Matem. analýza – okruh 3: DERIVACE

A. definice derivace a její význam

i) Algebraicky se derivace reálné funkce $f(t)$ v bodě t_0 definuje jako $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$.

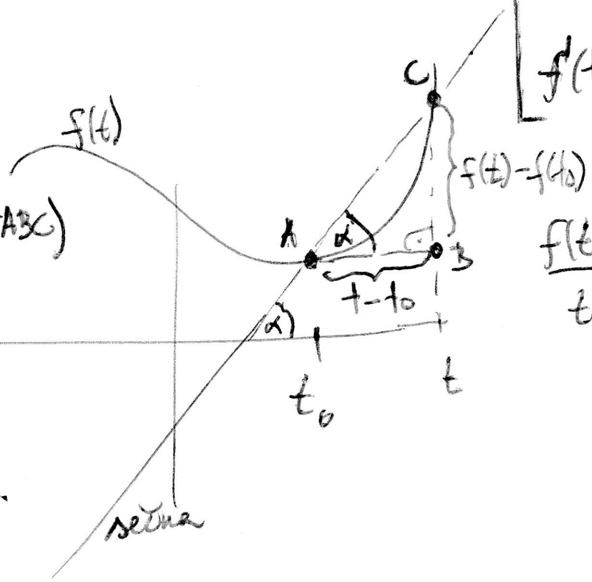
Z definice derivace jako limity plyne, že derivace v bodě t_0 $\Leftrightarrow$ existují příslušné jednostranné limity a jsou si rovny

$$f'(t_0)_- = \lim_{t\to t_0-} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

$$f'(t_0)_+ = \lim_{t\to t_0+} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

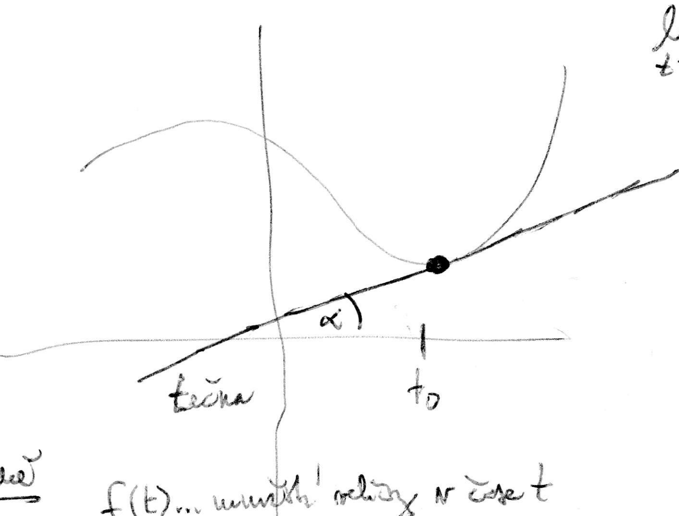
ii) Geometricky

(ze pravoúhlého ΔABC)



$\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = tg\,\alpha$ ... směrnice sečny ke grafu $f(t)$ v bodech $[t_0, f(t_0)]$, $[t, f(t)]$

$\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = tg\,\alpha$ ... směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[t_0, f(t_0)]$



iii) Fyzikálně

$f(t)$ ... množství veličiny v čase t

$f(t_0)$ ... množství veličiny v čase t_0

směrnice sečny ... $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ ... průměrná rychlost změny množství za dobu $\langle t-t_0 \rangle$ $\left(\dfrac{\text{změna množství}}{\text{změna času}} \right)$

nárůst veličiny

časový interval

směrnice tečny ... $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ ... okamžitá rychlost změny množství veličiny f v okamžiku t_0

Např: $x(t)$ ... poloha tělesa pohybujícího se po přímce v okamžiku t

$x(t_0)$ ... poloha tělesa v okamžiku t_0

$\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ ... průměrná rychlost změny polohy = průměrná rychlost pohybu v intervalu $\langle t_0, t \rangle$

$x'(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ ... okamžitá rychlost pohybu přímočarého v okamžiku t_0

B. Vyšetřování průběhu funkce

Pojem derivace (zejména jeho geometrický význam) poskytuje aparát pro zkoumání vlastností jednoho reálné funkce (= vlastností vztahu mezi dvěma veličinami); při zkoumání vlastností funkce nás zajímají odpovědi na následující otázky:

1. D_f, popřípadě H_f
2. na kterých intervalech je f rostoucí / klesající a jaké má lokální extrémy
3. na kterých intervalech je f konvexní / konkávní a jaké má inflexní body
4. jaké má graf $f(x)$ asymptoty
   - bez směrnice (v bodech na hranici def. oboru zjistíme jednostranné limity)
   - se směrnicí (v nekonečnu): $y = k\cdot x + q$, kde

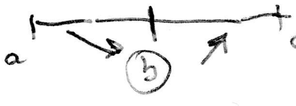
     $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k\cdot x)$ … asymptota $\exists$, pokud $\exists$ obě tyto limity

   (a dále ještě druhá asymptota se směrnicí může existovat pro $x \to -\infty$)
5. ze všech předchozích informací nakreslíme graf $f(x)$, a tím poskytneme o dané funkci ucelený obraz

---

V uvedeném vyšetřování má derivace pomocnou úlohu v bodech 2, 3.

