Otázka 1: Reálná funkce jedné a více reálných proměnných

(1)

A) definice a vlastnosti funkce jedné proměnné

$f: R \to R$ je <u>zobrazení</u>, které přiřazuje každému $r \in R$ právě jedno číslo $f(r) \in R$ ... $Df = R$

f... z R do R je — | — nejvýše — | —

Df nemusí být celá množina R

$$Df = \{x \in R : (\exists y \in R : y = f(x)\} \text{... množina vzorů}$$
$$Hf = \{y \in R : (\exists x \in R : y = f(x)\} \text{... množina obrazů}$$

<u>funkce obecně vyjadřuje vztah mezi dvěma proměnnými</u>; pokud označíme $y = f(x)$

nezávislá proměnná

závislá proměnná

$\boxed{x} \mapsto y = \pi \cdot x^2$ ... obsah kruhu o poloměru x

$\boxed{x} \mapsto y = 2\pi x$ ... obvod kruhu o poloměru x

$\boxed{x} \mapsto y = x^3$ ... objem krychle o hraně x

tedy pro různé hodnoty x funkce $y = \pi x^2$ vypočte různé obsahy daných kruhů;

funkční předpisy $f(x)$ představují tedy vztahy opakovaně počítané v různých oborech lidské činnosti; má tedy smysl ptát se a zkoumat, jaké vlastnosti má funkce $f(x)$

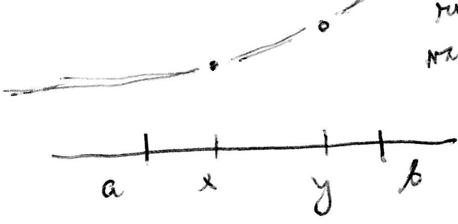
Průběh funkce znázorňujeme grafy pro různé hodnoty x: zavedeme soustavu souřadnic v rovině a snažíme se o nakreslení grafu

$$\text{Graf funkce } f(x) := \{[x, y] : x \in Df,\ y = f(x)\}$$

Z grafu lze vyčíst řadu vlastností, a ty lze též definovat pomocí stručného matematického zápisu:

a) f je rostoucí na intervalu I $(=(a,b))$, když $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

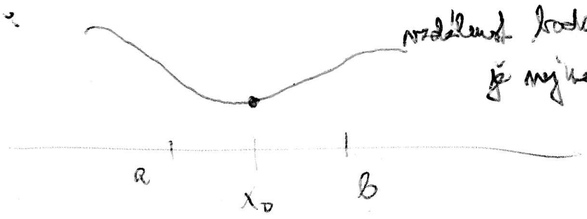
(pomůcka z grafu: pro $y > x$ je $f(y) > f(x)$, tj. body $[x, f(x)]$ se pro rostoucí x vzdalují od vodorovné osy)



b) $x_0 \in Df$ je lokální minimum funkce f, když $\exists (a,b) \subseteq R$:

$$x_0 \in (a,b) \wedge f(x) \geq f(x_0) \ \forall x \in (a,b)$$

(v grafu pozorujeme:



vzdálenost bodu $[x_0, f(x_0)]$ od vodorovné osy je nejmenší ze všech bodů $[x, f(x)]$ pro $x \in (a,b)$)

c) f je sudá na svém Df, pokud $f(x) = f(-x) \ \forall x \in Df$

(v grafu pozorujeme: graf je osově souměrná množina bodů v rovině vzhledem k ose svislé)

d) f je lichá na svém Df, pokud $f(x) = -f(x) \ \forall x \in Df$

(v grafu pozorujeme: graf je středově souměrná množina bodů v rovině vzhledem k počátku soustavy $[0;0]$)

e) f je prostá, injektivní, pokud pro $x, y \in R$: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,

pro různé vstupy jsou funkční hodnoty různé

(v grafu: rovnoběžky s osou x protínají graf funkce $f(x)$ nejvýše v jednom bodě)

existuje řada vlastností a jejich interpretace na grafu $f(x)$ – viz Fajmon – Základy matematiky I, str. 60–62 prohlížeče (59–61 čtečkové)

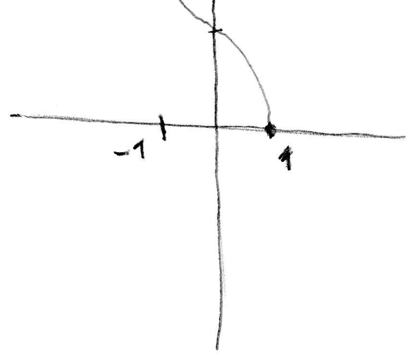
Dovednost nakreslení grafu funkce $f(x)$ je dovedností stěžejní, protože z grafu lze zjistit vlastnosti funkce $f(x)$, proto pokud dokážeme nakreslit graf $f(x)$, je vždy jednoduché nakreslit některé mírně modifikované funkce:

