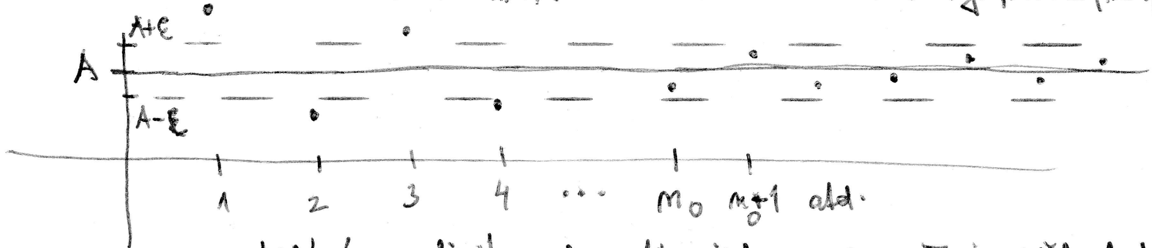
Otázka 6: Posloupnosti a řady

Definice 1) Reálná posloupnost je zobrazení $N \to R$, které číslu 1 přiřadí číslo $a_1 \in R$
2 → $a_2 \in R$
atd.

2) Říkáme, že reálná posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ <u>konverguje ke své limitě</u> $A \in R$, když
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon$. Pokud takové A neexistuje, říkáme, že posloupnost <u>diverguje</u>



geometrický význam limity posloupnosti: indexem n_0 počínaje, všechny hodnoty a_n už leží v daném ε-pásu

Příklad: 1) posloupnost lze někdy zadat předpisem pro n-tý člen: $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$
($\lim a_n = 2$, tuto posloupnost lze ilustrovat obrázkem výše)

2) posloupnost $a_n = n$, tj. $(1, 2, 3, \dots)$ má limitu ∞ ... říkáme, že diverguje směrem k nekonečnu

3) posloupnost $a_n = -n$, tj. $(-1, -2, -3, \dots)$ má limitu $-\infty$, říkáme, že diverguje směrem k MINUS nekonečnu

4) posloupnost $a_n = (-1)^n \cdot 2 + \frac{1}{n}$, tj. $(-1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{9}{5}, \frac{13}{6}, -\frac{13}{7}, \dots)$
nemá žádnou limitu, ani konečnou ani nekonečnou ... má ovšem dva <u>hromadné body</u> (2 a −2), tj. takové body, v jejichž blízkosti leží nekonečně mnoho členů posloupnosti

5) posloupnost $a_n = (-1)^n \cdot n$, tj. $(-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots)$ ... o této posloupnosti lze říci, že má dva <u>nevlastní hromadné body</u> (∞ a $-\infty$), nebo že diverguje

(o posloupnostech 4 a 5 lze říci, že <u>oscilují</u>, protože nemají ani konečnou, ani nekonečnou limitu)

Definice: Pokud $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálná, výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ||| <u>číselná řada</u>.
Říkáme, že <u>číselná řada konverguje</u> = má konečný součet $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
jestliže existuje reálné číslo $s = \lim s_n$ (limita posloupnosti s_n částečných součtů řady $\sum_1^{\infty} a_n$,

tj. $s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ... tzv. <u>n-tý částečný součet řady</u> $\sum_1^{\infty} a_n$)

Příklad: 1) $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ je aritmetická posloupnost s diferencí $d=2$, což je rozdíl mezi dvěma následujícími členy (pro každé n: $d = a_{n+1} - a_n$)

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ tj. aritmetická řada diverguje}$$

(aritmetická řada = součet členů aritmetické posloupnosti)

2) $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, což je podíl mezi dvěma následujícími členy této posloupnosti ($\forall n: q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$)

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \left.\frac{a_1}{1-q}\right|_{\substack{a_1=1 \\ q=\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{2}}$$

3) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ diverguje, protože příslušná } \lim S_n = \infty$$

<u>Kritéria konvergence číselné řady</u>: Někdy nedokážeme hned přímo sečíst danou řadu, ale na základě některých kritérií můžeme rozhodnout, zda tento konečný součet existuje nebo neexistuje.

a) <u>nutná podmínka konvergence</u>: $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \lim a_n = 0$

Tuto nutnou podmínku konvergence někdy užíváme ve verzi její logické obměny:

$$\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

<u>Př.</u> $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} \dots$ protože $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \neq 0$,

tj. podle nutné podmínky konvergence víme, že řada diverguje

b) <u>limitní podílové kritérium konvergence pro řady s kladnými členy</u> ($a_n > 0 \ \forall n$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} L < 1 \Rightarrow \text{řada } \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \\ L = 1 \Rightarrow \text{nelze rozhodnout, zda řada konverguje} \\ L > 1 \Rightarrow \text{řada } \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \end{cases}$$