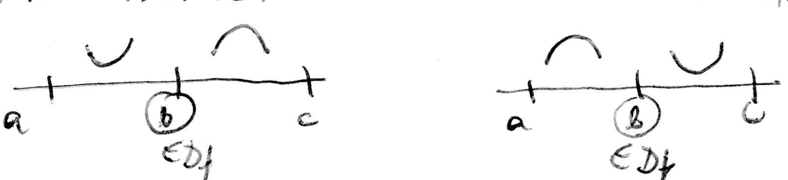
Ad 2 f má derivaci na (a,b), $f'(x) > 0$ na (a,b) $\Rightarrow$ f je rostoucí na (a,b)
$ < 0 \qquad\qquad$ klesající

(lokální min pak ex. v bodě  pokud f je spojitá na $\langle a,c\rangle$, i když v bodě b neex. $f'(b)$

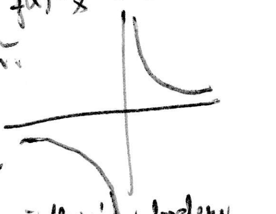
max. )

Ad 3 f má druhou derivaci na (a,b), $f''(x) > 0$ na (a,b) $\Rightarrow$ f je konvexní na (a,b)
$ < 0 \qquad\qquad$ konkávní

(inflexní bod je takový bod, ve kterém f přechází ze konvexní na konkávní nebo ze konkávní na konvexní, pokud vnitř $\in D_f$ a f je v něm spojitá)



Pokud $b \notin D_f$, i tak může docházet ke změně konkávní – konvexní, např.: $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x = 0$



$x_0 = 0$ se inflexním bodem nenazývá

Př. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

① $D_f = \mathbb{R}$

② f je rostoucí, klesající na:

$$f' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ldots f \text{ je rostoucí na } \mathbb{R}$$

(Aj. nemá lok. extrémy)

③ f je konvexní, konkávní na:

$$f'' = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \left.\begin{array}{l} > 0 \text{ pro } x > 0 \\ < 0 \text{ pro } x < 0 \end{array}\right] x = 0 \ldots \text{inflexní bod}$$

Aj: f je konvexní pro $x > 0$
konkávní pro $x < 0$

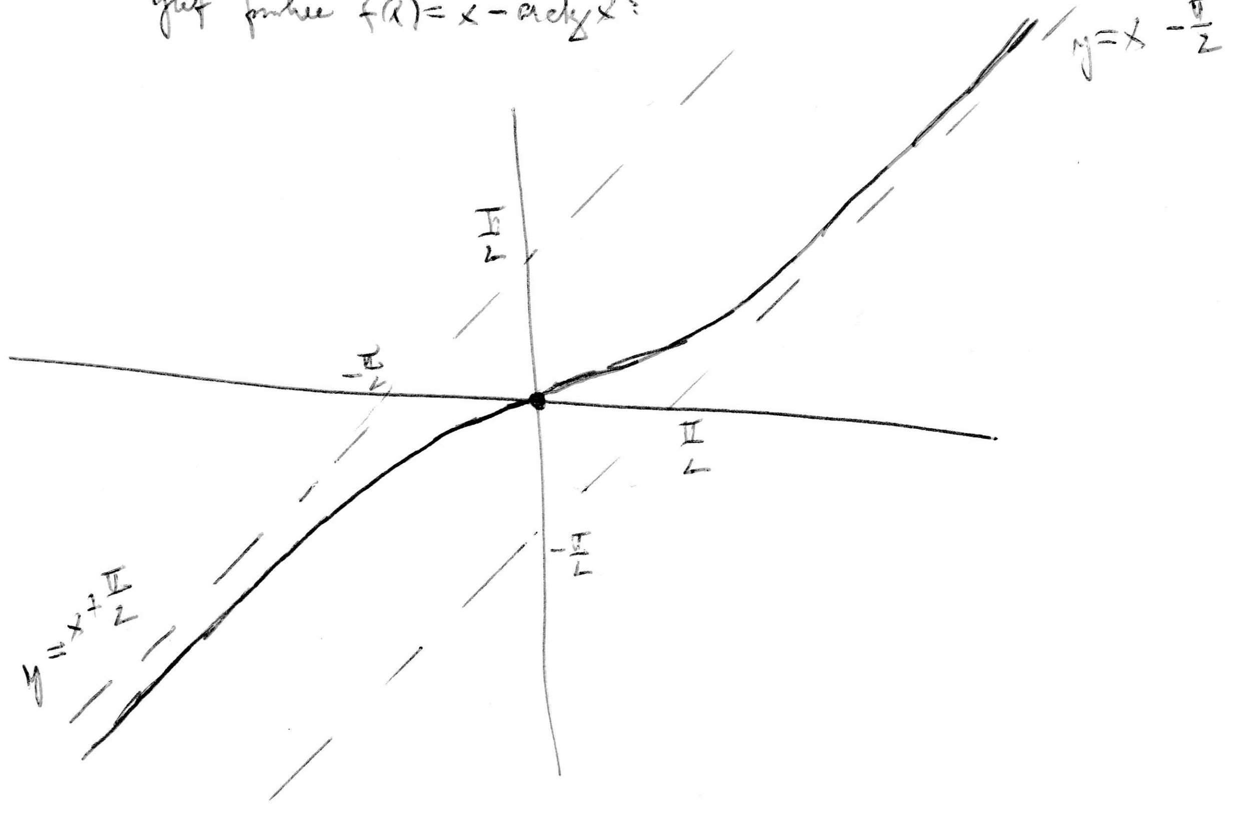
④ a) asymptoty bez směrnice neexistují!