Př.:

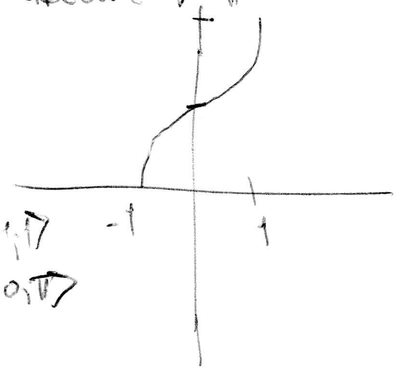
$f(x) = \arccos x$

$D(f) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f) = \langle 0; \pi \rangle$



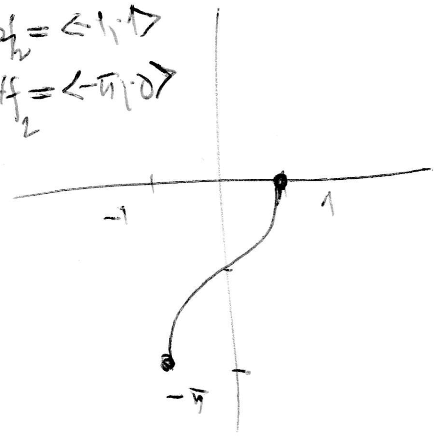
$f_1(x) = \arccos(-x)$



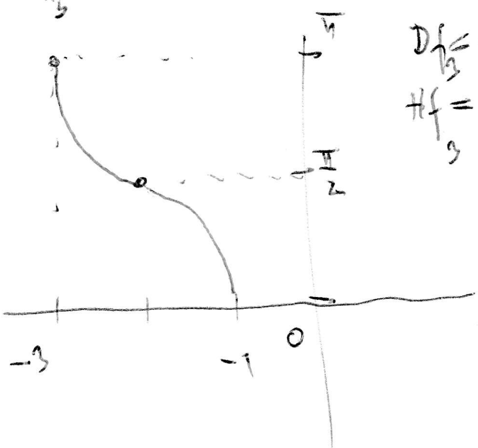
$Df_1 = \langle -1; 1 \rangle$
$H(f_1) = \langle 0; \pi \rangle$

$f_2(x) = -\arccos(x)$

$Df_2 = \langle -1; 1 \rangle$
$Hf_2 = \langle -\pi; 0 \rangle$

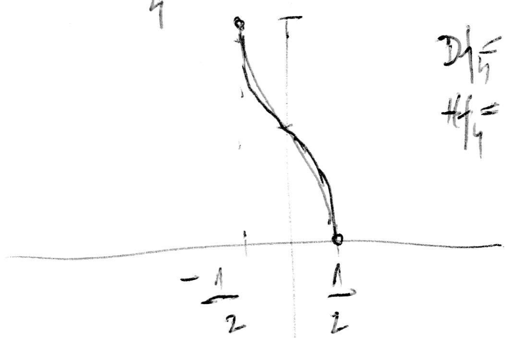


$f_3(x) = \arccos(x+2)$



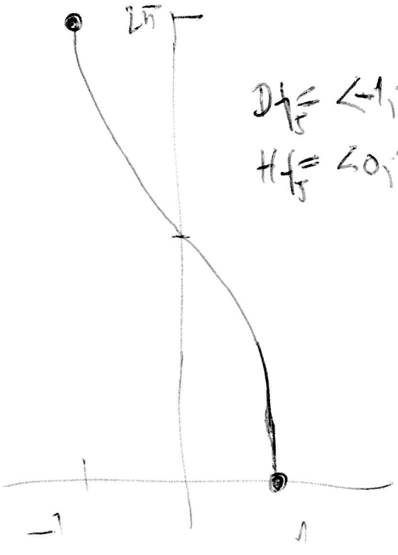
$Df_3 = \langle -3; -1 \rangle$
$Hf_3 = \langle 0; \pi \rangle$

$f_4(x) = \arccos(2x)$



$Df_4 = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
$Hf_4 = \langle 0; \pi \rangle$