<u>Př.</u> 1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \dots \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \dots$ rozhodnout podle tohoto kritéria nemůžeme, zda řada konverguje nebo ne

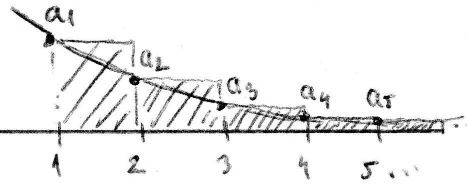
2) $\sum_{1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{3^n} \dots \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1) \cdot \frac{1}{3^{n+1}}}{n \cdot \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ řada konverguje

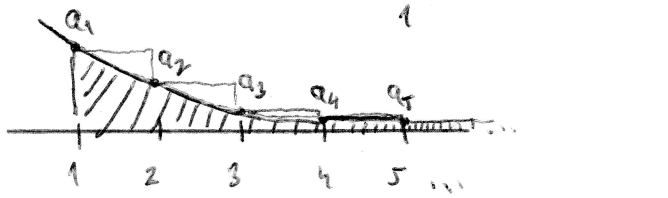
c) <u>integrální kritérium konvergence pro řady s kladnými členy</u>

Pokud $f(x)$ je nezáporná nerostoucí spojitá reálná funkce a $\forall n \in N: a_n = f(n)$, tak platí:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konverguje}$$

součet obsahů obdélníků = $\sum_1^\infty a_n$ obsah podgrafu = $\int_1^\infty f(x)\,dx$





oba tyto obsahy jsou různé, ale jsou současně konečné, nebo současně nekonečné!

<u>Př.</u>: 1) $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ ... podmínky integrálního kritéria splňuje funkce $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]_1^t = \infty$$ ... tj. i řada $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ diverguje, její součet $=\infty$

2) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ ... $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^t = 1$ ... tj. i řada $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ má konečný součet

(Vynecháno Leibnizovo kritérium pro alternující řady: a) $+,-,+,-,+,-,\dots$ b) $a_{n+1}\le a_n$ c) $\lim a_n = 0$ $\Big\}\Rightarrow \sum_1^\infty (-1)^n\cdot a_n$ konverguje | Př: $\sum_1^\infty (-1)^n\cdot\frac{1}{n}$)

<u>Definice</u>: Výraz $\sum_1^\infty f_n(x)$, kde $f_n(x)$ jsou funkce reálné proměnné, ||| <u>funkční řada</u>.

Tato funkční řada má pro některá x konečný součet $s(x)$, když $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, kde $s_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$ je n-tý částečný součet (<u>tj. řada funkcí konverguje</u>); Množina těch x, pro která $\sum_1^\infty f_n(x)$ konverguje, ||| <u>obor konvergence této funkční řady</u>.

<u>Př.</u>: Určete obor konvergence funkční řady $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}(x-2)^{2n}$ jedná se o obyčejnou, tzv. bodovou konvergenci

Pro zjištění oboru konvergence použijeme stejná kritéria jako pro řady s kladnými členy, ale aby byla zachována kladná hodnota, např. při limitním podílovém kritériu použijeme místo $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}(x-2)^{2n+2}}{\frac{1}{n^2}(x-2)^{2n}}\right| = |x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = \underline{\underline{|x-2|<1}}$$

řada konverguje pro $x\in(1;3)$.

V krajních bodech nalezeného intervalu musíme konvergenci ověřit zvlášť: díky sudému mocniteli 2n dostaneme pro $x=1$ i $x=3$ konvergentní řadu: $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}1-2\\3-2\end{pmatrix}^{2n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje podle integrálního kritéria.

Celkem jsme dostali: obor konvergence dané řady $\underline{K=\langle 1;3\rangle}$.

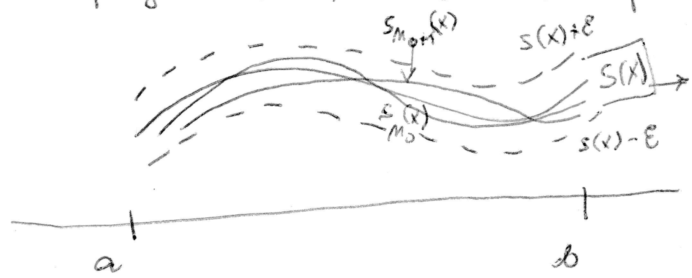
<u>Def.</u> Další důležitou otázkou je, kdy můžeme funkční řadu $\sum_1^\infty f_n(x)$ integrovat nebo derivovat člen po členu a dosáhneme stejného efektu, jako když bychom zintegrovali nebo zderivovali její součet $s(x)$. S tím souvisí i otázka, kdy je součet $s(x)$ spojitý – je spojitý tehdy, když všechny funkce $f_n(x)$ jsou spojité? A tedy když všechny částečné součty $s_n(x)$ jsou spojité?

