Dnes víme, že po logické stránce lze téměř celou současnou matematiku odvodit z jediného zdroje — z teorie množin.

N. Bourbaki

Nesmírný vliv teorie množin na rozvoj matematiky v posledních padesáti letech je v současné době obecně uznávanou skutečností.

P. S. Alexandrov
A. N. Kolmogorov

Teorie množin pronikla hluboko do mnohých oblastí matematiky a nesmírně je ovlivnila; zvlášť mimořádnou úlohu hraje při studiu logických a filosofických základů matematiky.

R. Courant

Prvky množiny mohou být nejrůznější předměty: písmena, atomy, čísla, funkce, body, úhly atd. Odtud je již od samého počátku patrná neobyčejná šířka teorie množin a její použitelnost v mnohých oblastech poznání (v matematice, v mechanice, ve fyzice).

N. N. Luzin

Zákony platné pro kvantitativní transfinitní čísla se podstatným způsobem liší od závislostí panujících v oblasti konečna.

G. Cantor

N. J. VILENKIN

# Vyprávění o množinách

Státní pedagogické nakladatelství ● Praha

Knižnice všeobecného vzdělání ● Maják

Z 2. upraveného a doplněného ruského vydání přeložil
dr. Milan Vlach
Recenzoval dr. Jiří Veselý



# PŘEDMLUVA

*První příležitost slyšet o teorii množin jsem měl v osmé třídě. Navštívil jsem přednášku, kterou pro moskevské školáky konal I. M. Gelfand — tehdy začínající docent a nyní člen korespondent Akademie věd SSSR. Dvě hodiny nám vyprávěl o zcela neuvěřitelných věcech: o tom, že přirozených čísel je stejně mnoho jako čísel sudých, že racionálních čísel je stejně mnoho jako čísel přirozených, a že bodů na úsečce je stejně mnoho jako bodů na čtverci.*

*Seznamování s teorií množin pak pokračovalo během studia na mechanicko-matematické fakultě Moskevské státní university. Vedle přednášek a seminářů tam existoval ještě jiný, svérázný způsob výuky, o kterém snad profesoři a docenti neměli ani tušení. Po vyučování (a někdy — nač tajit hříchy — i v době nepříliš zajímavých přednášek) se studenti toulali po chodbách staré universitní budovy a posuzovali spolu zajímavé úlohy, neočekávané příklady a vtipné důkazy. A právě při těchto rozmluvách se studenti prvních ročníků dovídali od svých starších kolegů, jak se konstruuje křivka procházející všemi body čtverce nebo spojitá funkce nemající nikde derivaci, atd.*

*Zdůvodnění nebyla ovšem vždy zcela přesná a jít na zkoušku po vyslechnutí těchto rozhovorů by bylo neodpustitelně lehkomyslné. Zkouška však stejně nepřipadala v úvahu — zkouška z teorie funkcí reálné proměnné se podle seznamu přednášek skládala až za dva roky. Ale jak potom tato příprava „v kuloárech" pomáhala při sledování přednášek a skládání zkoušek! U každé věty se vybavovaly zajímavé úlohy, vtipná srovnání a názorné příklady, s nimiž jsme se již dříve setkali.*

*Chci čtenáři vyprávět o teorii množin zhruba v témž duchu, v jakém jsem se s ní seznamoval při „kuloárních" přednáškách.*

*Největší pozornost proto věnuji pečlivé formulaci jednotlivých úloh, seznámení s neočekávanými a udivujícími příklady, které zcela odporují naivním představám a na které je teorie funkcí reálné proměnné tak bohatá. Pocítí-li po přečtení této knížky žák vyšší třídy nebo student některého z prvních ročníků vysoké školy přání seznámit se s teorií množin nebo s teorií funkcí reálné proměnné hlouběji, bude autor považovat svůj cíl za splněný.*

*K vážnějšímu studiu lze doporučit tyto knihy:*)*


1. *P. S. Alexandrov: Úvod do obecné teorie množin a funkcí; Praha, NČSAV 1954.*
2. *A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza; Moskva, Nauka 1968.*
3. *N. N. Luzin: Teorija funkcij dějstvitelnogo peremennogo; Moskva, Učpedgiz 1948.*
4. *I. P. Natanson: Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Moskva, Gostechizdat 1950.*
5. *F. Hausdorf: Teorija množestv, ONTI 1937.*


*Mnoho zajímavých úloh z teorie množin obsahuje kniha J. S. Očana „Sbornik zadač i teorem po teorii funkcij dějstvitelnogo peremennogo", Prosveščenije 1965. Mnoho zajímavých údajů, týkajících se některých úloh z této knížky, lze nalézt v knize A. S. Parchomenka „Čto takoe linija". Na konci knihy uvádíme řadu úloh z teorie funkcí reálné proměnné, jejichž řešení bude čtenáři užitečné. Poznamenejme ještě, že některá obtížnější místa lze při prvním čtení vynechat, aniž by tím bylo nepříznivě ovlivněno porozumění ostatním částem textu. Tato místa jsou označena čtverečky.*

*) Českého čtenáře upozorňujeme ještě na tyto knihy:
B. Pospíšil: Nekonečno v matematice, Praha, JČMF 1949;
E. Čech: Bodové množiny, Praha, Academia 1966;
J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson: Úvod do finitní matematiky, Praha, SNTL 1971.



# Kapitola 1

# Množiny a operace s množinami

## Co je množina

V této kapitole se bude hovořit o tom, co znamená slovo množina a jaké operace lze s množinami provádět. Základní pojem teorie — pojem množiny — nelze přesně definovat. Je sice možné říci, že množina je „souhrn", „soubor", „systém", „třída" a pod. To však nejsou matematické definice, nýbrž spíše zneužívání slovního bohatství jazyka.

Definujeme-li nějaký pojem, je především třeba ukázat obecnější pojem, jehož zvláštním případem definovaný pojem je. U pojmu množiny to však není možné, neboť v matematice obecnější pojem neexistuje.

Z tohoto důvodu místo uvedení definice množiny budeme význam tohoto pojmu ilustrovat na příkladech.

Často je třeba hovořit o několika věcech majících společnou nějakou vlastnost. Například lze hovořit o množině všech židlí v určité místnosti, o množině všech atomů planety Jupiter, o množině všech buněk lidského těla, o množině všech brambor v daném pytli, o množině ryb v moři, o množině všech čtverců v rovině, o množině všech bodů dané kružnice atd.

Předměty, z nichž se množina skládá, nazýváme jejími *prvky*. Skutečnost, že se daná množina A skládá z prvků $x, y, \ldots, z$, zapisujeme obvykle symbolem

$$\mathsf{A} = \{x, y, \ldots, z\}.$$

Například množina všech dnů v týdnu se skládá z prvků pondělí, úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota, neděle, takže symbolicky ji zapíšeme {pondělí, úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota, neděle}. Proto symbol {leden, únor, březen, duben, květen, červen, červenec, srpen, září, říjen, listopad, prosinec} označuje množinu všech měsíců v roce, symbol {sčítání, odčítání, násobení, dělení} označuje množinu základních početních výkonů. Množina všech řešení kvadratické rovnice $x^2 - 2x - 24 = 0$ se skládá z čísel $-4$ a 6, tj. má tvar $\{-4, 6\}$.

Složené závorky v označení množiny znázorňují okolnost, že jednotlivé prvky jsou shrnuty v jeden celek — v množinu A. Skutečnost, že prvek $x$ patří do množiny A, se zapisuje pomocí symbolu $\in$ takto: $x \in A$. Jestliže daný prvek $x$ do množiny A nepatří, píše se $x \notin A$. Například, označuje-li písmeno A množinu všech sudých přirozených čísel, pak $6 \in A$ a $3 \notin A$.

Hovoříme-li tedy o množině, shrnujeme určité objekty v jeden celek, a to v množinu, jejímiž jedinými prvky tyto objekty jsou. Zakladatel teorie množin Georg Cantor to zdůraznil těmito slovy:

*„Množinou rozumíme každý soubor určitých dobře rozlišitelných objektů našeho nazírání nebo myšlení shrnutých v jeden celek.“**)

Prvky množiny mohou být i objekty, které ve skutečnosti neexistují, například v bohosloveckých traktátech se vážně studují vzájemné vztahy v množinách archandělů, zlých duchů apod.

Pro názornou představu pojmu množiny navrhl akademik N. N. Luzin toto přirovnání. Představme si průhledný, nepropustný obal, například něco jako uzavřený průhledný sáček, a předpokládejme, že v tomto obalu jsou zabaleny

*) V originále: „Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. (Pozn. překl.)



všechny prvky dané množiny A a že kromě těchto prvků nejsou uvnitř obalu žádné jiné objekty. Tento obal s objekty $x$, nacházejícími se uvnitř, může sloužit jako názorný obraz množiny A vytvářené prvky $x$. Samotný průhledný obal obklopující všechny prvky (a nic jiného kromě nich) pak dosti dobře znázorňuje shrnování prvků $x$, jehož výsledkem je vytvoření množiny A.

Obsahuje-li množina pouze konečný počet prvků, nazývá se *konečnou* množinou, a je-li v ní nekonečně mnoho prvků, nazývá se *nekonečnou* množinou. Tak např. množina všech stromů v určitém lese je konečná a množina všech bodů dané kružnice je nekonečná.

## Jak se určují množiny

Množinu lze určit různými způsoby. Jeden ze způsobů spočívá v tom, že se uvede úplný seznam všech jejích prvků. Například množina všech žáků jisté třídy je určena seznamem žáků v příslušné třídní knize, množina všech států světa je určena jejich seznamem v zeměpisném atlase, množina všech kostí lidského těla je dána jejich seznamem v učebnici anatomie.

Tento způsob je však použitelný pouze v případě konečných množin, a to ještě zdaleka ne vždy. Například lze sotva pořídit úplný seznam všech ryb v moři, i když je jich pouze konečný počet. Nekonečné množiny už vůbec nelze určovat pomocí úplného seznamu; zkuste například sestavit úplný seznam všech přirozených čísel nebo úplný seznam všech bodů dané kružnice — je zřejmé, že sestavování takového seznamu nikdy nedokončíte.

V případě, že množina nemůže být určena pomocí úplného seznamu, určuje se prostřednictvím nějaké charakteristické vlastnosti jejích prvků; tj. takové vlastnosti, kterou mají všechny prvky příslušné množiny, kdežto žádné jiné objekty již tuto vlastnost nemají. Například můžeme hovořit o množině všech přirozených čísel. Potom je nepochybné, že číslo 73 do této množiny patří, kdežto číslo $\frac{3}{4}$ nebo krokodýl do této množiny nepatří. Stejně tak číslo $\sqrt{2}$ a planeta Saturn nepatří do množiny všech racionálních čísel, kdežto číslo $\frac{7}{15}$ do této množiny patří.

V geometrii se často pracuje s množinami bodů, určenými těmi či jinými charakteristickými vlastnostmi. Obvykle, podle staré tradice, se množiny všech bodů, majících danou charakteristickou vlastnost, nazývají geometrickými místy bodů. Například se říká: „Geometrické místo bodů v rovině stejně vzdálených od daného bodu této roviny se nazývá kružnice“. To znamená, že množina všech bodů roviny stejně vzdálených od daného bodu této roviny je totožná s množinou bodů jisté kružnice.

Určování množin charakteristickými vlastnostmi může někdy vést ke komplikacím. Může se stát, že dvě různé charakteristické vlastnosti určují tutéž množinu, tj. že každý objekt mající jednu vlastnost má i druhou a naopak.

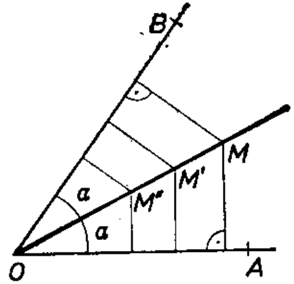
Například množina všech tlustokožců majících dva kly je totožná s množinou všech tlustokožců majících chobot, tj. s množinou všech slonů.

V geometrii vlastnost „bod $M$ ležící uvnitř ostrého úhlu $AOB$ je stejně vzdálen od ramen úhlu $AOB$“ určuje tutéž bodovou množinu jako vlastnost „ostrý úhel $AOM$ je stejně velký jako ostrý úhel $MOB$“ (viz obr. 1). V aritmetice vlastnost „celé číslo dělitelné dvěma“ určuje stejnou množinu jako vlastnost „poslední číslice zápisu čísla v desítkové soustavě je dělitelná dvěma“.*)

*) Přesněji vzato, máme na mysli, že číslo zapsané poslední číslicí je dělitelné dvěma. (Pozn. překl.)



Obr. 1



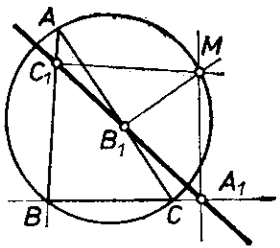

Někdy bývá obtížné dokázat ekvivalenci dvou charakteristických vlastností. Pokuste se například dokázat, že následující dvě vlastnosti určují tutéž množinu bodů, ležících v jedné rovině s trojúhelníkem $ABC$:

(a) Paty kolmic spuštěných z bodu $M$ na strany trojúhelníka $ABC$ leží na jedné přímce,

(b) bod $M$ leží na kružnici opsané trojúhelníku $ABC$ (obr. 2).

(Totožnost těchto množin je obsahem tzv. Simsonovy věty a věty k ní obrácené.)

Obr. 2



Mnoho matematických vět pojednává o totožnosti dvou množin, například o totožnosti množiny rovnostranných trojúhelníků a množiny rovnoúhlých trojúhelníků, o totožnosti tečnových čtyřúhelníků a množiny čtyřúhelníků se sobě rovnými součty protilehlých stran, atd.

