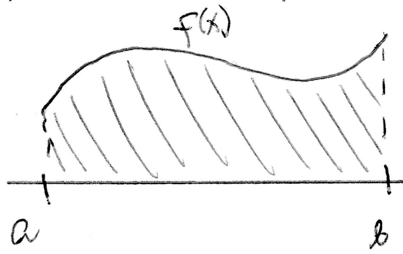
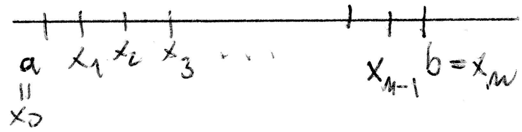
Otázka 5 – Riemannův integrál a jeho aplikace

$\exists\, c, d;\ c \le f(x) \le d \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

a) sestavení a výpočet určitého integrálu: uvažujme ohraničenou funkci f na $\langle a, b\rangle$, chceme spočítat obsah podgrafu funkce f:



i) provedeme dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na podintervaly $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ pro $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = d$,



ii) pro dané dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ nalezneme

$$m_k = \inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)$$

$$M_k = \sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)$$

iii) pro m_k označme dolní součet $s(d,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

horní součet $S(d,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

platí pak

$$c(b-a) \le s(d,f) \le S(d,f) \le d(b-a) \quad \forall \text{ dělení } d \text{ intervalu } \langle a,b\rangle$$

ohraničená shora   ohraničená zdola

Uvažujme nyní množinu D všech možných dělení d intervalu $\langle a, b\rangle$ (zejména posloupnost dělení $d \to 0+$)

$$c(b-a) \le \sup_{d \in D} s(d,f) \le \inf_{d \in D} S(d,f) \le e(b-a)$$

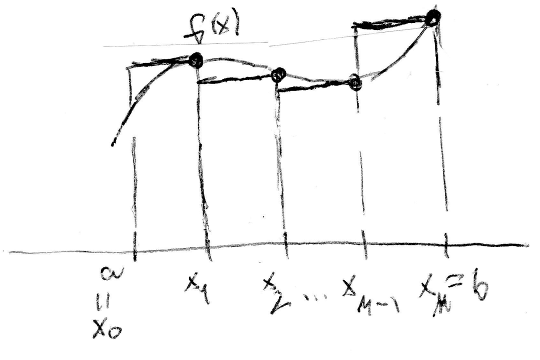
$\sup_{d \in D} s(d,f) = \underline{\int_a^b} f$ … dolní integrál $=$ $\overline{\int_a^b} f$ … horní integrál $= \inf_{d \in D} S(d,f)$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

pokud se horní a dolní integrál rovnají, řekneme, že daná hodnota !!! Riemannův určitý integrál

Pozn. 1, pokud by $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$, říkáme, že f není Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$

2, alternativně lze určitý Riemannův integrál definovat $S = \sum_{1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$



$\lim_{d \to 0} S$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to 0} \boxed{f(x_i)} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

(tj. $n \to \infty$)

limita přitom nezávisí na výběru bodu c_i z intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, tj. BUNO můžeme vybrat vždy pravý krajní bod x_i

$$d = \frac{b-a}{n}$$

(při tomto výběru reprezentanta $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tedy nemusíme vybírat minimum, maximum, supremum či infimum – nezáleží na tom, pokud výsledná limita na tomto výběru reprezentanta není závislá)

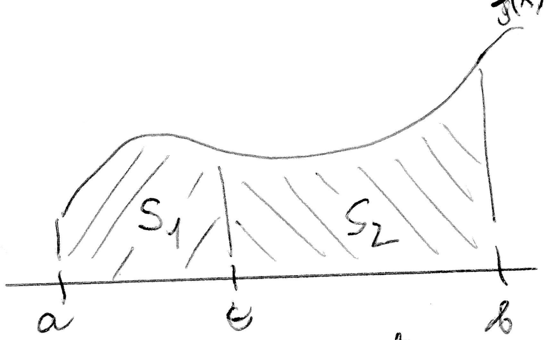
b) výpočet určitého Riemannova integrálu:

Podobně jako neurčitý integrál, i určitý integrál je lineární operátor

(A) a platí $\int_a^b (c \cdot f(x) + d \cdot g(x))\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx + d \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.