b) asymptoty se směrnicí: $y = kx + q$

$$x \to \infty: \left.\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\left(1 - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 \\ q = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} y = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x \to -\infty: \left.\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 \\ q = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - \operatorname{arctg} x - x) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} y = x + \frac{\pi}{2}$$

⑤ graf funkce $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$:



C. Derivace funkce více proměnných

Aby mohla mít derivace funkce více proměnných svůj význam, musíme vzít v funkce $f(x,y)$ dvou proměnných fci, v jakém konkrétním sklonu (= jejím směrem) v bodě $[x_0,y_0]$ derivaci konstruujeme:

Def. Derivace funkce $f(x,y)$ ve směru proměnné x v bodě $[x_0,y_0]$ se definuje algebraicky jako $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

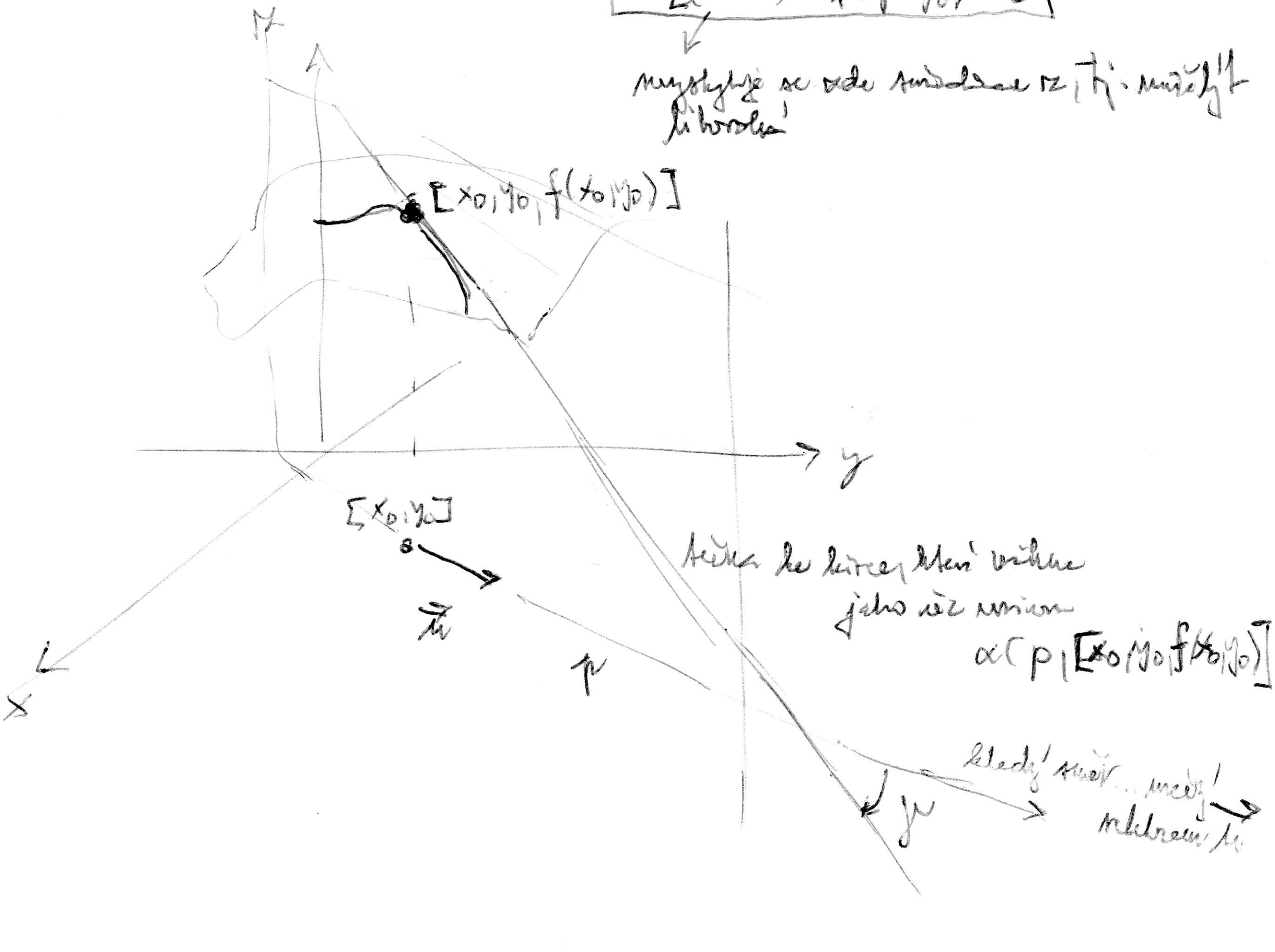
geometricky je $f'_x(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\alpha$ ... směrnice tečny ke křivce, která vznikne jako řez grafu $f(x,y)$ rovinou $y=y_0$, v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$