Odpověď na všechny tři otázky je stejná: spojitost $s_n(x)$ nestačí na spojitost limity $s(x)$ a integrace či derivace člen po členu nedává vždy tentýž výsledek jako u $s(x)$. Abychom zaručili všechny tři věci, stačí, aby $s_n(x)$ konvergovala stejnoměrně = intervalově k funkci $s(x)$.

Řekneme, že $\sum_1^\infty f_n(x)$ konverguje stejnoměrně ke svému součtu $s(x)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$, když pro posloupnost $s_n(x)$ jejích částečných součtů platí:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N: \forall n\ge n_0, \forall x\in\langle a;b\rangle : |s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$$

(Názorné vysvětlení: pro jakékoli malé kladné ε a tzv. ε-pás vytvořený funkcemi $s(x)-\varepsilon$, $s(x)+\varepsilon$



$\rightarrow s_{n_0+2}(x), s_{n_0+3}(x)$, atd. leží v ε-pásu limity $s(x)$, tj.

$s(x)-\varepsilon \le s_n(x) \le s(x)+\varepsilon$ $\forall x\in\langle a;b\rangle$

existuje index n_0, že jím počínaje všechny částečné součty s_n budou ležet v daném ε-pásu) pro x na celém intervalu $\langle a;b\rangle$

<u>Věta</u>: Tato stejnoměrná konvergence řady $\sum_1^\infty f_n(x)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$, když je podmnožinou oboru konvergence řady, platí např. pro <u>mocninné řady</u>, tj. řady typu $\sum_1^\infty a_n(x-x_0)^n$.

<u>Příklad</u>: Sečtěte řadu $\sum_1^\infty n\cdot x^{n-1}$. Tato řada je mocninná, tj. konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu oboru obyčejné konvergence (bodové konvergence) této řady.

<u>Řešení</u>: $s(x)=\sum_1^\infty n\cdot x^{n-1}$ ... zintegrujeme obě strany této rovnice podle proměnné x

$$\int s(x)\,dx = \sum_1^\infty \cancel{n}\cdot\frac{x^n}{\cancel{n}} = \frac{x}{1-x}$$ ... podle vzorce pro součet geometrické řady pro $|x|<1$

Nyní opětovnou derivací dostaneme $s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$ ... pro $|x|<1$

<u>Taylorovy řady a využití teorie mocninných řad</u>

<u>Taylorova věta</u>: $f(x)$ má v okolí bodu x_0 derivace všech řádů jako spojité funkce.

Pak $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots$$

<u>Příklad</u>: pro $x_0=0$ dostáváme rozvoje funkcí

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

<u>Příklad</u>: Rozvoj funkce v řadu lze použít např. při integraci

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\right)dx = \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\dots\right]_0^1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\dots$$

lze zjistit s dobrou přesností, např. na čtyři desetinná místa

Taylorova věta pro binomickou řadu. Užitím Taylorovy věty lze odvodit vzorec pro rozvoj funkce $(1+x)^\alpha$, kde α může být nejen přirozené, ale jakékoli reálné číslo kromě nuly:

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}\cdot x+\binom{\alpha}{2}\cdot x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\dots,$$

kde pro $\alpha \in R-\{0\}$ máme $\binom{\alpha}{k}$ tzv. zobecněné binomické koeficienty

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

Př. Lze užít například pro přibližný výpočet některých funkčních hodnot různých funkcí:

$$\sqrt{70} = \sqrt{64+6} = \frac{1}{8}\sqrt{1+\frac{6}{64}} = \frac{1}{8}\sqrt{1+\frac{3}{32}} =$$

$$\left(\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{2}}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{2}\cdot\frac{(-3)}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{32}-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{32}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{32}\right)^3-\frac{5}{128}\cdot\left(\frac{3}{32}\right)^4+\dots\right)$$

první tři až čtyři členy rozvoje už dosahují dobrou přesnost

Př. Nekonečné řady lze užít k vyjádření transcendentních čísel = čísel s nekonečným neperiodickým rozvojem,

a) $e = e^x\big|_{x=1} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

b) vyjádříme π ze vztahu $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow \pi = 4\cdot\operatorname{arctg} 1$ takto:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\dots$$ / integrací obou stran rovnice dostaneme

pomocí rozvoje či součtu geometrické řady

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\dots$$

$$\pi = 4\cdot\operatorname{arctg} 1 = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots\right)\dots$$

tato konvergence je sice pomalá, ale dobře ilustruje fakt, že hodnotu čísla π získáme rozvojem určitých funkcí, které nabývají pro některá x funkční hodnotu $c\cdot\pi$