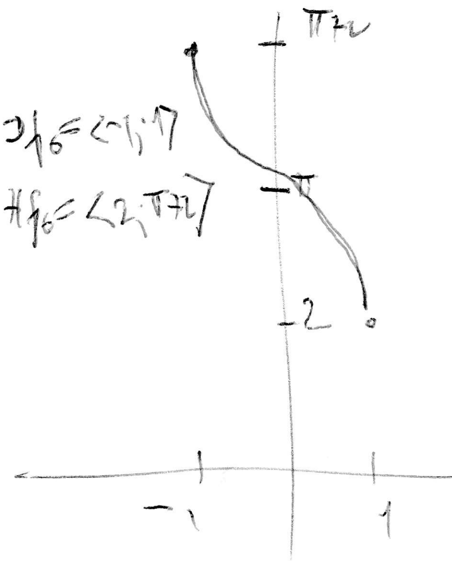
$f_5(x) = 2 \cdot \arccos x$



$Df_5 = \langle -1; 1 \rangle$
$Hf_5 = \langle 0; 2\pi \rangle$

$f_6(x) = 2 + \arccos x$

$Df_6 = \langle -1; 1 \rangle$
$Hf_6 = \langle 2; \pi + 2 \rangle$



Někdy je ze předpisu $y = f(x)$ potřeba vyjádřit proměnnou x ve vztahu k proměnné y; i [illegible] hledáme inverzní funkci: a) zaměníme x za y, tj. f^{-1} dle této funkce proměnné x
b) vyjádříme y ze druhého vztahu

Věta: inverzní relace f^{-1} je funkce $\iff$ relace f je prostá funkce

Př: $f(x) = 2x$ je prostá, protože rovnoběžky s osou x protínají graf $f(x)$ nejvýše v 1 bodě
$y = 2x$ a) $x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ ... inverzní proces, inverzní funkce $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

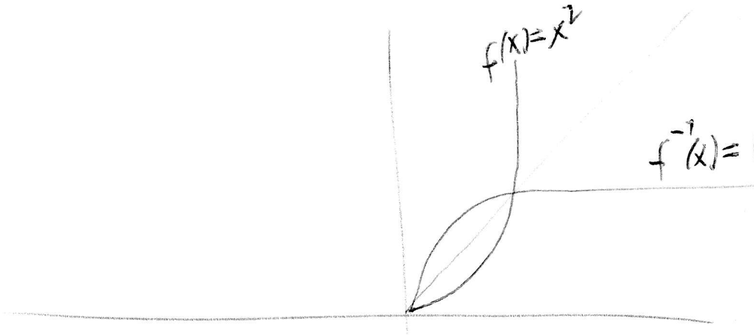
grafy: grafy $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ jsou vzájemně souměrné vzhledem k přímce $y=x$

Př: $f(x)=x^2$ není prostá, protože vodorovné přímky s osou x protínají graf $f(x)$ ve dvou různých bodech

Obecně pokud zúžíme definiční obor:

$f(x)=x^2,\ x\in\langle 0,\infty)$, pro takto definované x je už $f(x)$ prostá a [illegible]

relace je funkce, tj. $\exists$ inverzní funkce $f^{-1}(x),\ x\in\langle 0;\infty)$



B, definice a vlastnosti funkce více proměnných:

některé veličiny přirozeně závisí na více než jedné proměnné, např.:

- pro $x\in R^+, y\in R^+$ je $z=x\cdot y$ obsah obdélníka o stranách x,y
- pro $x\in R^+, y\in R^+, z\in R^+$ je $w=x\cdot y\cdot z$ objem kvádru o hranách x,y,z (navzájem kolmých)

Např. reálnou funkci dvou reálných proměnných x,y definujeme jako zobrazení f: z R^2 do R, které přiřadí bodu $[x,y]\in R\times R$ nejvýše jednu hodnotu $f(x,y)$

$$D_f=\{[x,y]\in R\times R:\ \exists z\in R:\ z=f(x,y)\}$$

$$H_f=\{z\in R:\ \exists [x,y]\in R\times R:\ z=f(x,y)\}$$

uspořádaná dvojice, kde záleží na pořadí, tj. označení proměnných není obecně zaměnitelné

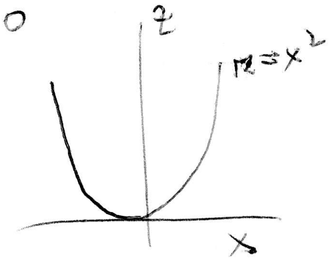
Opět lze definovat graf, ale už u funkce dvou proměnných je grafem množina bodů v trojrozměrném prostoru R^3:

$$\text{Graf funkce } f(x,y) := \{[x,y,z]\in R^3:\ [x,y]\in D_f,\ z=f(x,y)\}$$

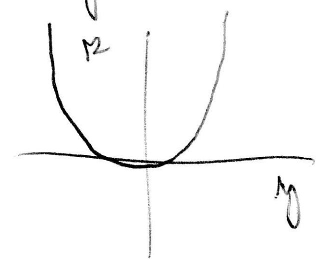
Už nakreslení grafu funkce dvou proměnných je náročnější a pomohou nám řezy grafu funkce jednotlivými rovinami: a) rovinou $xz \dots y=0$ b) rovinou $yz \dots x=0$ c) rovinou $z=\boxed{\text{const}=f(x,y)}$ „vrstevnice na mapě grafu"