Dále platí aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím jeho:

$$f(x) \in R(\langle a,c \rangle) \wedge f(x) \in R(\langle c,b \rangle) \Rightarrow f(x) \in R(\langle a,b \rangle)$$

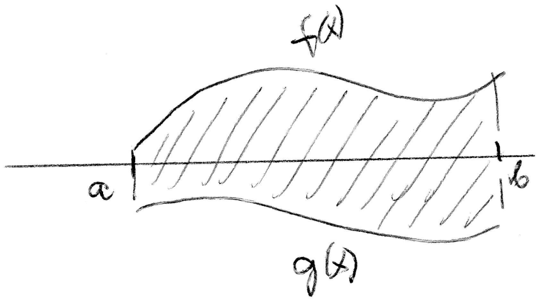


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$(S = S_1 + S_2)$

Zobecnění geometrického názoru: $\int_a^b f(x)\,dx$ je vlastně obsahem části roviny mezi funkcemi $f(x)$ a $g(x)=0$.

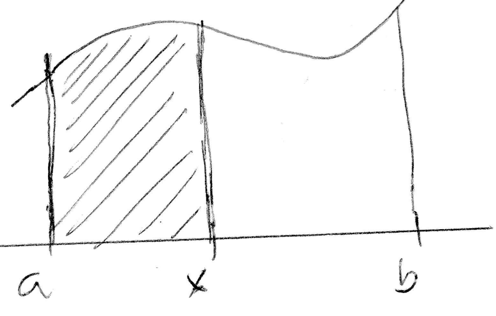
Obecně může být $g(x)$ libovolná Riemannovsky integrovatelná funkce a platí



$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = S$$

1. věta základní integrálního počtu (o existenci derivace $F'(x)$): f je spojitá na $\langle a,b \rangle \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ má derivaci na $\langle a,b \rangle$ a platí $F'(x) = f(x)$

integrál jako funkce horní meze je roven obsahu podgrafu funkce $f(t)$ na $\langle a,x \rangle$



Př. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ je vlastně $F(x) = \ln x$,

protože $F'(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \langle 1, b \rangle$

nějaký pevný bod $b > 1$

(způsobem $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ byla předpokládaná definice funkce $\ln(x)$)

2. základní věta integrálního počtu (Newton-Leibnizova formule): $f \in R(\langle a,b\rangle)$, F je funkce primitivní k f na $\langle a,b\rangle$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}\,!$$

Odtud plyne způsob výpočtu určitého integrálu: najdeme primitivní funkci $F(x)$ a dosadíme meze:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$$

(B) díky vztahu mezi určitým a neurčitým integrálem lze užívat analogii metody per partes i substitučních metod:

- $$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

  pro $u'(x), v'(x) \in R(\langle a,b\rangle)$

- $\varphi' \in R(\langle a,b\rangle)$, $\varphi(\langle a,b\rangle) \subseteq \langle \alpha,\beta\rangle$, f je spojitá na $\langle \alpha,\beta\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

(a k původním mezím se už nevracíme)

$\varphi(x)=t$

$\varphi'(x)\,dx = dt$

$a \rightsquigarrow \varphi(a)$

$b \rightsquigarrow \varphi(b)$

Př.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot\cos^2 x}{\sqrt[4]{1+\cos^3 x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} 1+\cos^3 x = t^4 \\ 3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)\,dx = 4t^3\,dt \\ x=0 \rightsquigarrow t=\sqrt[4]{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow t=1 \end{array}\right| = -\int_{\sqrt[4]{2}}^{1} \frac{4}{3}\,\frac{t^{3}\,dt}{t} = \frac{4}{3}\int_1^{\sqrt[4]{2}} t^2\,dt = \frac{4}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt[4]{2}} = \underline{\underline{\frac{4}{9}\left(\sqrt[4]{8}-1\right)}}$$

vlastně 3. typ substituce: oba předchozí typy v jednom

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}_{g(x)}\,dx = \left|\begin{array}{l}\varphi(x)=\psi(t)\\ \varphi'(x)\,dx = \psi'(t)\,dt\end{array}\right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt = \Big[F(\psi(t))\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$\left(\begin{array}{l} a \rightsquigarrow \psi^{-1}(\varphi(a)) = t_1 \\ b \rightsquigarrow \psi^{-1}(\varphi(b)) = t_2 \end{array}\right)$$

c) aplikace určitého integrálu:

i) fyzikální aplikace: pokud je mezi veličinami vztah $F'(t)=f(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$,

$$\text{pak } \int_a^b f(t)\,dt = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{nárůst veličiny } F \text{ na intervalu } \langle a,b\rangle}$$

