Otázka 2: limita funkce jedné a více proměnných, limita posloupnosti

A. Posloupnost a limita posloupnosti, hromadné body

Posloupnost reálných čísel je zobrazení $N \to R$, které přiřadí číslu 1 číslo $a_1 \in R$

2 $\quad a_2 \in R$

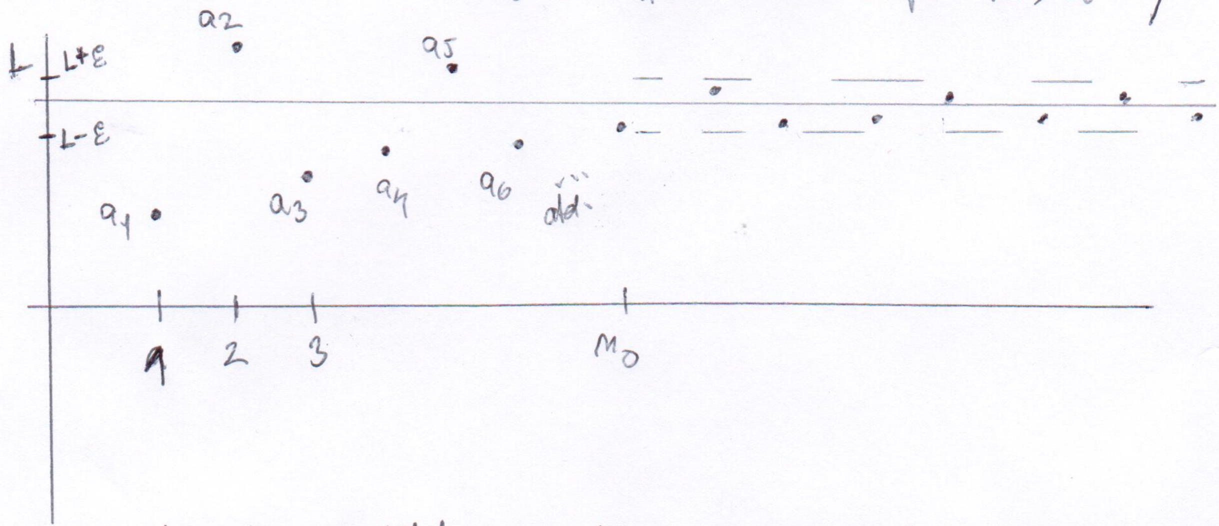
3 $\quad a_3 \in R$

⋮ atd. ⋮

Def. Limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $n \to \infty$ je hodnota $L \in R$, ke které se pro $n \to \infty$ blíží funkční hodnoty a_n.

Přesněji řečeno, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N: (\forall n \geq n_0: |a_n - L| < \varepsilon)$

(pro grafické znázornění: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$, pokud $\forall$ ε-pás kolem konstantní funkce $y(x) = L$ $\exists n_0 \in N$: a_n leží v tomto ε-pásu $\forall n \geq n_0$)



tedy u posloupnosti má smysl počítat jen limitu pro $n \to \infty$, žádnou jinou.

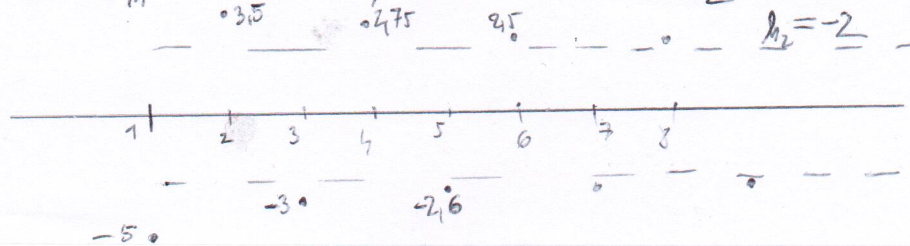
Př.: $$\lim_{n \to \infty} \frac{7n^2+1}{3n+2n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{7 + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} + 2} = \frac{7}{2}$$

Někdy limita posloupnosti neexistuje, například tehdy, když má daná posloupnost minimálně 2 hromadné body:

Def. Hromadný bod h posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je taková hodnota, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ nekonečně mnoho indexů n, že a_n leží v ε-pásu hodnoty h (tj. $|a_n - h| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho indexů n.