V některých případech není problém totožnosti dvou množin, určených svými charakteristickými vlastnostmi, dosud rozřešen. Tak například není dosud známo, zda je množina $\{1093, 3511\}$ totožná s množinou prvočísel $n$, pro která je číslo $2^n - 2$ dělitelné číslem $n^2$.

Ještě větší potíže při určování množin charakteristickými vlastnostmi vznikají vlivem nedostatečné jasnosti a přesnosti obvyklých jazykových prostředků. Velké množství vzájemně blízkých objektů ztěžuje rozdělení objektů na objekty, které do dané množiny patří a objekty, které do ní nepatří. Hovoříme-li například o množině všech stromů na zeměkouli, musíme nejdříve rozhodnout, jedná-li se o všechny stromy, které na Zemi existovaly a budou existovat, či jedná-li se o stromy, které existovaly v průběhu nějakého daného časového období (např. od 1. května do 1. září 1965). Pak ale vzniká otázka, zda do uvažované množiny patří stromy, které byly v daném období pokáceny*). Dále kromě stromů a rostlin, které zřejmě za stromy nepovažujeme, existuje řada rostlin, u kterých tento rozdíl není tak patrný a je třeba rozhodnout, které z nich do množiny stromů patří a které nikoli.

Dokonce množina všech planet Slunce není určena zcela jednoznačně. Vedle velkých planet (Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun a Pluto) obíhá kolem Slunce přibližně 1 600 malých planet, tzv. asteroidů. Průměry některých těchto planetek (Cerera, Pallada, Júno)

*) Není ani zřejmé, zda do uvažované množiny patří stromy, které existovaly po celé dané období, ale zároveň existovaly také před ním nebo po něm nebo před ním i po něm. (Pozn. překl.)



dosahují stovek kilometrů, avšak existují také asteroidy, jejichž průměr nepřesahuje 1 km. Při neustálém zdokonalování pozorovacích metod budou astronomové objevovat stále menší a menší planetky a nakonec vznikne otázka, kde končí planety a kde začínají meteority a kosmický prach. Podobné těžkosti měl i jeden z Babelových hrdinů, ječící po přepadení bandou Beni Krika: „Kde začíná policie a kde končí Beňa Krik?" Jak známo, rozumní Oděsané mu odpovídali, že policie končí právě tam, kde začíná Beňa Krik*). Avšak věta „Planety končí právě tam, kde začínají meteority" sotva někoho uspokojí jako přesná definice množiny planet sluneční soustavy.

Ostatně rozdíl mezi planetami a meteority zajímá hlavně astronomy. Avšak rozdíl mezi domem a chatrčí je podstatný pro obyvatele jakéhokoli obydlí. Přitom si lze snadno představit, že tentýž objekt získá u jednoho člověka úctyhodný název „dům", kdežto u druhého pohrdavou přezdívku „chatrč". Pochopitelně i zařazení té či oné budovy do množiny paláců závisí podstatně na tom, kdo dostal za úkol sestavit soupis prvků této množiny.

Stejně tak i vyšetřování množiny všech básní publikovaných v Československu je komplikováno existencí mnoha přechodových forem mezi verši a prózou (veršovaná próza, nerýmované verše atd.) Nepříliš přesně je určena i množina osob, majících právo bezplatně cestovat vlakem v Československu. Mimo jiné do této množiny patří děti do pěti let. Může se však stát, že takový neplnoletý cestující dosáhne pěti let během cesty, a pak není jasné, zda do uvažované množiny patří (vypráví se, že jeden puntičkářský otec zatáhl za záchrannou brzdu právě v tom okamžiku, kdy jeho syn dosáhl věku pěti let, aby tak mohl přesně určit zbývající část cesty, za kterou již má zaplatit).

Jemné rozdíly mohou vznikat i v jednodušších situacích a jsou spjaty s nepřesností a nedokonalostí hovorového jazy-

*) Issak Babel, Jak to chodilo v Oděse. (Pozn. překl.)

ka. Vyšetřujeme například množinu A tvořenou prvními $n$ přirozenými čísly,

$$A = \{1, 2, \ldots, n\},$$

kde $n$ je počet písmen prvních dvou řádků základního textu „Evžena Oněgina"*). Takové zadání lze chápat dvojím způsobem. Na jedné straně lze číslo $n$ chápat jako celkový počet všech výskytů každého písmene v uvedených dvou řádkách (tj. celkový počet všech odpovídajících liter). Vypišme tyto dvě řádky a různé výskyty téhož písmene přitom očíslujme.

„M$_1$Ů$_1$J$_1$ S$_1$T$_1$R$_1$Ý$_1$C$_1$ B$_1$Y$_1$L$_1$ M$_2$U$_1$Ž$_1$E$_1$M$_3$ C$_2$T$_2$I$_1$, A$_1$ V$_1$ D$_1$O$_1$B$_2$Ě$_1$, K$_1$D$_2$Y$_2$ O$_2$P$_1$R$_2$A$_2$V$_2$D$_3$U$_2$ S$_2$E$_2$ R$_3$O$_3$Z$_1$N$_1$E$_3$-M$_4$O$_4$H$_1$,"

Dostaneme $n = 45$ a $A = \{1, 2, \ldots, 45\}$.

Na druhé staně lze číslo $n$ chápat jako celkový počet vzájemně různých písmen české abecedy, vyskytujících se v uvedených dvou řádkách, tj.:

M,Ů,J,S,T,R,Ý,C,B,Y,L,U,Ž,E,I,A,V,D,O,Ě,K,P,Z,N,H. .

Pak dostaneme $n = 25$ a $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$.

Uvedený příklad ukazuje, s jakou pečlivostí je třeba přistupovat k určování množin, chceme-li se vyhnout nejasnosti a víceznačnosti hovorového jazyka.

## Holit se či neholit?

Nesnáze s určením prvků množiny nejsou spjaty pouze s nepřesností hovorového jazyka. Někdy leží příčina mnohem hlouběji. Uvedeme příklad**). Množiny nejsou obvykle svými vlastními prvky (například množina všech přirozených čísel není přirozené číslo, množina všech trojúhelníků není trojúhelník atd.).

Existují však i takové množiny, které obsahují samy sebe jako jeden ze svých prvků. Například množina abstraktních pojmů je sama abstraktním pojmem (není-li pravda?). Jelikož takové množiny budeme vyšetřovat zřídka, nazveme je *extraordinárními* množinami a všechny ostatní množiny *ordinárními* množinami.

Utvořme nyní množinu A, jejímiž prvky jsou všechny ordinární množiny. Na první pohled se nezdá, že by na této definici bylo něco špatného; není vidět, proč by výraz „množina všech ordinárních množin" měl být horší než výraz „množina všech trojúhelníků". Ve skutečnosti však zde vzniká vážný logický spor. Pokusme se zjistit, zda množina A je ordinární či extraordinární. Je-li ordinární, pak je jedním ze svých prvků (neboť množina A vznikla shrnutím všech ordinárních množin). Pak ale je, podle definice extraordinarity, množinou extraordinární. Je-li množina A extraordinární, pak (podle definice extraordinarity) musí být svým vlastním prvkem, přitom ale všechny prvky množiny A jsou ordinární množiny; extraordinární množiny jsme mezi prvky množiny A nezahrnuli.

Dospěli jsme k logickému sporu — množina A nemůže být ani ordinární ani extraordinární. Takové logické spory vznikají ostatně i v mnohem jednodušších situacích. Například co má dělat vojín, který dostal rozkaz holit všechny ty vojáky své čety, kteří se neholí sami, a žádné jiné? Má se holit nebo nemá? Bude-li se holit, bude patřit mezi vojáky, kteří se holí sami a podle rozkazu takové vojáky holit nemá. Nebude-li se holit, bude patřit mezi vojáky, kteří se neholí sami, a tudíž podle rozkazu musí sám sebe holit.

Jsou známy i jiné příklady, kdy na první pohled zcela bezvadné zadání množiny určuje množinu špatně, či přes-

*) Podle překladu Josefa Hory vydaného r. 1945 v nakladatelství Melantrich. (Pozn. překl.)

**) Tzv. Russellův paradox (Pozn. překl.)

něji řečeno neurčuje ji vůbec. Vyšetřujme například*) množinu A všech racionálních čísel, které lze určit pomocí nejvýše dvou set českých slov (včetně slov „nula", „jeden", „dva", atd.). Jelikož je množina všech českých slov konečná (pro jednoduchost se omezíme pouze na slova z Trávníčkova „Slovníku jazyka českého" a jejich gramatické formy), je i množina všech takových čísel konečná. Nechť jsou to čísla $r_1, r_2, \ldots, r_N$. Definujeme nyní racionální číslo $r$ takto:

$$r = 0{,}n_1n_2\ldots n_N,$$

kde číslice $n_i$ (číslice stojící na $i$-tém desetinném místě čísla $r$) je rovna 1, je-li číslice stojící na $i$-tém desetinném místě čísla $r_i$ různá od jednotky, a rovna 2 v případě opačném.

Číslo $r$ není rovno číslu $r_1$, neboť se od něho liší na prvním desetinném místě, není rovno ani číslu $r_2$, neboť se od něho liší na druhém desetinném místě, atd. Číslo $r$ tudíž nepatří do množiny A. Přitom jsme při jeho definici nepřekročili dovolený počet dvou set slov.

S tímto paradoxem úzce souvisí další paradox**):

*Jaké je nejmenší přirozené číslo, které nelze určit pomocí věty, obsahující méně než sto českých slov?*

Takové číslo existuje, neboť počet slov českého jazyka je konečný, a existují tudíž přirozená čísla, která nelze definovat větou o méně než stu českých slovech. Pak ale mezi nimi existuje také číslo nejmenší.

Na druhé straně takové číslo neexistuje, neboť je určeno větou obsahující méně než sto slov — viz věta vytištěná výše kurzivou — a zároveň podle smyslu této věty nemůže být takovou větou určeno.

□ Uveďme ještě složitější příklad konečné množiny, ve kterém není možné rozhodnout, zda příslušná množina obsahuje daný prvek*). Rozdělíme všechna přídavná jména českého jazyka na dvě skupiny. Do jedné skupiny zařadíme všechna přídavná jména, která sama mají tutéž vlastnost, kterou vyjadřují, a do druhé skupiny všechna ostatní. Například přídavné jméno „české" zařadíme do první skupiny, neboť slovo „české" patří do slovní zásoby českého jazyka. Do téže skupiny zařadíme i přídavné jméno „pětislabičné" neboť slovo „pětislabičné" má právě pět slabik. Naproti tomu přídavné jméno „německé" zařadíme do druhé skupiny, neboť slovo „německé" patří do slovní zásoby českého jazyka a nikoli do slovní zásoby německého jazyka. Do druhé skupiny bude patřit i slovo „jednoslabičné", neboť toto slovo nemá jednu slabiku, ale pět slabik. Do téže skupiny patří i slovo „modré", neboť samo toto slovo není modré, ale pouze vyjadřuje jistou barvu.

Zdálo by se, že je vše v naprostém pořádku a že každé přídavné jméno patří právě do jedné skupiny. Avšak abychom rozlišili získané dvě skupiny, zavedeme ještě dvě přídavná jména. Přídavná jména první skupiny nazveme „autologickými" („auto" — ve složených cizích slovech značí: samo-, sebe-, „logos" znamená smysl, zákon) a přídavná jména druhé skupiny „heterologickými" („hetero" — ve složených cizích slovech značí: jino-, nestejno-, různo-). Slova „autologický" a „heterologický" jsou přídavná jména a jako taková je třeba je zařadit do našich dvou skupin. Při zařazení slova „autologický" nevznikají žádné nesnáze — je třeba je zařadit do první skupiny, a pak bude mít právě tu vlastnost, kterou vyjadřuje — vždyť do první skupiny patří právě autologická slova. Slovo „heterologický" však vyvolává tytéž obtíže, do kterých se dostal vojenský holič. Do skupiny autologických slov je nelze zařadit, neboť pak by slovo „heterologický" muselo mít vlastnost, kterou vyjadřuje, a tato vlastnost spočívá v tom, že nemá patřit do první skupiny, ale do druhé. Přitom je nelze za-

*) Tzv. Richardův-Berryův paradox (pozn. překl.).
**) Tzv. Berryův paradox (pozn. překl.).

*) Tzv. Grelingův-Nelsonův paradox (pozn. překl.).

řadit ani do druhé skupiny, neboť pak by nemělo mít vlastnost heterologičnosti, a být tudíž autologickým, neboť druhá skupina neobsahuje žádné autologické slovo. □

V teorii množin se nahromadilo mnoho takových příkladů, že zadání množiny obsahovalo vnitřní rozpory. Studium podmínek, při kterých k tomuto jevu může docházet, vedlo k hlubokým úvahám, které zcela změnily tvářnost logiky. Mnohých výsledků tohoto studia bylo později užito při budování teorie samočinných počítačů, teorie automatů a jinde. Toto studium však již patří do matematické logiky a my se jím dále nebudeme zabývat.

Dále budeme vyšetřovat pouze množiny, které jsou určeny přesně, bez rozporů a o jejichž složení nevznikají žádné pochybnosti (např. množina všech přirozených čísel, množina všech čtverců v rovině apod.).

## Prázdná množina

Název „množina" může vzbuzovat dojem, že každá množina musí obsahovat mnoho (řekněme aspoň dva) prvků. Avšak v matematice je třeba vyšetřovat i množiny obsahující pouze jeden prvek a dokonce i množinu neobsahující žádný prvek. Tato posledně jmenovaná množina se nazývá *prázdná množina* a značí se symbolem $\emptyset$.

