý jednou na vzdálený terč. Z jejich dosavadní výkonnosti odhadujeme, že první zasáhne terč v průměru v 87 případech ze sta, druhý v průměru v 72 případech ze sta a třetí v průměru v 65 případech ze sta. V terči byly zjištěny dva zásahy. S jakou pravděpodobností minul třetí střelec?

19 Potřebu součástek pro výrobu kryje závod ze dvou dílen. První dílna vyrábí 80 % všech součástek, přičemž ze 100 součástek je 80 první jakosti. Druhá dílna vyrábí 20 % všech součástek, přičemž na 100 součástek připadá 75 první jakosti.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka je první jakosti?

b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka první jakosti byla vyrobena v první dílně?

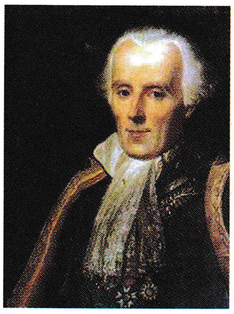
20 Při výrobě 30 % přístrojů byl použit zpřísněný technologický režim, zbylých 70 % přístrojů bylo vyrobeno ve standardním režimu. Ze statistických záznamů je ve firmě známo, že 92 % přístrojů vyrobených ve zpřísněném režimu se během záruční doby neporouchá, zatímco z přístrojů vyrobených standardně se neporouchá jen 78 %. Víme-li, že se námi zakoupený přístroj do konce záruční doby neporouchal, s jakou pravděpodobností byl vyroben ve zpřísněném režimu?

Exkurze do historie

Chevalier de Méré

Teorie pravděpodobnosti jako součást matematiky vznikla v polovině 17. století. Základní inspirací byla snaha popsat a řešit různé problémy spojené s hazardními hrami, zejména s hrou v kostky. Francouzský šlechtic a hazardní hráč Chevalier de Méré byl přesvědčen, že sázka na to, že mu ve 24 hodech dvěma kostkami padne alespoň jednou součet 12 neboli dvojice šestek, musí být výhodná. Jinými slovy, myslel si, že pravděpodobnost takového jevu je větší než jedna polovina. Protože však dlouhodobě spíše prohrával, obrátil se v roce 1654 s prosbou o radu na tehdejšího věhlasného matematika Blaise Pascala. Na základě tohoto impulzu proběhla korespondence mezi Pascalem a dalším uznávaným matematikem Pierre de Fermatem. Dá se říci, že jejich společné bádání položilo základy teorie pravděpodobnosti. Mimochodem, dovedli byste vyřešit Méréův problém? Věříme, že po prostudování této kapitoly je to pro vás snadné.

Základy teorie pravděpodobnosti jako matematické discipliny později rozvinul Christian Huygens ve své práci *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, věnované pravděpodobnostním problémům v hazardních hrách. Tato tematika se poměrně rychle zpopularizovala, a proto našel následovníky, mezi něž se řadí např. Abraham de Moivre nebo Jacob Bernoulli. O Bernoulliově schématu se můžete dočíst v této učebnici. Moivre ve své práci *The Doctrine of Chance: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, kde se mimo jiné poprvé objevila definice nezávislosti jevů, odvodil též centrální limitní větu.



Pierre-Simon Laplace

Zdaleka nejvýznamnějším a dodnes inspirativním klasikem teorie pravděpodobnosti byl však Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Ve svém monumentálním díle o teorii pravděpodobnosti (*Théorie analytique des probabilités*) nejen že systematizoval veškeré poznání svých předchůdců, ale dalekosáhle je rozpracoval i aplikoval na téměř všechny oblasti tehdejšího vědeckého poznání – od fyziky až po sociální vědy. Mimo jiné objevil jednu z klíčových formulí teorie pravděpodobnosti, známou dnes jako Bayesův teorém, odvodil teoretické rozložení chyb (tzv. Gaussovu křivku) pro některé konkrétní experimenty atd.

Laplace pozvedl teorii pravděpodobnosti na úroveň, která pak celé století po jeho smrti nebyla překonána. Novější vývoj sledoval dvě hlavní linie: Jedna z nich se zabývala zejména pravděpodobností v kontextu tzv. hromadných jevů a fakticky vedla k v podstatě statistickému pojetí pojmu pravděpodobnosti (tzv. *frekvencionistická* škola, jejímž hlavním propagátorem byl Richard von Mises). Matematici řazení do druhé vývojové linie se snažili postavit teorii pravděpodobnosti na modernější základy. Tato linie je charakterizována zejména pracemi vědců Markova, Čebyševa, a hlavně Andreje Nikolajeviče Kolmogorova. Poslední ze jmenovaných ve své monografii *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* vybudoval axiomatickou teorii pravděpodobnosti. V této knize a pozdějších článcích zavedl fundamentální pojmy jako podmíněná střední hodnota, náhodná procházka, stochastický integrál, dynamický systém atd.

A. N. Kolmogorov

Ve dvacátém století proběhla pravděpodobnostní revoluce ve fyzice, zejména pokud jde o statistickou fyziku, kvantovou mechaniku, teorii chaosu, informační fyziku apod. Další aplikace teorie pravděpodobnosti můžeme najít v naprosto rozdílných vědeckých oblastech, jako je genetika, biologie, psychologie, ekonomie, finanční matematika či optika. Ve skutečnosti by bylo nejspíš obtížné najít vědní obor, ve kterém by se aplikace teorie pravděpodobnosti vůbec neobjevovaly.

Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

MATEMATIKA PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

mate
mati
ka

J. ROBOVÁ
M. HÁLA
E. CALDA

PROMETHEUS®