Př. Posloupnost $a_n = (-1)^n \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)$ má dva hromadné body, $h_1 = 2$

$h_2 = -2$ — liché členy se blíží k $h_2 = -2$, sudé členy se blíží k $h_1 = 2$



největší (či maximální) hromadný bod ||| limita superior posloupnosti a_n

nejmenší (či minimální) hromadný bod ||| limita inferior posloupnosti a_n

Ad našeho př.: $\left.\begin{array}{l} \limsup a_n = 2 \\ \liminf a_n = -2 \end{array}\right]$ pokud $\limsup \neq \liminf a_n$ (tj. a_n má minimálně dva hromadné body),

tak $\lim a_n$ neexistuje

B. Limita funkce jedné i více proměnných

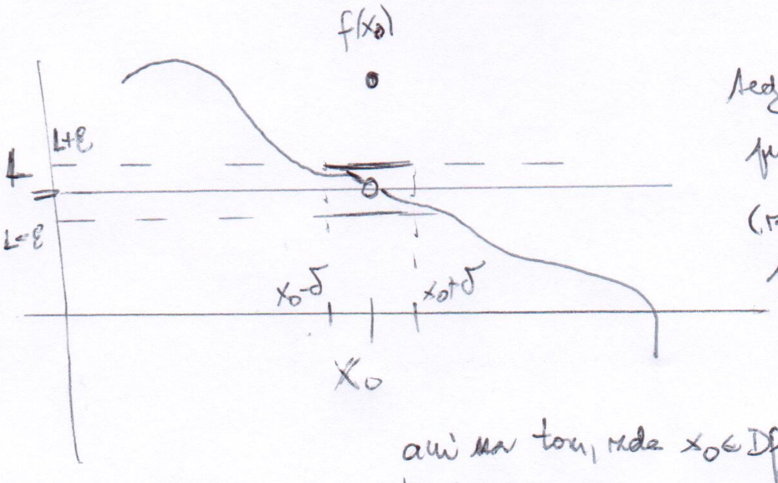
Při rozboru funkce se často zajímáme o to, jak se funkční hodnoty chovají v ryzím okolí jistých bodů definičního oboru (tj. sledujeme funkční hodnoty v okolí těchto bodů mimo body samotné $\left[O_r(x_0) = (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)\right.$ pro nějaké kladné $\left.\delta\right]$.

K tomuto studiu funkčních hodnot v ryzím okolí bodu x_0 slouží pojem limity.

i) limita funkce jedné proměnné:

Definice: Reálná funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D_f$ limitu L, pokud $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ryzí δ-okolí bodu x_0 $(0 < |x - x_0| < \delta)$, že $\forall x \in O_r(x_0)$: $|f(x) - L| < \varepsilon$

(z grafického názoru: $\forall$ ε-pás kolem konstanty L $\exists$ ryzí okolí $O_r(x_0)$, že $f(x)$ leží v ε-pásu)



tedy $f(x)$ se blíží hodnotě L pro $x \to x_0$

(z těchto úvah vylučujeme samotný bod x_0 − definice limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nezávisí na $f(x_0)$)

ani na tom, zda $x_0 \in D_f$

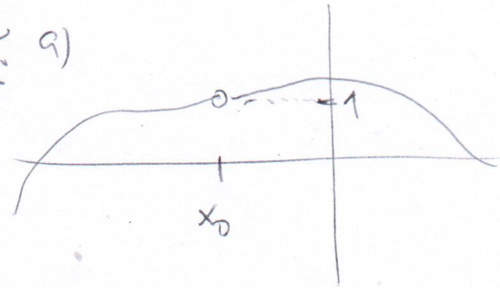
Pozn.: pokud $\exists$ $f(x_0)$, tato hodnota nemusí ležet v ε-pásu pro žádné malé $\varepsilon > 0$. Pojem limity zkoumá chování funkčních hodnot v ryzím okolí bodu x_0, nikoli přímo $f(x_0)$