Jako příklady prázdných množin nám mohou posloužit množina koní pasoucích se na Měsíci, množina desetinohých savců, množina tříletých šachových velmistrů, množina reálných kořenů rovnice $x^4 + 16 = 0$, množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{cases} 2x - 5y = 9, \\ 4x - 10y = 6. \end{cases}$$



Proč se zavádí pojem prázdná množina? Především si všimneme, že u množiny určené charakteristickou vlastností jejích prvků nemusí být předem známo, zda vůbec existuje aspoň jeden prvek s danou vlastností. Vyšetřujme např. množinu A tvořenou všemi čtyřúhelníky, které mají zároveň tyto dvě vlastnosti:

(a) všechny jejich úhly jsou pravé,
(b) jejich úhlopříčky mají různé délky.

Pro člověka, který nezná elementární geometrii, není v těchto dvou požadavcích nic rozporného. Avšak z věty o rovnosti délek úhlopříček v obdélníku plyne, že uvažovaná množina čtyřúhelníků je prázdná. Prázdná je také množina všech trojúhelníků, majících součet vnitřních úhlů různý od 180°. Rovněž množina všech kvadratických trojčlenů majících více než dva kořeny je prázdná. Ostatně mnohé matematické věty lze formulovat jako výroky o tom, že určitá množina je prázdná (pokuste se takto formulovat Pythagorovu větu).

Bylo by obtížné zjistit, zda množina všech reálných kořenů rovnice

$$x^4 - 7x^2 - 6x + 26 = 0$$

je prázdná nebo neprázdná, aniž bychom tuto rovnici řešili. Přepíšeme-li však tuto rovnici do tvaru

$$(x^2 - 4)^2 + (x - 3)^2 + 1 = 0,$$

bude zřejmé, že žádné reálné kořeny nemá.

Někdy bývá obtížné říci, zda ta či ona množina „nematematického" charakteru je prázdná nebo neprázdná. Jestliže zná někdo špatně zoologii, nebude moci odpovědět na otázku, zda množina žraloků žijících v Bajkalu nebo množina tygrů žijících na svobodě v Austrálii je prázdná.

O některých množinách není dodnes známo, zda jsou či nejsou prázdné. Tak např. není dosud známo, zda je prázdná množina všech přirozených čísel $n$, větších než dvě, pro která má rovnice

$$x^n + y^n = z^n$$

kladná celočíselná řešení (to je slavný Fermatův problém). Není také známo, je-li prázdná množina těch číslic, které se v desetinném rozvoji čísla $\pi$ vyskytují pouze na konečném počtu míst (přitom je již známo několik tisíc prvních desetinných míst čísla $\pi$).

Dodnes zůstává nevyjasněno, zda je prázdná množina všech celočíselných řešení rovnice

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30.$$

Přitom se připouští jak kladná tak i záporná celočíselná řešení (skutečnost, že tato rovnice nemá kladná celočíselná řešení, je zcela zřejmá).

Není rovněž známo, zda je prázdná množina všech živých plesiosaurů na zeměkouli; ukáže-li se totiž, že obluda z jezera Loch Ness skutečně existuje a že je to plesiosaurus, bude tato množina neprázdná.

## Teorie množin a školská matematika

Množiny se mohou skládat z nejrůznějších prvků — z ryb, domů, čtverců, čísel, bodů atd. Tím lze vysvětlit neobyčejný rozsah použitelnosti teorie množin v nejrůznějších oblastech lidského poznání (v matematice, mechanice, fyzice, biologii, lingvistice atd.). V matematice hrají zvláště důležitou úlohu množiny skládající se z „matematických" objektů — geometrických útvarů, čísel, algebraických výrazů, funkcí atd. S některými takovými množinami se pracuje ve školské matematice. Autoři středoškolských učebnic se obvykle



názvu „množina" vyhýbají (což snadno pochopíme, uvědomíme-li si, že i „nejmodernější" části školské matematiky vznikly koncem sedmnáctého století, kdežto teorie množin je dítětem století devatenáctého).

Ve středoškolské matematice se ve skutečnosti s množinami setkáváme na každém kroku. Zvlášť často se setkáváme s číselnými množinami, tj. s množinami, jejichž prvky jsou čísla. Příklady takových množin jsou:

a) množina všech přirozených čísel,
b) množina všech celých čísel,
c) množina všech racionálních čísel,
d) množina všech reálných čísel,
e) množina ploch pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do daného kruhu

atd.

□ S každou rovnicí jsou spjaty dvě množiny. Jednou z nich je množina čísel, pro která mají smysl všechny výrazy vyskytující se v uvažované rovnici. Tato číselná množina se někdy nazývá *oborem přípustných hodnot* neznámé. Například pro rovnici

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{x - 1}{x^2 - 9} = -\frac{1}{3}$$

je oborem přípustných hodnot neznámé $x$ množina všech takových čísel $x$, pro která platí $x^2 - 4 \neq 0$ a $x^2 - 9 \neq 0$, tj. množina všech čísel kromě čísel patřících do množiny $\{2, -2, 3, -3\}$. Pro rovnici

$$\sqrt{-x^2 + x + 12} + x = 2 + \sqrt{10}$$

se obor přípustných hodnot skládá z čísel $x$, pro která platí

$$-x^2 + x + 12 \geqq 0.$$

Tato nerovnost je splněna, jestliže platí $-3 \leqq x \leqq 4$.

Druhou množinou, spjatou s danou rovnicí nebo nerovností, je množina všech jejích řešení. Například množina všech kořenů rovnice $x^2 - 7x + 12 = 0$ je množina $\{3, 4\}$, skládající se ze dvou prvků a množina všech řešení rovnice $\sin \pi x = 0$ se skládá z nekonečného počtu čísel, a to ze všech celých čísel. Je-li dána rovnice, je množina $\mathsf{M}$ všech jejích řešení určena charakteristickou vlastností svých prvků — tím, že čísla $x$, patřící do $\mathsf{M}$, jsou právě ta čísla, která vyhovují dané rovnici. Po vyřešení rovnice můžeme množinu $\mathsf{M}$ určit seznamem všech jejích prvků (je-li konečná) nebo jinou jednodušší charakteristickou vlastností (není-li konečná), například vlastností celočíselnosti.

Zatímco množina všech reálných řešení jisté rovnice je obvykle tvořena několika čísly nebo (pro většinu trigonometrických rovnic) členy několika posloupností čísel, množina všech řešení nějaké nerovnosti zpravidla zcela vyplňuje nějaké úseky množiny reálných čísel. Například nerovnost $4 - x^2 \leqq 0$ platí pro každé $x$ vyhovující nerovnostem $-2 \leqq x \leqq 2$, a nerovnost

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) \geqq 0$$

platí pro všechna $x$ vyhovující nerovnostem $-2 \leqq x \leqq 2$ nebo nerovnostem $3 \leqq x \leqq 5$. Vyšetřujeme-li místo neostrých nerovností nerovnosti ostré, pak místo uzavřených intervalů dostáváme obvykle intervaly otevřené. Například množina všech řešení nerovnosti

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) > 0$$

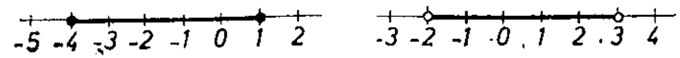
se skládá z otevřených intervalů $-2 < x < 2$ a $3 < x < 5$. Čísla $-2$, $2$, $3$, $5$ uvažované nerovnosti nevyhovují. Množiny všech řešení určité nerovnosti mohou být i komplikovanější. Například množina všech řešení nerovnosti

$$\frac{x - 1}{4 - x} \geqq 0$$



je množina všech těch čísel $x$, pro která platí $1 \leqq x < 4$. V tomto případě číslo 1 do množiny řešení patří a číslo 4 nepatří.

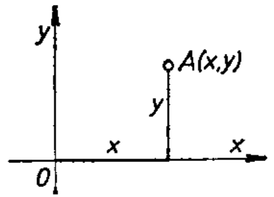
Jelikož každé reálné číslo lze zobrazit bodem číselné osy, je možné číselné množiny znázornit množinami bodů na přímce. Na obr. 3a je zobrazena množina všech čísel $x$, pro která platí $-4 \leqq x \leqq 1$, a na obr. 3b množina všech těch čísel $x$, pro která platí $-2 < x < 3$.



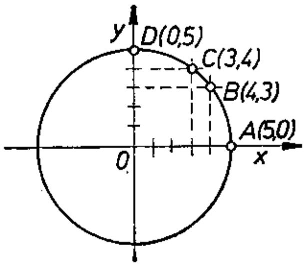

Obr. 3a Obr. 3b

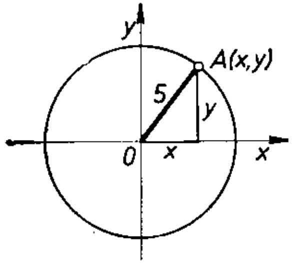
Zvlášť vhodné je geometrické znázornění množin, jejichž prvky jsou uspořádané dvojice nebo trojice čísel. Například rovnice $x^2 + y^2 = 25$ určuje množinu $\mathsf{M}$ všech uspořádaných dvojic čísel $(x, y)$, po jejichž dosazení se rovnice změní v rovnost. Dvojice čísel $(-5, 0)$, $(3, -4)$ patří do množiny $\mathsf{M}$, neboť $(-5)^2 + 0^2 = 25$, $3^3 + (-4)^2 = 25$, dvojice čísel $(1, 6)$ do množiny $\mathsf{M}$ nepatří, neboť $1^2 + 6^2 \neq 25$. Avšak takový popis množiny $\mathsf{M}$ není příliš názorný. Abychom popsali tuto množinu názorněji, užijeme metody souřadnic. Zvolíme v rovině soustavu kartézských souřadnic (to je soustava souřadnic, se kterou se učí žáci pracovat ve škole). Pak každé uspořádané dvojici čísel $(x, y)$ odpovídá v rovině bod $A$ o souřadnicích $x$ a $y$ a každému bodu roviny uspořádaná dvojice jeho souřadnic (obr. 4).

Znázorníme-li v rovině všechny uspořádané dvojice čísel $(x, y)$, pro které $x^2 + y^2 = 25$, pak snadno nahlédneme, že zaplňují jistou křivku, a to kružnici o poloměru 5 se středem v počátku souřadnic (obr. 5). Vzpomeneme-li si na Pythagorovu větu, stane se okamžitě zřejmým, že množina




Obr. 4




Obr. 5 Obr. 6

všech bodů $A(x, y)$, pro které platí $x^2 + y^2 = 25$, je totožná s množinou bodů zmíněné kružnice (obr. 6).

Nerovnosti, obsahující dvě neznámé, neurčují obvykle křivky, ale celé oblasti roviny. Například nerovnost $x^2 + y^2 \leqq 25$ určuje ve zřejmém smyslu množinu všech bodů roviny, jejichž vzdálenost od počátku souřadnic nepřevyšuje 5, tj. množinu všech bodů kruhu o poloměru 5 se středem v počátku souřadnic. Přitom body kružnice do uvedené množiny také patří. Nerovnost $x^2 + y^2 < 25$ zadává týž kruh, avšak bez hraniční kružnice. □

V geometrii se setkáváme s dvěma druhy množin. Jednak ve větách z geometrie se obvykle hovoří o vlastnostech určité množiny geometrických útvarů. Například věta tvrdí-



cí, že úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí, se týká množiny všech rovnoběžníků. Jednak samy geometrické útvary jsou množinami — množinami bodů patřících do daného útvaru. Hovoříme proto o množině všech bodů daného kruhu, o množině všech bodů daného kužele apod.

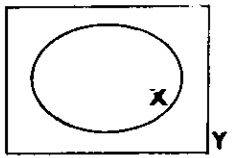
V algebře se setkáváme s takovými množinami, jako jsou množina všech mnohočlenů dvou proměnných, množina všech kvadratických rovnic, množina všech algebraických rovnic apod. Stručně řečeno, téměř každá část učiva ze školské matematiky souvisí s teorií množin.

## Podmnožiny

Zavedení pojmu množiny do matematických úvah se ukázalo velmi užitečným. Díky tomu, že prvky množin mohou být předměty nejrůznějšího charakteru, je možné některá tvrzení týkající se množin interpretovat například nejen jako tvrzení o bodech geometrických útvarů, ale také jako tvrzení o přirozených číslech nebo jako tvrzení o živočiších nebo rostlinách či jako tvrzení o atomech nebo molekulách. Pojmy a tvrzení teorie množin se vyznačují značnou obecností a o některých z nich nyní pojednáme.

Nejprve se seznámíme s pojmem *podmnožiny*. Setkáváme se s ním například tehdy, když nějakou množinu nelze studovat samostatně, ale když je zapotřebí studovat ji jako část jiné, „větší" množiny. Je-li každý prvek z množiny $\mathsf{B}$ zároveň také prvkem množiny $\mathsf{A}$, říkáme, že množina $\mathsf{B}$ je podmnožinou množiny $\mathsf{A}$ a píšeme $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ nebo $\mathsf{A} \supset \mathsf{B}$.

Například množina všech žáků nějaké třídy určité střední školy je podmnožinou množiny všech žáků uvažované školy. A množina všech žáků této školy je pak podmnožinou množiny všech žáků vůbec.



Obr. 7

Množina všech lišek je podmnožinou množiny všech šelem, množina všech šelem je podmnožinou množiny všech savců a množina všech savců je podmnožinou množiny všech obratlovců.

Je-li geometrický útvar X částí geometrického útvaru Y, pak množina bodů útvaru X je podmnožinou množiny bodů útvaru Y (obr. 7).

V geometrii často pracujeme s podmnožinami některých množin geometrických útvarů. Uveďme například tyto množiny rovinných obrazců:

a) Množina A všech čtyřúhelníků.
b) Množina B všech lichoběžníků.
c) Množina C všech rovnoběžníků.
d) Množina D všech obdélníků.
e) Množina E všech čtverců.