Př 2: $z = x^2 + y^2$

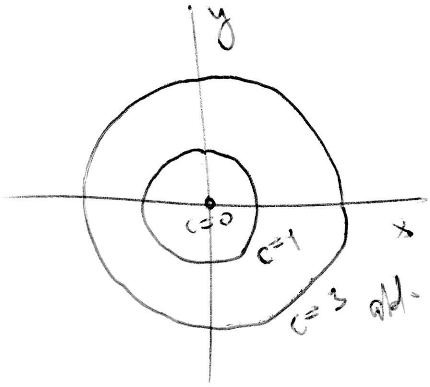
a) řez xz: $y=0$



b) řez yz: $x=0$



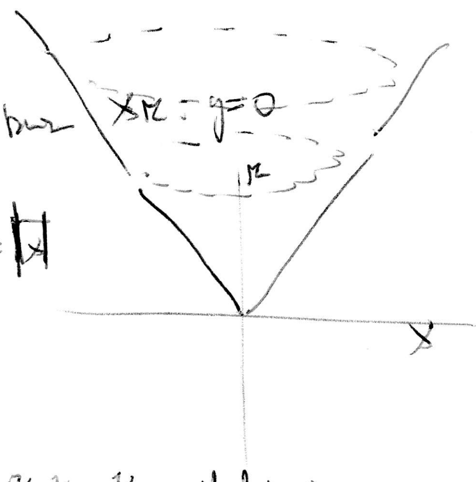
c) vrstevnice $x^2+y^2=c$ ... kružnice



Grafem funkce je rotační paraboloid (parabola $z=x^2$ rotuje kolem osy z a opisuje tak plochu na grafu)

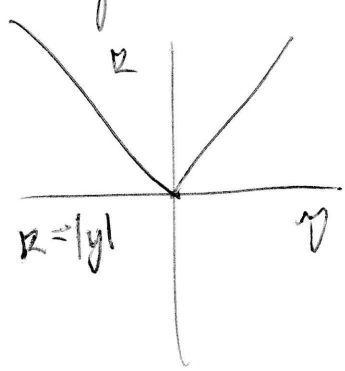
Př 3: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

a) řez xz: $y=0$



$z=|x|$

b) řez yz: $x=0$



$z=|y|$

c) vrstevnice:

$x^2+y^2=c^2$ ... opět kružnice

grafem funkce je jedna část plochy nekonečného kužele

C. Nakreslete elementární funkce jedné proměnné: nakreslete jejich graf, uveďte jejich vlastnosti

i) lineární funkce $f(x) = ax+b$

ii) kvadratická funkce $f(x) = ax^2+bx+c$

iii) lineární lomená funkce $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

iv) mocninná funkce $f(x)=x^n$ a funkce k ní inverzní

v) funkce exponenciální $f(x)=a^x$ a funkce k ní inverzní $f(x)=\log_a x$

vi) goniometrické funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ a funkce k nim inverzní

— viz Fajmon, Základy matematiky, str. 62–65, 69–75

– zjišťování průběhu funkce – viz otázka č. 3 (využití derivace)

– alternativní definice vybraných funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$ – viz otázka č. 6 (nekonečné řady)

Literatura:

Fuchs: Základy matematiky 2017
Odv. pro gymnázia – funkce
Odv. pro gymnázia – goniometrické funkce

můj způsob pro hledání vybraných odvození → Mathematical Techniques
→ Mathematics for Engineers

Otázky:

1. $y=(x-2)^2+3$ pro $x \in (-\infty, 2]$ ... nakreslete graf i rovnici pro f^{-1}

2. jakým způsobem se rozšíří definice funkcí $\sin x$, $\cos x$ z ostrého úhlu x na jakékoli reálné číslo x?
– k čemu je toto rozšíření dobré?
   - popisuje $[\cos x, \sin x]$ polohu bodu při rovnoměrném pohybu po kružnici
   - popisuje polohu bodu při kmitání netlumené pružiny (mechanické kmitání) v jednom směru → netlumené kmitání malého závaží na pružině
   - popisuje okamžitou hodnotu veličiny, která "kmitá" mezi dvěma hodnotami, např. okamžitou hodnotu elektrického proudu

nebo $\cos x$, $\sin x$

– technická otázka: jaký je vztah mezi funkcemi $\sin x$, $\cos x$ (jeden graf je posunutím druhého grafu... jak?)

3. načrtni $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a f^{-1}
4. načrtni $f(x) = \cos x$ a f^{-1}
5. $\boxed{\text{kde se využije funkce } \ln x \text{ (přirozený logaritmus?)}}$
→ co bylo dříve, e^x nebo $\ln x$?