Def.: lze definovat i příslušné jednostranné limity, které popisují chování funkce $f(x)$ v levém ryzím okolí $(x_0 - \delta, x_0)$ nebo v pravém ryzím okolí $(x_0, x_0 + \delta)$.

Tyto limity též (jednu z nich) potřebujeme často určit, pokud x_0 je bod na hranici D_f

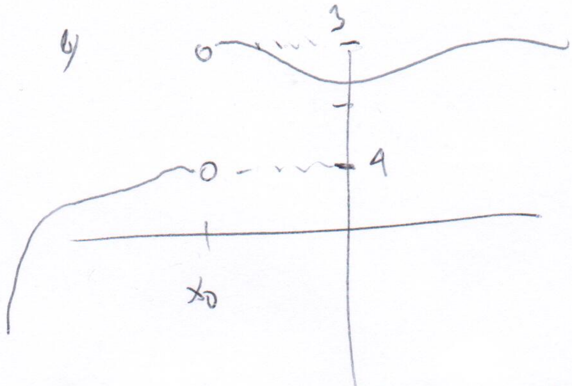
Věta: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\exists$ $\iff$ $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$

Př. a)



$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = 1 = \lim_{x\to x_0+} f(x), \text{ tj. } \lim_{x\to x_0} f(x) = 1$$

b)



$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to x_0-} f(x) &= 1\\ \lim_{x\to x_0+} f(x) &= 3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ neexistuje}$$

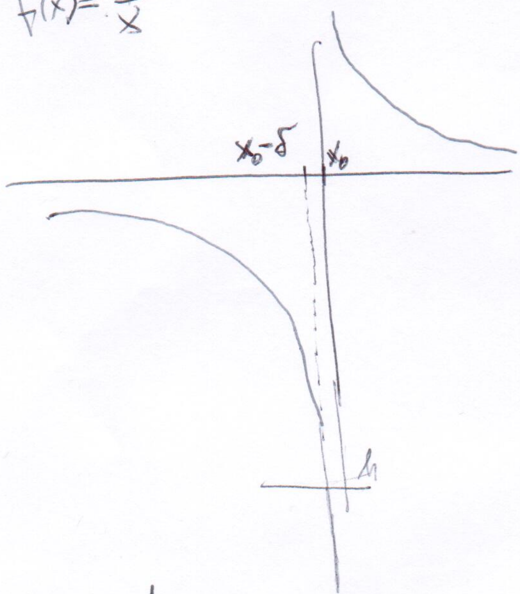
Def. Dalším typem jednostranné limity v bodě x_0 je nevlastní jednostranná limita v bodě x_0 funkce $f(x)$: f má v x_0 levostrannou limitu ∞ $(-\infty)$, když $\forall h>0$ $(h<0)$ $\exists\, O_{r-}(x_0)=(x_0-\delta, x_0)$:

$\forall x \in O_{r-}(x_0)$: $f(x) \geq h$ $(f(x) \leq h)$

(pro libovolně velké h (malé h) $\exists$ levé ryzí okolí bodu x_0 : $f(x) \geq h$ $(f(x)\leq h)$ $\forall x \in O_{r-}(x_0)$)