V tomto výčtu je obrazec z každé skupiny zvláštním případem obrazců předcházející skupiny (lichoběžník je zvláštní případ čtyřúhelníku, rovnoběžník je zvláštní případ lichoběžníku atd.). To však znamená, že každá množina je podmnožinou množiny předcházející:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Stejně tak i každá množina z následujícího výčtu je podmnožinou množiny předcházející:

a) množina všech komplexních čísel,
b) množina všech reálných čísel,



c) množina všech racionálních čísel,
d) množina všech celých čísel,
e) množina všech přirozených čísel.

Často se k určení podmnožiny dané množiny užívá přidání další doplňující podmínky (k charakteristické vlastnosti prvků dané množiny). Například množinu všech přirozených čísel lze z množiny všech celých čísel získat přidáním podmínky $n > 0$; množinu všech rovnostranných trojúhelníků z množiny všech trojúhelníků přidáním podmínky $a = b = c$, vyjadřující rovnost délek stran.

Již dříve jsme hovořili o tom, že mnohé věty lze formulovat jako tvrzení o totožnosti dvou množin. Rovněž se setkáváme s větami, ve kterých se hovoří o tom, že jedna množina je částí druhé množiny. Například ve větě „Úhlopříčky čtyřúhelníku o stejných stranách (kosočtverce) jsou navzájem kolmé" se hovoří o dvou množinách: o množině A všech kosočtverců a o množině B všech čtyřúhelníků s navzájem kolmými úhlopříčkami. Věta pak spočívá v tvrzení, že platí $A \subset B$.

Je-li množina A podmnožinou množiny B, $A \subset B$, pak příslušnost k množině A je postačující podmínkou příslušnosti k množině B a příslušnost k množině B je nutnou podmínkou příslušnosti k množině A. Označme například množinu všech sudých kladných čísel písmenem B a množinu všech přirozených čísel, jejichž poslední číslice při zápisu v desítkové soustavě je čtyřka, písmenem A. Je zřejmé, že $A \subset B$. Tudíž k tomu, aby přirozené číslo $n$ bylo sudé, stačí, aby jeho poslední číslice při zápisu v desítkové soustavě byla čtyřka. Na druhé straně k tomu, aby poslední číslice přirozeného čísla byla čtyřka, je nutné, aby toto číslo bylo sudé.

V případě, že množiny A a B jsou totožné, je příslušnost k množině A nutnou i postačující podmínkou příslušnosti k množině B. Lze tedy věty o tom, že nějaká podmínka je nutná i postačující, chápat jako věty o totožnosti dvou množin.

Tak například k tomu, aby celé číslo $n$ bylo dělitelné deseti, je nutné a stačí, aby poslední číslice jeho zápisu v desítkové soustavě byla 0. Jinými slovy množina A všech celočíselných násobků deseti je totožná s množinou B všech celých čísel, jejichž poslední číslice je 0.

Podobně i množina všech kosočtverců je totožná s množinou všech rovnoběžníků, majících navzájem kolmé úhlopříčky. Tudíž k tomu, aby rovnoběžník byl kosočtvercem, je nutné a stačí, aby jeho úhlopříčky byly navzájem kolmé.

## ■ Teorie množin a kombinatorika

Spočítejme, kolik podmnožin má konečná množina M (množina M i prázdná množina $\emptyset$ jsou také podmnožiny množiny M). Množina skládající se z jediného prvku $a$ má dvě podmnožiny: $\emptyset$ a $\{a\}$. Množina, tvořená dvěma prvky $a$, $b$, má již čtyři podmnožiny: tytéž množiny $\emptyset$ a $\{a\}$ a ještě množiny $\{b\}$ a $\{a, b\}$. Přidáme-li k množině $\{a, b\}$ třetí prvek $c$, pak, kromě již uvedených čtyř podmnožin $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, vzniknou — přidáním prvku $c$ ke každé z nich — ještě čtyři podmnožiny $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. Přidání nového prvku zřejmě zdvojnásobuje počet podmnožin. Množina o $n$ prvcích má tudíž $2^n$ podmnožin.

Podmnožiny konečné množiny lze rozdělit do skupin podle počtu jejich prvků. Je-li množina tvořena $n$ prvky, pak její podmnožiny sestávající z $k$ prvků se nazývají kombinace $k$-té třídy z $n$ prvků. Jejich počet se označuje symbolem*) $C_n^k$.

Jelikož počet všech podmnožin je $2^n$, platí rovnost

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

*) Místo symbolu $C_n^k$, běžného ve světové literatuře, se u nás často užívá symbolu $\binom{n}{k}$, který čteme „$n$ nad $k$". (Pozn. překl.).



Mezi čísly $C_n^k$ existuje nemálo zajímavých vztahů, z nichž mnohé lze odvodit vyšetřováním množin, vyznačujících se určitými vlastnostmi. Dokažme například, že za předpokladu $1 \leqq k < n$ platí

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \qquad (1)$$

Za tímto účelem mezi všemi kombinacemi $k$-té třídy z $n$ prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vybereme ty kombinace, které obsahují prvek $a_n$. Na ostatních $k - 1$ místech každé kombinace může stát kterýkoli z $n - 1$ prvků $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Počet všech takových kombinací je proto roven $C_{n-1}^{k-1}$. Nyní určíme, kolik kombinací $k$-té třídy z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neobsahuje prvek $a_n$. Tyto kombinace jsou tvořeny prvky $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Jelikož jde o kombinace $k$-té třídy, je jejich počet roven $C_{n-1}^k$. Protože však každá z $C_n^k$ kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ buď prvek $a_n$ obsahuje anebo neobsahuje, musí platit rovnost (1).

Všimneme si ještě, že $C_n^0 = 1$ pro každé $n \geqq 0$, neboť každá množina má pouze jednu prázdnou podmnožinu. Stejně zřejmé je, že $C_n^n = 1$.

Užitím uvedených poznámek můžeme postupně určit čísla $C_n^k$; nejprve pro $n = 0$, pak pro $n = 1$, pak pro $n = 2$ atd. Čísla $C_n^k$ se obvykle zapisují do tabulky trojúhelníkového tvaru (tzv. Pascalův trojúhelník):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Na stranách Pascalova trojúhelníku jsou jednotky, neboť $C_n^0 = C_n^n = 1$. Ostatní čísla určíme na základě vztahu (1), podle něhož je každé číslo rovno součtu čísel v předcházející řádce nalevo a napravo od uvažovaného čísla. Dostaneme tak tuto tabulku:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & . & . & . & . & . & . & . & & &
\end{array}
$$

Existuje také vzorec pro přímý výpočet čísel $C_n^k$:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

kde $k! = 1.2.\ldots.k$ a $0! = 1$. Necháváme na čtenáři, aby ověřil, že čísla určená podle tohoto vzorce vyhovují vztahu (1) a rovnostem $C_n^0 = C_n^n = 1$.

## Univerzální množina

Velmi zřídka se stává, že v jedné a téže úvaze se hovoří jak o množině všech komplexních čísel, tak i o množině všech velryb v oceáně (i když ovšem není vyloučeno, že ke studiu pohybu velryby ve vodě bude jednou užito metod teorie funkcí komplexní proměnné). Obvykle jsou všechny množiny, se kterými v dané úvaze pracujeme, podmnožinami určité, pevně zvolené množiny I. Množinu I pak v takovém případě nazýváme *univerzální množinou.*

Například všechny číselné množiny v určité úvaze mohou být podmnožinami množiny všech reálných čísel, množina bodů libovolného geometrického útvaru je podmnožinou množiny všech bodů příslušného geometrického prostoru,



množina stran rovinného mnohoúhelníku je podmnožinou množiny všech úseček v rovině atd.

## Průnik množin

Slavný detektiv Sherlock Holmes potřeboval v září roku 1887 zjistit jméno jedné plachetnice*). Nevěděl o ní příliš mnoho: v lednu nebo v únoru roku 1883 byla v Pondicherry, v lednu roku 1885 v Dundee a nyní kotvila v londýnském přístavu. Přesto se mu jméno plachetnice podařilo zjistit. Stačilo k tomu porovnat tři množiny: množinu plachetnic nalézajících se v uvedené době v Pondicherry, množinu plachetnic nacházejících se v lednu 1885 v Dundee a množinu plachetnic kotvících nyní v londýnském přístavu. Ukázalo se, že pouze jedna loď patřila do všech tří množin. Byla to americká bárka „Lone Star". A jelikož Sherlock Holmes kromě toho soudil, že zločinci jsou amerického původu, kruh se uzavřel a zločin byl odhalen.

Zjišťování společných prvků množin není pouze údělem detektivů. Vědec – bakteriolog, hledající původce nemoci, zjistí u jednoho pacienta trpícího touto chorobou jisté druhy mikrobů, u jiného pacienta jiné druhy mikrobů a u dalšího ještě jiné. Množiny druhů mikrobů zjištěných u různých pacientů jsou různé, avšak obvykle lze výskyt dvou či tří druhů mikrobů pozorovat u všech pacientů trpících příslušnou chorobou. Na mikroby tohoto druhu padá podezření, že jsou původci choroby. Další zkoumání pak ukáže, kdo je skutečným původcem choroby.

---

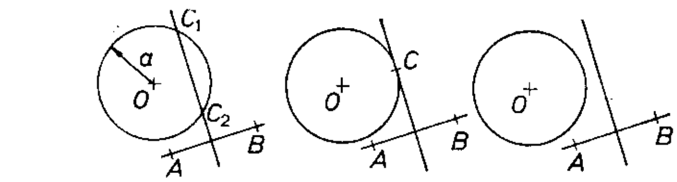
*) Podrobnosti může čtenář zjistit v povídce Conana Doyla: The Five Orange Pips.

Množina tvořená společnými prvky několika množin A, B, C,... se nazývá *průnikem* těchto množin. Průnik dvou množin A a B se značí $A \cap B$. Jinými slovy: průnikem několika množin A, B, C, ... se nazývá nová množina obsahující všechny ty prvky (a žádné jiné), které patří do každé z množin A, B, C, ... Jsou-li např. žáci dané školy členy čtyř sportovních oddílů: oddílu kopané, plavání, šachu a boxu, tvoří průnik množin členů jednotlivých oddílů všestranní sportovci, kteří umějí proměnit penaltu, přeplavat širokou řeku, ohrozit protivníkova krále a ubránit se přepadení chuligány.

Pochopitelně také v matematice má pojem průniku množin široké použití. Jedním ze základních způsobů řešení konstruktivních úloh je *metoda geometrických míst.* Je-li třeba sestrojit bod vyhovující nějakým dvěma podmínkám, pak se od splnění jedné podmínky upustí a konstruují se nejprve množiny bodů vyhovujících pouze jedné podmínce. Množina všech bodů vyhovujících jedné podmínce vyplní např. nějakou křivku (geometrické místo bodů). Podobně nechť také množina všech bodů, vyhovujících druhé podmínce, vyplní nějakou křivku. Hledaný bod je pak v průniku (je průsečíkem) těchto dvou křivek (geometrických míst). Může se samozřejmě ukázat, že se tyto dvě křivky neprotínají v jediném bodě, ale ve více bodech. Pak má úloha několik řešení. Jestliže se křivky neprotínají, nemá úloha žádné řešení. Nechť máme například najít bod $C$ mající vzdálenost $a$ od bodu $O$ a zároveň stejně vzdálený od bodů $A$ a $B$. Hledaný bod musí ležet na kružnici o poloměru $a$ se středem v bodě $O$ a na kolmici k úsečce $AB$, vedené středem této úsečky. K určení bodů, vyhovujících daným podmínkám, tudíž stačí určit průsečíky přímky a kružnice (průsečíky mohou být dva nebo jeden nebo žádný, viz obr. 8).

Někdy je třeba tvořit průniky množin geometrických nebo číselných množin. Například množina všech čtverců e průnikem množiny všech obdélníků a množiny všech






Obr. 8

kosočtverců. Množina všech rovnostranných trojúhelníků je průnikem množiny všech trojúhelníků a množiny všech pravidelných mnohoúhelníků. Průnikem množiny všech přirozených čísel dělitelných dvěma a množiny všech přirozených čísel dělitelných třemi je množina všech přirozených čísel dělitelných šesti.

Řešení soustav rovnic a nerovnic vede ve skutečnosti k určování průniků množin (je možné také říci obráceně: průniky některých množin se hledají řešením soustav rovnic nebo nerovnic). Nechť například máme řešit soustavu rovnic

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases} \tag{1}$$

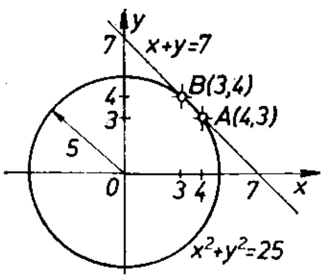
Z hlediska algebry máme před sebou úlohu najít všechny uspořádané dvojice čísel $(x, y)$, po jejichž dosazení do obou rovnic soustavy dostaneme rovnosti. Jednotlivé rovnice soustavy však můžeme vyšetřovat samostatně. Označme písmenem M množinu všech uspořádaných dvojic $(x, y)$ čísel $x, y$, vyhovujících první z našich rovnic, a písmenem N množinu všech dvojic $(x, y)$, vyhovujících druhé rovnici. Řešením soustavy budou pak všechny dvojice, patřící jak do množiny M, tak i do množiny N. Jinými slovy, množina všech řešení soustavy (1) je průnikem množin M a N.