$f'_y(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\beta$ ... směrnice tečny ke křivce, která vznikne jako řez graf $f(x,y)$ rovinou $x=x_0$ v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$

teoreticky lze definovat derivaci funkce $f(x,y)$ ve směru vektoru $\vec{u}=(u_1,u_2)$ o velikosti 1, tj. $\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$ jako $f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\gamma$ ... směrnice tečny ke křivce, která vznikne jako řez plochy $f(x,y)$ rovinou $\vec{n}=(-u_2,u_1)$ ... normálový vektor

$$\boxed{-u_2(x-x_0)+u_1\cdot(y-y_0)=0}$$

nevyskytuje se zde souřadnice z, tj. může být libovolná



Parciální derivace f'_x, f'_y funkce dvou proměnných lze využít při hledání lokálních extrémů funkce $f(x,y)$:

<u>Věta</u>. Pokud $f(x,y)$ má v bodě $[x_0,y_0]$ lokální extrém a $\exists\, f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$, tak se obě tyto parciální derivace v bodě $[x_0,y_0]$ rovnají nule

<u>Věta</u> Pokud $[x_0,y_0]$ je stacionární bod funkce $f(x,y)$, tj. $f'_x(x_0,y_0)=0=f'_y(x_0,y_0)$ tak ze matice druhých derivací v bodě $[x_0,y_0]$ posoudíme jeho povahu

$$D=\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \det f''_{xx}(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0)$$

$$D_2 = \det D$$

a) $D_2 < 0 \implies [x_0,y_0]$ je sedlový bod

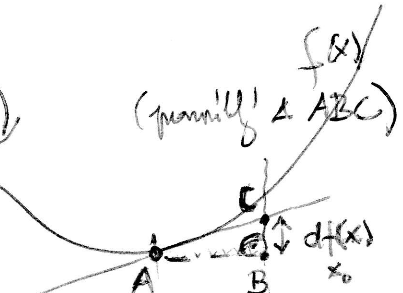
b) $D_1 < 0,\ D_2 > 0 \implies [x_0,y_0]$ je lokální maximum

c) $D_1 > 0,\ D_2 > 0 \implies [x_0,y_0]$ je lokální minimum

<u>Pozn.</u>: Při hledání globálních extrémů dostatečně hladké funkce dvou proměnných (se spojitými $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ na oblasti D_f) platí podobně jako u funkce jedné proměnné: f nabývá svého globálního extrému ve svém stacionárním bodě nebo na hranici

<u>D. Taylorův polynom, diferenciál: (u funkce 1 proměnné)</u>

$$f(x) \doteq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{df_{x_0}(x)}$$



Diferenciál v bodě x_0 je hlavním přírůstkem funkční hodnoty, což je případ Taylorova polynomu pro $n=1$;

obecně <u>Taylorův polynom</u> v bodě x_0 aproximuje $f(x)$ pro x blízko x_0:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$