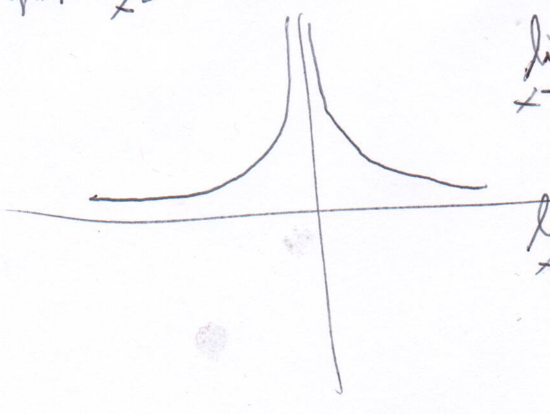
Př.: $f(x)=\frac{1}{x}$

a)



$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} &= -\infty\\ \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} &= \infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$

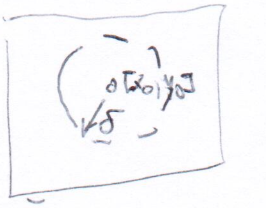


$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} &= \infty\\ \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} &= \infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty}}$$

ii) limita funkce dvou reálných proměnných

Def: limita funkce 2 a více proměnných se definuje prakticky stejně jako limita funkce 1 proměnné s tím rozdílem, že (u fce 2 proměnných) ryzí okolí bodu $[x_0;y_0]$ není sjednocení dvou intervalů, ale vnitřek kruhu $\|[x;y]-[x_0;y_0]\|<\delta$:

Df



Reálná funkce $f(x;y)$ dvou proměnných $x;y$ má v bodě $[x_0;y_0]$ limitu L, pokud $\forall \varepsilon>0\ \exists$ ryzí δ-okolí bodu $[x_0;y_0]$ $(0<\|[x;y]-[x_0;y_0]\|<\delta)$, že $\forall [x;y]\in O_r([x_0;y_0]) : |f(x;y)-L|<\varepsilon$

(na grafickém názoru: $\forall$ ε-roviny (horní a dolní) od konstantní roviny $k(x;y)=L$ $\exists$ ryzí okolí $O_r([x_0;y_0])$, že $f(x;y)$ leží mezi těmito ε-rovinami)

velikost vektoru $|(x-x_0,\ y-y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Věta: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ \exists \iff$ existují $\lim\limits_{\text{křivka}} f(x,y)$ a rovnají se pro body na všech křivkách blížících se k bodu (x_0,y_0)

Př:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim \frac{1+kx}{1-kx} = 1$$

blížíme se po parabolických cestách $y=kx^2$

ALE po přímce $y=kx$

$$= \lim \frac{x+kx}{x-kx} = \lim \frac{1+k}{1-k} = \boxed{\frac{1+k}{1-k}}$$ závisí na k, tj. limita nabývá různých hodnot

dohromady: lim neexistuje

C. Spojitost funkce v bodě x_0

Spojitost funkce v bodě x_0 je celkem dobrá vlastnost, pokud zkoumáme vlastnosti funkce v bodě x_0 nebo v okolí bodu x_0

Def: f je spojitá v bodě x_0, pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (limita v bodě x_0 se rovná $f(x_0)$)

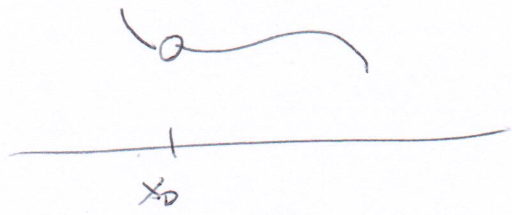
Def: f je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, pokud je spojitá v každém $x\in\langle a;b\rangle$