Z této poznámky je zřejmý princip grafického řešení soustav: konstruují se křivky (množiny bodů) určené každou rovnicí soustavy a určí se jejich průnik. Například již víme, že body $(x, y)$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $x^2 + y^2 = 25$, leží na kružnici o poloměru 5 se středem v počátku souřadnic. Dále víme, že rovnice $x + y = 7$ je rovnice přímky vytínající na obou souřadnicových osách úseky délky 7. Po narýsování této kružnice a přímky se ukáže, že se protínají ve dvou bodech: $A(4, 3)$ a $B(3, 4)$. Naše soustava má tudíž dvě řešení: $x_1 = 3, y_1 = 4$ a $x_2 = 4$, $y_2 = 3$ (obr. 9).

Vyšetřujeme nyní soustavu nerovnic

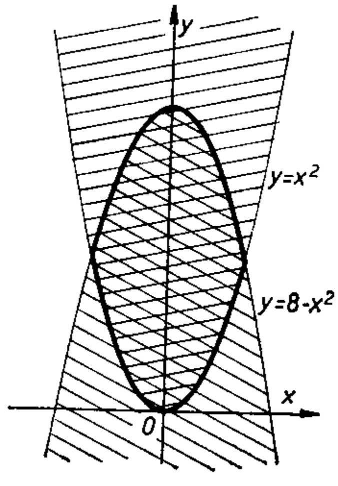
$$\begin{cases} y \geqq x^2, \\ y \leqq 8 - x^2. \end{cases} \tag{2}$$

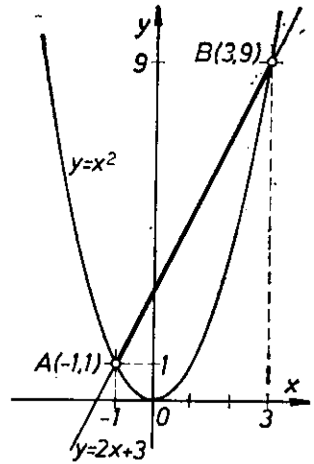
Množina M všech řešení nerovnice $y \geqq x^2$ se skládá z bodů $(x, y)$, ležících na parabole popsané rovnicí $y = x^2$ a „nad" touto parabolou. Množina N všech řešení nerovnice $y \leqq 8 - x^2$ se skládá z bodů roviny, ležících na parabole o rovnici $y = 8 - x^2$ a „pod" touto parabolou (obr. 10). Na obr. 10 je množina M šrafována stoupajícími čarami a množina N klesajícími čarami. Množina všech řešení soustavy (2) je průnikem množin M a N, $M \cap N = P$. Na obrázku




Obr. 9






Obr. 10 Obr. 11

10 je tato množina šrafována dvojitě. Přitom body hranice množiny P do této množiny patří.

Stejným způsobem zjistíme, že řešení soustavy

$$\begin{cases} y > x^2, \\ y = 2x + 3 \end{cases} \tag{3}$$

lze znázornit tou částí přímky o rovnici $y = 2x + 3$, která leží „nad" parabolou popsanou rovnicí $y = x^2$. Přímka protíná parabolu v bodech $A(-1, 1)$ a $B(3, 9)$ a „nad" parabolou leží část přímky mezi body $A$ a $B$ (body $A$ a $B$ do množiny řešení soustavy nepatří, viz obr. 11).

Vyšetřováním průniku množin nyní ukážeme, že iracionální rovnice

$$\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{8x - x^2 - 15} = 7$$

nemá řešení. Bylo by možné začít tuto rovnici řešit — uvést na společnou odmocninu a umocnit obě části na druhou a nakonec po prověření získaných kořenů se přesvědčit, že rovnice nemá řešení. Budeme však postupovat jinak. Nejprve zjistíme, pro která reálná čísla $x$ mají odmocniny smysl. Odmocnina $\sqrt{2 + x - x^2}$ má smysl, jestliže $2 + x - x^2 \geqq 0$. Řešením této nerovnosti dostaneme $-1 \leqq x \leqq 2$. Stejným způsobem zjistíme, že odmocnina $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ má smysl pouze tehdy, platí-li $3 \leqq x \leqq 5$. Avšak intervaly $-1 \leqq x \leqq 2$ a $3 \leqq x \leqq 5$ nemají žádné body společné — jejich průnik je prázdný. Tudíž žádné číslo $x$ nemůže vyšetřované rovnici vyhovovat.

## Sjednocení množin

Snad ještě častěji než tvořit průnik množin je třeba množiny sjednocovat. Již prvňáčci, sčítající tři kuličky a dvě kuličky, sjednocují dvě množiny. Sčítání přirozených čísel je také spjato s určováním počtu prvků sjednocení dvou množin. Zde však nesmíme zapomenout na jisté jemné rozdíly. Mějme dvě slitiny. Jedna slitina obsahuje železo, uhlík, vanad a mangan, druhá slitina obsahuje železo, uhlík, chrom a nikl. Každá slitina obsahuje čtyři chemické prvky. Jestliže je však slijeme dohromady, bude nová slitina obsahovat pouze šest prvků: železo, uhlík, vanad, mangan, chrom a nikl. Je to způsobeno tím, že železo a uhlík byly obsaženy v obou slitinách, tj. sjednocované množiny prvků měly neprázdný průnik. Je proto správnější říci, že sčítání přirozených čísel je spjato se sjednocováním množin majících prázdný průnik.

Není-li průnik množin prázdný, pak při jejich sjednocování se společné prvky „počítají pouze jednou". Přesněji:



*sjednocením* několika množin A, B,... se nazývá množina, která se skládá ze všech těch prvků (a žádných jiných), které patří alespoň do jedné ze sjednocovaných množin. Sjednocení množin A a B se značí symbolem $A \cup B$. Na obr. 12 je znázorněno sjednocení množiny A bodů kruhu $G_1$ a množiny B bodů kruhu $G_2$.

Patří-li některé prvky nejen do jediné, ale do několika ze sjednocovaných množin, pak ve sjednocení vstupují pouze jednou.

Pro konečné množiny může být proto počet prvků sjednocení menší než součet počtů prvků sjednocovaných množin. Nechť například jedna množina je tvořena různými písmeny české abecedy, vyskytujícími se v první řádce výše zmíněného (str. 16) překladu Evžena Oněgina a nechť se druhá množina skládá z různých písmen vyskytujících se ve druhé řádce tohoto překladu. První množina je tvořena dvaceti písmeny:

M,Ů,J,S,T,R,Ý,C,B,Y,L,U,Ž,E,I,A,V,D,O,Ě.

Druhá množina obsahuje 15 písmen:

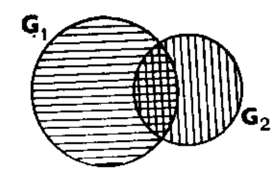
K,D,Y,O,P,R,A,V,U,S,E,Z,N,M,H.

Sjednocením těchto dvou množin je množina těchto 25ti písmen:

M,Ů,J,S,T,R,Ý,C,B,Y,L,U,Ž,E,I,A,V,D,O,Ě,K,P,Z,N,H.

Písmena D,Y,O,R,A,V,U,S,E,M, vyskytující se v průniku našich množin, vystupují ve sjednocení pouze jednou, a proto

Obr. 12



jsme dostali pouze 25 písmen a nikoliv $20 + 15 = 35$ písmen.

Jiným příkladem, ve kterém mají sjednocované množiny společné prvky, může být i množina všech žáků ve třídě, chápeme-li ji jako sjednocení těchto tří množin:

a) množiny všech prospívajících žáků,
b) množiny všech dívek,
c) množiny všech neprospívajících žáků.

Je zřejmé, že každý žák této třídy patří alespoň do jedné z uvedených množin. Uvedené množiny však mohou mít společné prvky: prospívající dívky patří do první i do druhé množiny.

Někdy tvoříme sjednocení nekonečně mnoha množin. Označme např. symbolem $A_n$ množinu všech kladných zlomků se jmenovatelem $n$:

$$A_1 = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots, \frac{m}{1}, \ldots\right\},$$

$$A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{m}{2}, \ldots\right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{m}{n}, \ldots\right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Sjednocením všech množin $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ je množina všech kladných zlomků, tj. zlomků tvaru $\frac{m}{n}$, kde $m$ a $n$ jsou přirozená čísla.

Označme symbolem $A_3$ množinu všech pravidelných trojúhelníků, symbolem $A_4$ množinu všech pravidelných čtyřúhelníků, symbolem $A_5$ množinu všech pravidelných pětiúhelníků atd. Sjednocením všech těchto množin je množina $A$ všech pravidelných mnohoúhelníků.



☐ Všimněme si nyní sjednocování množin v algebře.

Známý americký spisovatel Edgar Allan Poe v jedné své povídce píše:

„Nikdy jsem se nesetkal s matematikem, který by za Symbol Víry nepovažoval to, že $x^2 + px + q$ je absolutně a bezpodmínečně rovno nule. Přejete-li si, zkuste říci některému z těchto džentlmenů, že podle vašeho názoru mohou existovat případy, kdy $x^2 + px + q$ není bezvýhradně rovno nule. Vtlučete-li mu do hlavy, co máte na mysli, hleďte se co nejrychleji dostat z jeho dosahu, neboť se vám nepochybně pokusí namlátit".

Čtenář ovšem chápe, že výraz $x^2 + px + q$ může být roven nule pro některá čísla $x$ a různý od nuly pro jiná čísla $x$. Nás však zajímá jiná otázka: proč se matematici tak často snaží zapsat rovnici tak, aby jedna její část byla rovna nule? Aby se to stalo jasnějším, vyšetřujme rovnici

$$x^2(x^2 - 7) = -12.$$

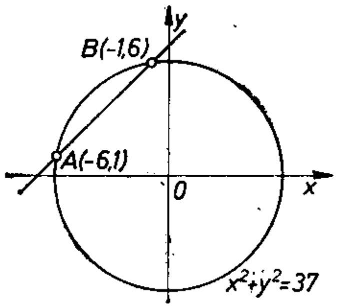
Z toho, že součin hodnot dvou výrazů je roven $-12$, je obtížné odvodit něco o hodnotách každého z obou výrazů. Řešit rovnici v tomto tvaru je proto dosti obtížné. Jestliže však převedeme $-12$ na levou stranu rovnice a přepíšeme získaný výraz ve tvaru součinu, dostaneme rovnici

$$(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0. \tag{1}$$

Nyní je možné použít známé úvahy:

Aby byl součin roven nule, musí být alespoň jeden z činitelů roven nule.

Řešení rovnice (1) vede tedy k řešení dvou rovnic: $x^2 - 4 = 0$ a $x^2 - 3 = 0$. Avšak na rozdíl od řešení soustavy rovnic nehledají se zde pouze čísla, která vyhovují zároveň oběma rovnicím, ale čísla, která vyhovují *alespoň jedné* z uvedených rovnic. Jinými slovy, nehledáme nyní průnik, ale sjednocení množin kořenů těchto rovnic. Řešením první rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,




Obr. 13

řešením druhé rovnice nalezneme ještě další dva kořeny $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$. Sjednocením množin $\{2, -2\}$ a $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ dostaneme množinu všech kořenů $\{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ dané rovnice.

Analogicky rovnice

$$(x^2 + y^2 - 37)(y - x - 7) = 0$$

určuje ve zřejmém smyslu množinu tvořenou kružnicí o rovnici $x^2 + y^2 - 37 = 0$ a přímkou o rovnici $y - x - 7 = 0$ (obr. 13). Kdyby byla místo této rovnice zadána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 37 &= 0, \\ y - x - 7 &= 0, \end{aligned}$$

neurčovala by celý útvar znázorněný na obrázku 13, ale pouze dva body $A(-6, 1)$ a $B(-1, 6)$, ve kterých přímka protíná kružnici. □



## Rozklady množin

Rozkladu na podmnožiny se často užívá při klasifikaci objektů. Například při sestavování věcného katalogu se dělí knihy na krásnou literaturu, společenskovědní literaturu, přírodovědní literaturu atd.

V biologii se množina všech živočichů neboli říše dělí na podříše, podříše se dělí na kmeny, kmeny na podkmeny a podkmeny na třídy.

Množinu lze ovšem rozložit různými způsoby. Kromě věcného katalogu se sestavuje také abecední katalog knih. Při jeho sestavování se množina knih nejdříve rozkládá na podmnožinu, obsahující knihy, jejichž autor má příjmení začínající písmenem A, na podmnožinu knih, jejichž autor začíná písmenem B atd. Potom se každá z takto utvořených podmnožin rozkládá na podmnožiny podle druhého písmene autorova příjmení atd.

□ Při rozkládání množin na podmnožiny se často využívá pojmu *ekvivalence* prvků. Nejprve se stanoví význam výroku „prvek $x$ je ekvivalentní prvku $y$" a ekvivalentní prvky se pak shrnou do jedné podmnožiny (často se říká do jedné třídy).

Aby tento způsob vedl k rozkladu množiny, musí mít pojem ekvivalence jisté vlastnosti. Kdybychom např. nazvali dva lidi ekvivalentními, jestliže se znají, pak bychom uvedeným způsobem k rozkladu nedospěli. Mohlo by se totiž stát, že člověk X se zná s člověkem Y, že člověk Y se zná s člověkem Z a přitom lidé X a Z se neznají. V tomto případě máme do jedné množiny zařadit lidi X a Y, neboť se znají. Zároveň do téže množiny máme zařadit i člověka Z, neboť Y a Z se znají. Potom se však budou v jedné množině nacházet lidé X a Z, kteří se neznají (kteří nejsou ekvivalentní).