například $x'(t)=v(t)$

$x(t)$ = poloha při pohybu po přímce

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \underbrace{x(t_2)-x(t_1)}_{\text{změna polohy}}$$

změna polohy je rovna integrálu určitému ze rychlosti

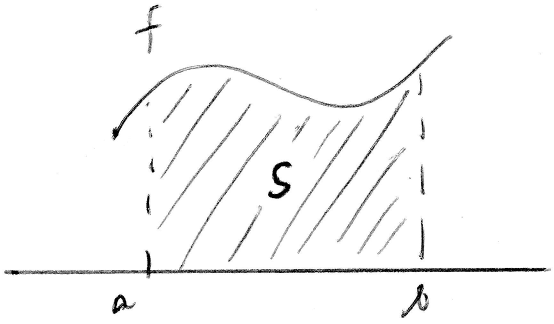
$v'(t)=a(t)$

$v(t)$ = rychlost při pohybu bodu po přímce

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = \underbrace{v(t_2)-v(t_1)}_{\text{změna rychlosti}}$$

změna rychlosti na intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ je rovna určitému integrálu ze zrychlení

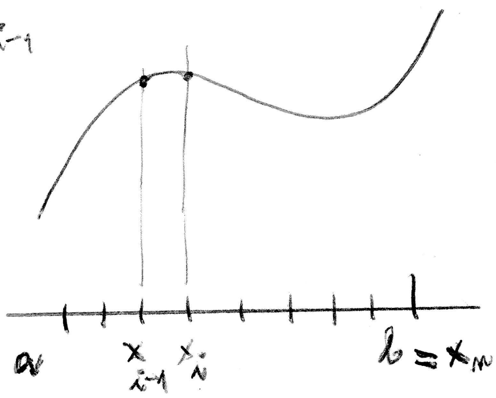
ii) obsah podgrafu kladné funkce $f(x)$ nad intervalem $\langle a,b\rangle$:



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

iii) délka křivky, která je částí grafu spojité diferencovatelné funkce $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$:

$$d=\frac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$$



délku křivky mezi body

$[x_{i-1},f(x_{i-1})]$, $[x_i,f(x_i)]$

nahradíme délkou úsečky mezi těmito body, která je podle Pythagorovy věty rovna

$$\sqrt{(x_{i-1}-x_i)^2+(f(x_{i-1})-f(x_i))^2}$$

Potom celková přibližná délka křivky na $\langle a,b\rangle$ je rovna:

$$L \doteq \sum_{1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

podle věty o střední hodnotě $\exists\, c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, že

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \text{ tedy } f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i))^2 (x_i - x_{i-1})^2} \Rightarrow$$

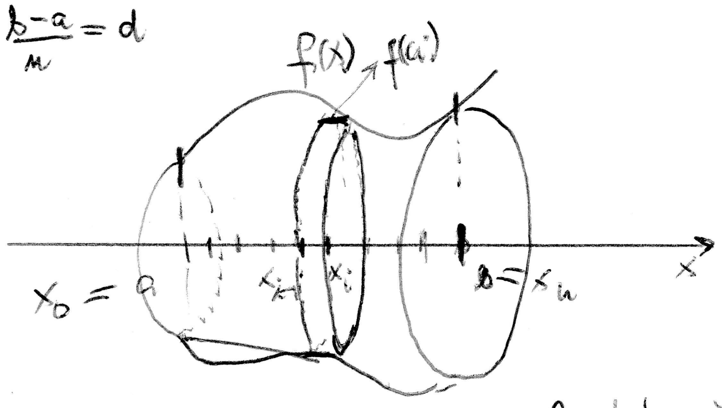
$$L \doteq \sum_{1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_i)} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

pro $d \to 0$, pokud tato limita nezávisí na výběru reprezentantů c_i

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

iv) Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací subgrafu spojité nezáporné f na $\langle a, b \rangle$:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = d$$



$$V \doteq \sum_{1}^{n} \text{objemů válců malé výšky } (x_i - x_{i-1}) =$$

druh podstavy

$$= \sum_{1}^{n} \pi f^2(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

poloměr válce

limitním přechodem pro $d \to 0$, pokud tato limita existuje a nezávisí na výběru reprezentantů c_i

$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx$$

Pozn.: Při výpočtu určitého integrálu jsme vyžadovali, aby

a) integrační obor byl omezená množina

b) f byla omezená fce na integračním oboru

} pokud některý z těchto předp. je porušen, mluvíme o nevlastním integrálu – počítáme jako limitu v okolí problematického bodu