Pozn.: Pokud f není spojité v bodě x_0, existuje několik typů této nespojitosti

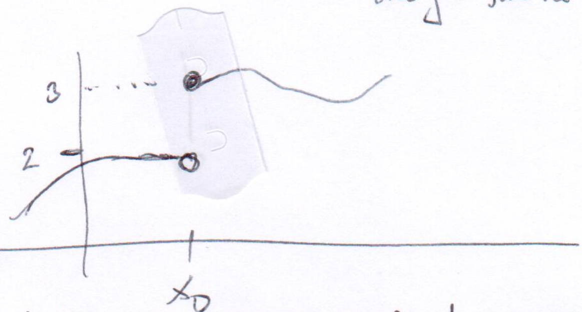
a) bod odstranitelné nespojitosti: nespojitost lze odstranit dodefinováním

$$f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$$

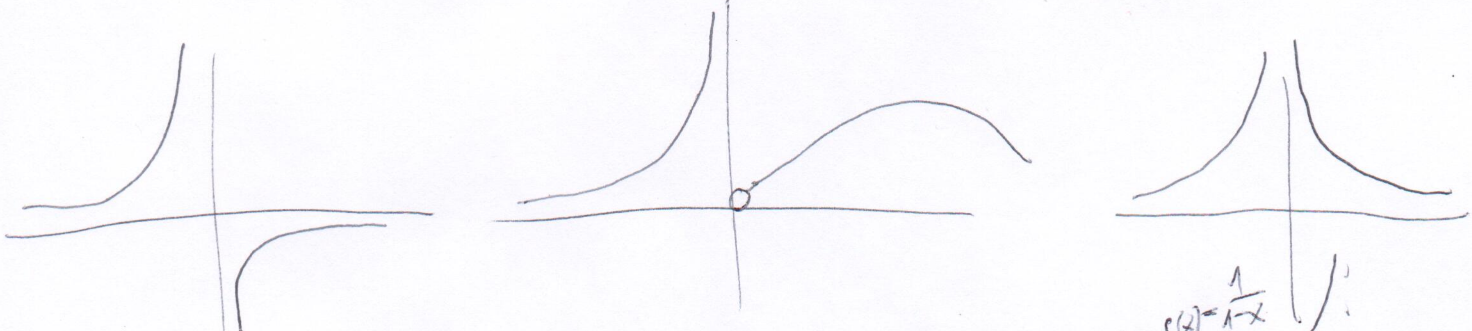
(a tedy limita existuje)



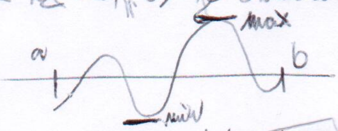
b) skok (bod nespojitosti 1. druhu): $\exists$ vlastní limity $f(x)$ pro $x \to x_0+$, $x \to x_0-$, ale jsou různé



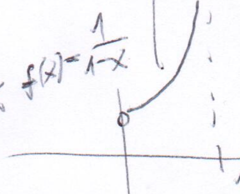
c) bod nespojitosti 2. druhu: jedna z limit je nevlastní ($=$ rovna $+\infty$, $-\infty$)



Věty 1) 1. Weierstrassova: f spojitá na $\langle a,b\rangle$ je ohraničená na $\langle a,b\rangle$



Př. $f(x) = \frac{1}{1-x}$



f není ohraničená na $\langle 0,1)$, tj. předpoklad uzavřenosti je podstatný

2) 2. Weierstrassova: f spojitá na $\langle a,b\rangle$ nabývá své největší i nejmenší hodnoty

3) Bolzanova: f spojitá na $\langle a,b\rangle$ nabývá své hodnoty nejv., nejm. i všech hodnot $\in \langle$nejm., nejv.$\rangle$

D. Další využití pojmu limita:

— v definici určitého integrálu … viz otázka 5

— definice derivace … viz otázka 3

— definice součtu nekonečné řady … viz otázka 6

Pozn.: Spojitost v bodě lze definovat i bez pojmu limity přímo, pouze místo ryzího okolí zahrneme i bod x_0:

f je spojitá v x_0, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

($\forall$ ε-pás kolem konstanty $f(x_0)$ $\exists$ okolí $O_\delta(x_0)$: $f(x)$ leží v ε-pásu pro $x \in O_\delta(x_0)$)