K tomu, aby uvedený způsob vedl k rozkladu množiny, je nutné a zároveň stačí, aby pojem ekvivalence vyhovoval těmto třem podmínkám:

a) *každý prvek je ekvivalentní sám sobě;*
b) *je-li prvek x ekvivalentní prvku y, pak prvek y je ekvivalentní prvku x;*
c) *je-li prvek x ekvivalentní prvku y a je-li zároveň prvek y ekvivalentní prvku z, pak prvek x je ekvivalentní prvku z.*

Dá se dokázat, že splnění těchto tří podmínek je nutné a stačí k tomu, aby bylo možné množinu A rozložit na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků (a přitom tak, aby různé podmnožiny neměly společné prvky).

Nazvěme například dvě celá čísla ekvivalentními, jestliže je jejich rozdíl sudé číslo. Snadno se dá ověřit, že všechny tři podmínky a) — c) jsou v tomto případě splněny. Shrneme-li vzájemně ekvivalentní prvky do podmnožin, rozložíme množinu všech celých čísel na dvě podmnožiny: na množinu všech sudých čísel a na množinu všech lichých čísel. □

## Aritmetika zbytkových tříd

Je-li $m$ libovolné přirozené číslo větší než jedna, lze rozložit množinu všech celých čísel na třídy tímto způsobem: Dvě čísla nazveme *kongruentními podle modulu m*, jestliže je jejich rozdíl dělitelný číslem $m$. Například čísla 7 a 19 jsou kongruentní podle modulu 4, ale nejsou kongruentní podle modulu 5, neboť $19 - 7 = 12$ je dělitelné čtyřmi, ale není dělitelné pěti. Snadno lze ověřit, že kongruentnost podle modulu má všechny vlastnosti vyžadované od ekvivalence. Množina všech celých čísel se tedy rozkládá na třídy čísel kongruentních podle modulu $m$ a při dělení čísel z téže třídy číslem $m$ je zbytek stejný. Je-li například $m = 3$, dostaneme tři třídy: třídu násobků čísla 3, třídu čísel, při jejichž dělení třemi dostaneme zbytek 1 a třídu čísel, při jejichž dělení třemi dostaneme zbytek dvě.



Utvořme nyní novou množinu M, jejímiž prvky jsou třídy čísel kongruentních podle daného modulu $m$. Množina M má $m$ prvků. V této množině lze definovat operace sčítání a násobení prvků. Buď například $m = 5$. Vezměme třídu A čísel, dávajících při dělení pěti zbytek 2 a třídu B čísel, dávajících při dělení zbytek 4. Sečteme-li libovolné číslo z třídy A a libovolné číslo z třídy B, dostaneme číslo, při jehož dělení pěti je zbytek 1 (skutečně, $(5a + 2) + (5b + 4) = 5(a + b + 1) + 1$). Můžeme tedy říci, že součtem třídy A a třídy B je třída C všech čísel, dávajících při dělení pěti zbytek 1. Násobíme-li libovolné číslo z třídy A libovolným číslem z třídy B, dostaneme číslo, dávající při dělení pěti zbytek 3.

Dostali jsme zajímavou aritmetiku, ve které se nepracuje s nekonečným počtem celých čísel, nýbrž pouze s pěti prvky. Třídu čísel, dávajících při dělení pěti zbytek $a$, označíme symbolem $a$ (například třídu čísel $\{\ldots -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$ označíme jednoduše 1). Pro „čísla“ (zbytkové třídy) 0, 1, 2, 3, 4 je aritmetika dána těmito tabulkami sčítání a násobení:

**TABULKA SČÍTÁNÍ**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

**TABULKA NÁSOBENÍ**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| **3** | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| **4** | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Zvláště jednoduché jsou tyto tabulky v případě $m = 2$:

**TABULKA SČÍTÁNÍ**

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 0 |

**TABULKA NÁSOBENÍ**

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 |

První tabulka ukazuje, že součet dvou sudých nebo dvou lichých čísel je sudý a že součet sudého čísla a lichého čísla je číslo liché. Druhá tabulka ukazuje, že součin dvou celých čísel je číslo liché pouze tehdy, jsou-li oba činitelé lichá čísla. Aritmetika zbytkových tříd podle daného modulu se studuje v části matematiky, nazývané *teorie čísel.*

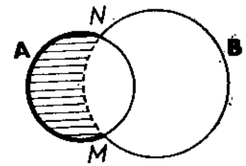
## Rozdíl množin

*Rozdílem* dvou množin $A$ a $B$ se nazývá množina $A \setminus B$, do které patří všechny prvky množiny $A$, která nepatří do množiny $B$.

Vidíme, že k tomu, abychom mohli utvořit rozdíl $A \setminus B$,



Obr. 14




není nutné, aby množina $B$ byla částí množiny $A$. Stačí odstranit z množiny $A$ společnou část množin $A$ a $B$:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Je-li například $A$ množina všech bodů levého kruhu na obr. 14 a je-li $B$ množina všech bodů pravého kruhu, je jejich rozdíl $A \setminus B$ množina bodů šrafovaného srpku na obr. 14. (bez oblouku $MN$). Je-li $A$ množina všech žáků (chlapců i dívek) určité třídy nějaké školy a $B$ množina všech žákyň této školy, pak rozdíl $A \setminus B$ je množina všech chlapců z uvažované třídy.

V případě, že množina $B$ je částí množiny $A$, nazývá se rozdíl $A \setminus B$ *doplňkem množiny* $B$ *v množině* $A$ a označuje se symbolem $B_A$ (množina $B$ může mít samozřejmě v různých množinách různé doplňky). Například doplňkem množiny všech sudých čísel v množině všech celých čísel je množina všech lichých čísel. Doplňkem množiny všech čtverců v množině všech obdélníků je množina všech obdélníků s nestejně dlouhými sousedními stranami, kdežto doplňkem téže množiny v množině všech kosočtverců je množina všech kosočtverců s nestejně dlouhými úhlopříčkami.

Vyšetřují-li se pouze množiny, které jsou podmnožinami dané universální množiny $I$, pak doplňkem množiny $B$ rozumíme obvykle doplněk v $I$ a místo $B_I$ se píše jednoduše $B'$.

## Algebra množin

Seznámili jsme se se základními operacemi s množinami — s tvořením sjednocení, průniku a rozdílu. Tyto operace mají řadu vlastností, připomínajících vlastnosti operací sčítání a násobení čísel. Je známo, že algebra mnohočlenů je založena na několika pravidlech pro operace s čísly. Tato pravidla lze vyjádřit rovnostmi takto: pro jakákoliv čísla $a$, $b$, $c$ platí

| | |
|---|---|
| a) $a + b = b + a$ | komutativnost sčítání |
| b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ | asociativnost sčítání |
| c) $a + 0 = a$ | existence nulového prvku |
| d) $a + (-a) = a - a = 0$ | existence opačného prvku |
| e) $a \cdot b = b \cdot a$ | komutativnost násobení |
| f) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | asociativnost násobení |
| g) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | distributivnost násobení vzhledem k sčítání |
| h) $a \cdot 1 = a$ | existence jednotkového prvku |

Většina těchto vlastností operací s čísly se zachovává i pro operace s množinami*). Je například zřejmé, že pro libovolné dvě množiny A a B platí

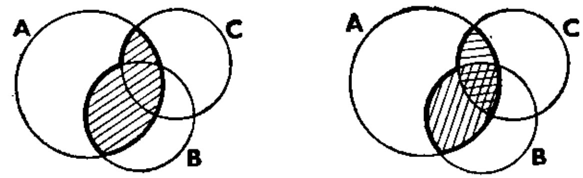
$$A \cup B = B \cup A$$

($A \cup B$ i $B \cup A$ označují touž množinu, do které patří všechny prvky z A i B a která neobsahuje žádné jiné prvky). Stejně zřejmé je i to, že platí

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

*) Považujeme-li sjednocování za analogii sčítání a tvoření průniku za analogii násobení (pozn. překl.).






Obr. 15

Obě tyto množiny jsou tvořeny právě těmi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A, B a C.

Stejně se dokáže, že platí

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{a} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(množiny $A \cap B$ a $B \cap A$ se skládají ze společných prvků množin A a B, a množiny $(A \cap B) \cap C$ a $A \cap (B \cap C)$ ze společných prvků množin A, B a C).

O něco složitější je důkaz distributivnosti operace průniku vzhledem k operaci sjednocení, tj. platnosti rovnosti

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (1)$$

Přesný logický důkaz této rovnosti je spíš pracný než složitý. Omezíme se proto pouze na dva obrázky, které tuto rovnost ilustrují (obr. 15). Na prvním z nich je vyšrafován průnik množiny A a množiny $B \cup C$, kdežto na druhém jsou vyšrafovány průniky $A \cap B$ a $A \cap C$.

Roli nuly a jednotky hrají při operacích s množinami prázdná množina $\emptyset$ a universální množina I. Platí totiž rovnosti

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap I = A,$$

odpovídající rovnostem

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a$$

pro operace s čísly.

Tvoření sjednocení a průniku množin se tedy vyznačuje týmiž vlastnostmi jako sčítání a násobení čísel. Díky tomu všechny vzorce z algebry mnohočlenů, pokud se v nich vyskytují pouze operace sčítání a násobení, platí i pro množiny. Například rovnosti

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

odpovídá rovnost

$$(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^2 = \mathsf{A}^2 \cup [2(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})] \cup \mathsf{B}^2, \qquad (2)$$

kde $\mathsf{A}^2$ značí $\mathsf{A} \cap \mathsf{A}$, $\mathsf{B}^2$ značí $\mathsf{B} \cap \mathsf{B}$ a $2(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$ značí $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$.

Algebra množin má však i své zvláštní rysy. Její základní odlišnost od algebry mnohočlenů spočívá v tom, že pro množiny $\mathsf{A}$ a $\mathsf{B}$, z nichž jedna je částí druhé, se dají vzorce pro sjednocení a průnik zjednodušit. Platí totiž: Je-li $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, pak $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B}$ a $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A}$. Je to okamžitě patrné z obr. 16. Jako speciální případ pak platí $\mathsf{A} \cup \mathsf{A} = \mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$ a $\mathsf{A} \cup \mathsf{I} = \mathsf{I}$, neboť $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$ a $\mathsf{A} \subset \mathsf{I}$. To pak umožňuje zjednodušit vzorce algebry množin. Například platí $\mathsf{A}^2 \cup [2(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})] = \mathsf{A} \cup 2(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathsf{A}$, neboť $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$ a $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$, a jelikož platí také $\mathsf{B}^2 = \mathsf{B}$, nabývá vzorec (2) tvaru $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^2 = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. V algebře množin pak nemá vůbec význam hovořit o „mocninách“ množin, neboť pro každé $n$ platí $\mathsf{A}^n = \mathsf{A}$.

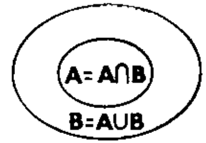
Ukažme nyní, že pro operace s množinami platí i druhý „distributivní zákon“, který pro operace s čísly neplatí. Toto pravidlo lze zapsat vzorcem

$$\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}).$$

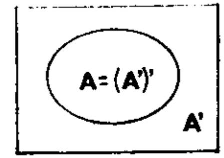
K důkazu stačí odstranit závorky na pravé straně rovnosti podle vzorce (1) a všimnout si toho, že množiny $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ a $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$ jsou podmnožinami množiny $\mathsf{A}$. Kromě toho $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$, a platí tedy

$$(\mathsf{A} \cap \mathsf{A}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{A}) \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}).$$






Obr. 16




Obr. 17

Všimněme si dále, že tvoření rozdílu množin se svými vlastnostmi již nepodobá odčítání čísel. Pro libovolná tři čísla $a$, $b$, $c$ platí rovnost

$$a + (b - c) = (a + b) - c,$$

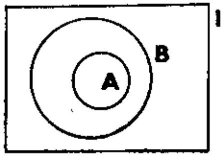
na druhé straně však existují takové tři množiny $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\mathsf{C}$, že platí

$$\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \setminus \mathsf{C}) \neq (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \setminus \mathsf{C}.$$

Příčina spočívá v tom, že při operaci sjednocení se berou opakující se prvky pouze jednou a že lze tvořit rozdíl množin i v tom případě, že „menšitel není obsažen v menšenci“. Proto, jsou-li například všechny tři množiny $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\mathsf{C}$ totožné, tj. $\mathsf{A} = \mathsf{B} = \mathsf{C}$, pak $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A}$, a tedy $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \setminus \mathsf{C} = \mathsf{A} \setminus \mathsf{A} = \emptyset$ a zároveň $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \setminus \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cup \emptyset = \mathsf{A}$.

V teorii množin se vyskytuje ještě operace, nemající analogii v obvyklé algebře. Je to operace přechodu od dané množiny $\mathsf{A}$ k jejímu doplňku $\mathsf{A}' = \mathsf{I} \setminus \mathsf{A}$. Množiny $\mathsf{A}$ a $\mathsf{A}'$ jsou zřejmě disjunktní a jejich sjednocením je celá univerzální množina, tj. $\mathsf{A} \cap \mathsf{A}' = \emptyset$ a $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}' = \mathsf{I}$. Kromě toho je zřejmé, že $\emptyset' = \mathsf{I}$ (doplněk prázdné množiny je totožný s univerzální množinou) a $\mathsf{I}' = \emptyset$. Dále platí rovnost $(\mathsf{A}')' = \mathsf{A}$ (obr. 17).

Ukážeme nyní, že je-li $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, je $\mathsf{A}' \supset \mathsf{B}'$. Skutečně, čím větší množina je, tím méně prvků zůstane v jejím doplňku.




Obr. 18

Na obr. 18 je univerzální množina zobrazena jako obdélník a množiny $A$ a $B$ jako kruhy. Doplněk množiny $A$ se skládá z bodů obdélníka ležících vně menšího kruhu a doplněk množiny $B$ z bodů obdélníka ležících vně většího kruhu. Zřejmě $A' \supset B'$.

O něco složitěji se dokazuje platnost těchto vzorců:*)

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

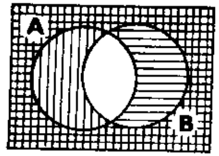
Na obr. 19 je znázornění doplňku množiny $A$ šrafováno vodorovnými čarami a znázornění doplňku množiny $B$ svislými čarami. Doplněk množiny $A \cup B$ se skládá z bodů obdélníka nepatřících do žádného z obou kruhů. To jsou právě ty body obdélníka, které leží v části šrafované vodorovně i svisle, tj. body množiny $A' \cap B'$. Tedy zřejmě $(A \cup B)' = A' \cap B'$. Podobně i obrázek 20 ilustruje vzorec $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Všimli jsme si řady vlastností operací s množinami. Pro pohodlí uvedeme jejich seznam (jako obvykle, symbol $\emptyset$ označuje prázdnou množinu a symbol $I$ univerzální množinu, symbol $A'$ doplněk množiny $A$ v univerzální množině):

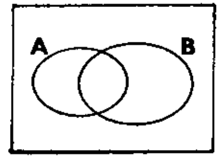
1) $A \subset A$.
2) Je-li $A \subset B$ a $B \subset A$, je $A = B$.
3) Je-li $A \subset B$ a $B \subset C$, je $A \subset C$.

*) Tzv. vzorce de Morganovy (pozn. překl.).






Obr. 19




Obr. 20

4) $\emptyset \subset A$.
5) $A \subset I$.
6) $A \cup B = B \cup A$.
7) $A \cap B = B \cap A$.
8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
9) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
10) $A \cup A = A$.
11) $A \cap A = A$.
12) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
13) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
14) $A \cup \emptyset = A$.
15) $A \cap I = A$.
16) $A \cup I = I$.
17) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
18) Vztah $A \subset B$ je ekvivalentní každému ze vztahů $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.
19) $A \cup A' = I$.
20) $A \cap A' = \emptyset$.
21) $\emptyset' = I$.
22) $I' = \emptyset$.
23) $(A')' = A$.
24) Vztah $A \subset B$ je ekvivalentní vztahu $B' \subset A'$.
25) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
26) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Všimněme si tohoto pozoruhodného *„duálního vztahu"*. Jestliže v kterékoli z vlastností 1) — 26) vzájemně zaměníme symboly

$$\subset \text{ a } \supset, \quad \emptyset \text{ a } I, \quad \cup \text{ a } \cap,$$

bude výsledkem opět jedna z těchto vlastností.

Takto lze například získat vlastnost 7) z vlastnosti 6), vlastnost 13) z vlastnosti 12) atd.

Odtud vyplývá, že každé větě, kterou lze odvodit z vlastností 1) — 26), odpovídá věta k ní „duální", která se získá výše uvedenými záměnami symbolů.

Pamatovat si všechny vlastnosti 1)—26) není ovšem nijak snadné. Naštěstí toho není zapotřebí. Stačí omezit se na dvě základní operace: Tvoření sjednocení a doplňku a požadovat přitom, aby platily tyto tři vztahy:

a) $A \cup B = B \cup A$,
b) $(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$,
c) $(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A$.

Operaci průniku $A \cap B$, vztah inkluze $A \subset B$ a množiny $I$, $\emptyset$ pak definujeme vzorci

d) $A \cap B$ se podle definice rovná $(A' \cup B')'$;
e) $A \subset B$ podle definice znamená $A \cup B = B$;
f) $I = A \cup A'$, $\emptyset = I'$.

Potom všechny vlastnosti 1)—26) vyplývají ze vzorců a)—c).

## Planeta bájí

Při jedné besedě u šálku kávy v klubu Mezigalaktických cestovatelů věhlasný člen tohoto klubu, baron Prášil kosmického věku Ijon Tichý*) vyprávěl:



„Přistání na planetě Hesiod bylo neobyčejně obtížné. Svého rozhodnutí přistát jsem litoval ihned, jak jsem se ocitl na povrchu planety: na planetě žily nestvůry strašnější než netvoři ze starořeckých bájí. Uvítala mne tisícičlenná delegace obyvatelů planety. Z nich 811 mělo jedno oko jako obr Polyfém, 752 mělo místo vlasů zmije jako Gorgony a 418 mělo rybí ocas jako mořské víly Nereidy. Přitom 570 jednookých oblud mělo místo vlasů zmije, 356 jednookých mělo rybí ocas, 348 ryboocasatých mělo zmije místo vlasů a 297 jednookých mělo nejen zmije místo vlasů, ale i rybí ocas. Nejstarší z nich se ke mně obrátil a řekl..."

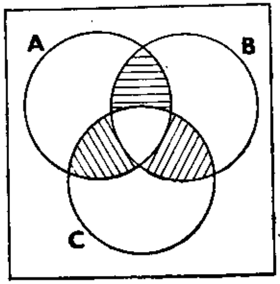
Členové klubu se však stejně nedověděli, co Ijon Tichý uslyšel na planetě nestvůr. Profesor Tarantoga, poslouchající vyprávění cestovatele, provedl zpaměti bleskurychle jakési výpočty a zvolal:

„Drahý Ijone! Jsem ochoten věřit, že na té planetě žili jednoocí tvorové se zmijemi místo vlasů a s rybími ocasy. Musel jsi se setkat s ještě strašnějšími obludami — jen si vzpomeň na kurdle. Doufám však, že z matematických zákonů se na této planetě nestaly bajky."

A Tarantoga vzal se stolu papírový ubrousek, nakreslil schéma uvedené na obr. 21 a řekl:

„Označíme písmenem $I$ množinu všech členů delegace, písmenem $A$ množinu jednookých, písmenem $B$ množinu delegátů se zmijemi místo vlasů a písmenem $C$ množinu ryboocasatých. Množiny $A$, $B$ a $C$ jsou na obrázku znázorněny kruhy. Tyto tři kruhy dělí množinu $I$ na osm částí. Spočtěme, kolik prvků má každá část. Podle vyprávění do

*) Dobrodružství Ijona Tichého popsal známý polský spisovatel Stanislav Lem v „Hvězdných denících Ijona Tichého". Autor „Vyprávění o množinách" doufá, že mu S. Lem odpustí neumělý pokus o napodobení a že čtenáři nebudou S. Lemovi přisuzovat literární nedostatky autorova výkladu.




Obr. 21

množiny $A \cap B$ (jednoocí se zmijemi místo vlasů) patří 570 tvorů a do množiny $A \cap B \cap C$ (jednookých ryboocasatých se zmijemi místo vlasů) 297 tvorů. To znamená, že do množiny $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$ patří 273 tvorů. (Na obrázku je tato množina šrafována vodorovnými čarami.) Stejným způsobem zjistíme, že množina $(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ obsahuje 59 prvků (tato množina je šrafována svisle) a že množina $(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ obsahuje 51 prvků (tato množina je šrafována šikmými čarami).

Nyní je již snadné určit počet prvků té části množiny A, která nepatří do množiny $(B \cup C)$. Stačí od 811 odečíst nejprve 570 (počet prvků množiny $A \cap B$) a pak ještě 59 (počet prvků množiny $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$). Zbude 182 jednookých tvorů nemajících ani zmije na hlavě ani rybí ocasy. Podobně zjistíme, že množina $B \setminus (A \cup C)$ má 131 prvků a množina $C \setminus (A \cup B)$ 11 prvků. Výsledky výpočtů jsou znázorněny na obr. 22.

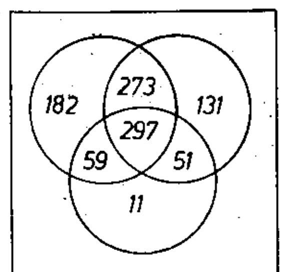
Spočtěme nyní, kolik členů delegace nebylo ani jednookých ani ryboocasích ani nemělo místo vlasů zmije, tj. kolik prvků má množina $I \setminus A \setminus B \setminus C$. Ježto jednotlivé množiny na obr. 22 nemají žádné prvky společné, stačí prostě odečíst od 1 000 součet $297 + 273 + 59 + 51 + 182 + 131 + 11$. Avšak tento součet je 1 004 a množina $I / A / B / C$ má tudíž $-4$ prvky. Ale uznej sám, drahý Ijone, že ani na planetě bájí nemůže mít žádná množina záporný počet prvků."

□ Ponechme Ijona Tichého aby se s profesorem Tarantogou dohovořili (brzy se s ním opět setkáme) a věnujme se několika poznámkám. Množinu I jsme rozdělili na 8 podmnožin a zjistili jsme počet prvků každé z nich. Význam tohoto rozkladu spočíval v tom, že žádné dvě ze získaných podmnožin neměly společné prvky. Avšak k témuž rozkladu jsme mohli dospět i jinak. Víme, že $I = A \cup A' = B \cup B' = C \cup C'$, a tedy

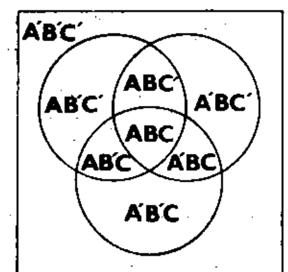
$$\begin{aligned} I = (A \cup A') \cap (B \cup B') \cap (C \cup C') = (A \cap B \cap C) \cup \\ \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup \\ \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup \\ \cup (A' \cap B' \cap C'). \end{aligned}$$

Dostali jsme rozklad množiny I na 8 podmnožin. Jsou to tytéž podmnožiny, které předtím získal profesor Tarantoga (obr. 23, kde z technických důvodů vynecháváme znak $\cap$).

Obr. 22




Obr. 23



Z předchozího vzorce bezprostředně plyne, že

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A' \cap B' \cap C') = \mathcal{N}(I) - \mathcal{N}(A \cap B \cap C) - \\ -\mathcal{N}(A \cap B \cap C') - \\ -\mathcal{N}(A \cap B' \cap C) - \mathcal{N}(A \cap B' \cap C') - \\ -\mathcal{N}(A' \cap B \cap C) - \mathcal{N}(A' \cap B \cap C') - \\ -\mathcal{N}(A' \cap B' \cap C),\end{aligned}$$

kde symbolem $\mathcal{N}(D)$ je označen počet prvků množiny $D$. Tento vzorec lze upravit tak, aby neobsahoval doplňky $A'$, $B'$, $C'$ množin $A$, $B$, $C$. Za tímto účelem zaměníme $C'$ za $I \setminus C$. Dostaneme:

$$A \cap B \cap C' = A \cap B \cap (I \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$$

a tedy

$$\mathcal{N}(A \cap B \cap C') = \mathcal{N}(A \cap B) - \mathcal{N}(A \cap B \cap C),$$
$$\mathcal{N}(A \cap B' \cap C') = \mathcal{N}(A \cap B') - \mathcal{N}(A \cap B' \cap C) \text{ atd.}$$

Pak zaměníme $B'$ za $I \setminus B$ a nakonec $A'$ za $I \setminus A$ a dospějeme k vzorci

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A' \cap B' \cap C') = \mathcal{N}(I) - \mathcal{N}(A) - \mathcal{N}(B) - \mathcal{N}(C) + \\ + \mathcal{N}(A \cap B) + \mathcal{N}(A \cap C) + \mathcal{N}(B \cap C) - \\ - \mathcal{N}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Tento vzorec umožňuje řešit mnohé úlohy analogické výše uvedené úloze. Tarantoga mohl například přímo podle tohoto vzorce spočítat, že

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A' \cap B' \cap C') = 1\,000 - 811 - 752 - 418 + 570 + \\ + 356 + 348 - 297 = -4 \ \square\end{aligned}$$

Uveďme ještě jednu úlohu spjatou se zjišťováním počtu prvků konečných množin. Jejím autorem je známý spisovatel Lewis Carroll, autor „Alenky v kraji divů".*) Je zajímavé, že pod pseudonymem Lewis Carroll psal matematik Charles Dodgson.

*) Český překlad vyšel např. v r. 1970 v nakladatelství Albatros (pozn. překl.).



V jedné z Carrollových povídek je tato úloha:

„Ze sta pirátů ztratilo v krutém boji 70 pirátů jedno oko, 75 pirátů jedno ucho, 80 pirátů jednu ruku a 85 pirátů jednu nohu. Jaký je nejmenší počet pirátů, kteří přišli zároveň o oko, ucho, ruku i nohu?"

Označme písmenem $A$ množinu jednookých, písmenem $B$ množinu jednouchých, písmenem $C$ množinu jednorukých a písmenem $D$ množinu jednonohých. Má se určit počet prvků množiny $A \cap B \cap C \cap D$. Celá universální množina $I$ se skládá zřejmě z této množiny $A \cap B \cap C \cap D$ a z pirátů kteří si zachránili buď obě oči nebo obě uši, nebo obě ruce nebo obě nohy. Je tedy

$$I = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup (A \cap B \cap C \cap D).$$

Odtud plyne, že počet prvků množiny $I$ není menší než součet počtů prvků množin $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ a $A \cap B \cap C \cap D$ (byl by roven tomuto součtu, kdyby množiny $A'$, $B'$, $C'$ a $D'$ byly po dvou disjunktní). Avšak množina $A'$ má 30 prvků, množina $B'$ má 25 prvků, množina $C'$ má 20 prvků a množina $D'$ má 15 prvků. Jelikož univerzální množina $I$ má 100 prvků, dostaneme

$$100 \leqq 30 + 25 + 20 + 15 + \mathcal{N}(A \cap B \cap C \cap D).$$

Odtud plyne, že

$$\mathcal{N}(A \cap B \cap C \cap D) \geqq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10.$$

Alespoň 10 pirátů přišlo tedy i o oko i ucho i o ruku i o nohu.

## ■ Booleovy algebry

V matematice se vyskytují i jiné objekty, pro něž jsou definovány dvě operace vyznačující se vlastnostmi 1) – 26).

Takové soustavy objektů studoval v r. 1847 anglický matematik Boole (otec spisovatelky Ethel Lilian Voynickové, autorky vynikající knihy „Střeček")*), a proto se nazývají *Booleovy algebry*. Teprve když se tento název již ujal, se zjistilo, že Boole měl předchůdce — již roku 1685 studovali bratři Bernoulliové „algebry" s týmiž zákony.

Shoda zájmů bratrů Bernoulliových a Boola je plně pochopitelná: všichni se zajímali o algebru logiky, o možnost vyjádřit algebraickou formou úvahy, výroky. A Booleovy algebry jsou k tomu zvlášť vhodné. V matematické logice se výrokem rozumí každá věta, která je buď pravdivá nebo nepravdivá. Přitom se matematická logika nezabývá otázkou, zda je daný výrok pravdivý či nepravdivý. Studuje pouze otázky spojené s tím, podle jakých pravidel je možné z daných výroků tvořit výroky složitější a jak pravdivost těchto složitějších výroků závisí na pravdivosti „výchozích" výroků. S výroky lze provádět tyto operace:

1) Negace — záměna daného výroku $X$ za „opačný" výrok $\overline{X}$, který je pravdivý v tom případě, že daný výrok $X$ je nepravdivý, a který je nepravdivý v tom případě, že daný výrok $X$ je pravdivý.

2) Konjunkce — vytvoření (z daných dvou výroků $X$ a $Y$) výroku $X \wedge Y$, pravdivého pouze v tom případě, že jsou pravdivé oba výroky $X$ a $Y$.

3) Disjunkce — vytvoření (z daných dvou výroků $X$ a $Y$) výroku $X \vee Y$ pravdivého v tom případě, že je pravdivý alespoň jeden z daných výroků $X$, $Y$.

4) Implikace — vytvoření (z výroků $X$ a $Y$) výroku $X \Rightarrow Y$ nepravdivého pouze v tom případě, že výrok $X$ je pravdivý a výrok $Y$ nepravdivý.

*) Vyšla v překladu v r. 1972 v nakladatelství Odeon (pozn. překl.).



V mnoha případech spočívá výrok v tom, že nějaký prvek $x$ patří do podmnožiny A nějaké univerzální množiny I. V takovém případě operace 1)—4) s výroky odpovídají nám známým operacím s množinami. Například negace výroku „$x \in$ A" je výrok „$x \in$ A′". Tvoření doplňku množiny A odpovídá tedy negování výroku „$x \in$ A". Podobně operaci průniku množin A a B odpovídá konjunkce výroků „$x \in$ A" a „$x \in$ B", operaci sjednocení množin odpovídá disjunkce těchto výroků a vztahu A $\subset$ B odpovídá implikace výroků „$x \in$ A" a „$x \in$ B". Přitom výrok „$x \in$ I" je vždy pravdivý a výrok „$x \in \emptyset$" vždy nepravdivý.

Zmíněné vztahy dovolují přirozenou domněnku, že pravidla 1)—26) platí nejen pro množiny, nýbrž i pro výroky, pokud A $\cap$ B chápeme jako konjunkci výroků, A $\cup$ B jako disjunkci, A′ jako negaci, A $\subset$ B jako implikaci, I jako vždy pravdivý výrok a $\emptyset$ jako vždy nepravdivý výrok. Ukázalo se, že tato domněnka je oprávněná a že výroky tvoří Booleovu algebru vzhledem k operacím 1)—4).

Booleovy algebry lze vytvářet nejen z množin a z výroků. Vyšetřujme např. množinu všech posloupností obsahujících $n$ číslic, přičemž je každá číslice buď nula nebo jednička. Definujme sčítání (sjednocení) a násobení (průnik) dvou takových posloupností „po souřadnicích", přičemž tabulky pro sčítání a násobení zadáme takto:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Například:

$$(1, 0, 0, 1) \cup (1, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 1),$$
$$(1, 0, 0, 1) \cap (1, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1).$$

Položme dále $x \subset y$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, v tom případě, že pro každou souřadnici platí $x_k \leq y_k$. Zaměníme-li v dané posloupnosti $x$ číslici 0 za 1 a 1 za 0, dostaneme novou posloupnost, kterou označíme $x'$. Nakonec pak označíme posloupnost (0, 0, ..., 0) symbolem **0** a posloupnost (1, 1, ..., 1) symbolem **1**. Necháme na čtenáři, aby prověřil, že pro uvedené operace s posloupnostmi platí všechny zákony 1)—26).

Zajímavý příklad Booleovy algebry lze získat z množiny všech přirozených dělitelů přirozeného čísla $N$, které je součinem několika různých prvočísel. Jako operaci sčítání (sjednocení) dělitelů vezmeme vytvoření nejmenšího společného násobku těchto dělitelů a jako operaci násobení (tvoření průniku) vytvoření největšího společného dělitele. Doplňkem dělitele $n$ nazveme číslo $n' = \frac{N}{n}$. Nakonec řekneme, že $n \subset m$, jestliže $m$ je dělitelné $n$. Není obtížné ověřit, že právě zavedené operace vyhovují podmínkám 1)—26) z odstavce „Algebra množin", přičemž roli množiny **0** hraje číslo 1 a roli univerzální množiny **1** číslo $N$.

Je-li například $N = 30$, skládá se tato Booleova algebra z čísel $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. „Součet" dělitelů 2 a 5 je 10 a jejich „součin" je 1. Dělitelem „opačným" k děliteli 3 je 10, tj. $3' = 10$. Nakonec $5 \subset 15$, neboť patnáct je dělitelné pěti.



# Kapitola 2

# Ve světě zázraků nekonečna

## Tajemství nekonečna

Nebudeme daleko od pravdy, řekneme-li, že celou matematikou proniká myšlenka nekonečna. V matematice se zpravidla nezajímáme o jednotlivé objekty (čísla, geometrické útvary), ale o celé třídy takových objektů: o množiny *všech* přirozených čísel, *všech* trojúhelníků atd. A takové množiny se skládají z nekonečného počtu jednotlivých objektů.

Matematikové a filosofové se proto ve všech dobách zabývali pojmem nekonečna. Tento zájem byl vzbuzen v tom okamžiku, jakmile se stalo zřejmým, že za každým přirozeným číslem následuje další, větší, tj., že přirozených čísel je nekonečně mnoho. Avšak již první pokusy o studium nekonečna vedly k mnoha paradoxům.

Například řecký filosof Zenón užitím pojmu nekonečna dokazoval nemožnost pohybu. Říkal: Dříve než šíp proletí určitou vzdálenost, musí proletět polovinu této vzdálenosti. Před tím však musí proletět její čtvrtinu a ještě před tím její osminu atd. Jelikož tento proces dělení na poloviny nikdy nekončí (zde máme ono nekonečno), nemůže se šíp vůbec pohnout z místa. Stejným způsobem dokazoval, že rychlonohý Achilles nikdy nedohoní pomalou želvu.

Tyto paradoxy a sofismata vedly starořecké matematiky k tomu, že se pojmu nekonečna vyhýbali a „vyháněli" jej z matematických úvah. Někteří filosofové tvrdili, že se všechny geometrické útvary skládají z konečného počtu nejmenších dále nedělitelných částic (atomů). Taková atomistická teorie snadno odstraňuje Zenonovy paradoxy, neboť nepřipouští nekonečné dělení — dělit lze nejvýše na atomy, které jsou již nedělitelné. Zde však vznikly nové obtíže. Skládá-li se úsečka z lichého počtu dále nedělitelných atomů, nelze ji rozdělit na polovinu (obr. 24). Kruh nelze rovněž rozdělit na dvě stejné části: střed kruhu bude patřit pouze jedné části, a to odporuje tomu, že jsou obě části stejné.

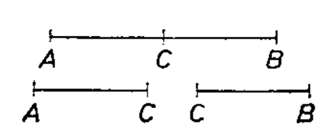
Spory o nekonečno probíhaly chvílemi dosti ostře. Například známý řecký filosof Platón byl k Demokritově atomistické teorii natolik nesmiřlivý, že při každé příležitosti vyhledával díla tohoto autora a ničil je — do objevu knihtisku byla taková metoda ideového boje velmi účinná.

Metody využívající pojmu nekonečna umožnily řeckým vědcům dospět k řadě důležitých výsledků, zvláště v geometrii. Zenónovy paradoxy je však naučily opatrnosti. Například Euklides formuloval svou slavnou větu o nekonečnosti množiny prvočísel takto: „Počet všech prvočísel je větší než jakýkoli daný počet prvočísel". Tedy více než jakýkoli daný počet; o tom, zda jich je nekonečně mnoho či nikoliv, Euklides mlčí. Ostatně staří Řekové maskovali použití metod, ve kterých podstatnou roli hrál pojem nekonečna, tak pečlivě, že je evropští matematici 16.—17. století museli znovu objevovat.

Ve středověku se problémy nekonečna studovaly převážně v souvislosti s otázkou, je-li konečná či nekonečná množina andělů, kteří se vejdou na špičku jehly. Široké užívání nekonečna v matematice začíná v 17. století, když vznikla matematická analýza. Tehdy se pojmů „nekonečně velká veličina", „nekonečně malá veličina" užívalo v matematických úvahách na každém kroku. Nestudovaly se však



Obr. 24




množiny obsahující nekonečně mnoho prvků, ale veličiny, které se měnily tak, že byly stále větší a větší, až nakonec převyšovaly libovolnou pevnou hodnotu. Takové veličiny se nazývaly „potenciálně nekonečně velké" v tom smyslu, že se mohou stát libovolně velkými (potentia — možnost).

Teprve v polovině 19. století začíná systematické studium množin tvořených nekonečně mnoha prvky a analýza pojmu nekonečna. Zakladateli matematické teorie nekonečných množin se stali pražský vědec Bernard Bolzano (jeho základní práce byly publikovány teprve mnoho let po jeho smrti) a německý matematik Georg Cantor. Těmto vynikajícím vědcům se podařilo překonat středověkou scholastiku a učinit z teorie množin důležitou část matematiky.

Hlavním Bolzanovým a Cantorovým úspěchem bylo prostudování vlastností nekonečných množin; vlastnosti konečných množin byly známy již dříve. Ukázalo se, že vlastnosti konečných a nekonečných množin se sobě vůbec nepodobají: mnohé jevy vyloučené u konečných množin se u nekonečných množin mohou snadno vyskytnout. Pokuste se například ubytovat v hotelu, jehož každý pokoj je obsazen jedním hostem, ještě jednoho hosta a přitom tak, aby byl každý pokoj opět obsazen pouze jedním hostem. Nejde to? Pak tedy jen proto, že počet pokojů v hotelu je konečný! Ale kdyby měl hotel nekonečně mnoho pokojů... S takovými hotely se ovšem můžeme setkat pouze ve vyprávění našeho starého známého, mezihvězdného cestovatele Ijona Tichého. Dejme mu tedy slovo.

## Neobyčejný hotel aneb tisícíprvá cesta Ijona Tichého

Domů jsem se vrátil dost pozdě — vzpomínkový večer v klubu „Mlhovina Andromedy" se protáhl dlouho přes půlnoc. Celou noc mne mučily děsivé sny. Chvíli se mně zdálo, že mne spolkl ohromný kurdl, pak jsem zase letěl na planetu Durdiotů a nevěděl jsem, jak se vyhnout tamějšímu hroznému stroji, který dělal z lidí šestiúhelníky, pak jsem... Prostě nikomu neradím míchat vodku s uleželou medovinou. Do světa skutečnosti mne vrátilo neočekávané zazvonění telefonu. Volal starý přítel a spoluúčastník mezihvězdných toulek profesor Tarantoga.

„Naléhavý úkol, drahý Ijone. Astronomové objevili v kosmu jakýsi podivný objekt — z jedné galaxie do druhé se táhne záhadný černý pruh. Nikdo neví, oč jde. I nejlepší radioteleskopy, neutrinoskopy a gravitoskopy selhávají při řešení této záhady. Zbýváš ty. Jsi naše poslední naděje. Co nejrychleji se vydej ve směru mlhoviny ACD — 1587."

Druhý den jsem dostal z opravny svou starou fotonovou raketu, zapojil jsem urychlovač času a elektronického robota, který znal všechny jazyky kosmu a všechny historky o mezihvězdných cestovatelích (což mě mělo ochránit před nudou) a vyletěl jsem v určeném směru.

Když už robot vyčerpal veškerou zásobu anekdot a začal se opakovat (není nic horšího než elektronický robot, po desáté opakující starou historku), objevil se v dálce cíl mé cesty. Mlhoviny, které zakrývaly záhadný pruh, zůstaly vzadu, a přede mnou se objevil ... hotel „Kosmos".

Ukázalo se, že mezihvězdní tuláci Vygonti, pro které jsem kdysi vybudoval planetku, ji opět po kouskách rozkradli a zůstali zase bez útočiště. Aby se nemuseli znovu toulat po cizích galaxiích, rozhodli se vybudovat grandiózní stavbu — hotel pro všechny kosmické cestovatele. Tento hotel se táhl téměř všemi galaxiemi. Říkám „téměř všemi", neboť Vygonti rozebrali některé neobydlené galaxie a z každé zbývající galaxie odtáhli několik stranou ležících souhvězdí.



Avšak hotel vybudovali znamenitý. V každém pokoji byly kohoutky na studenou a horkou plazmu. Na přání jste se mohli dát na noc rozložit a ráno vás vrátný zase složil podle vašeho atomárního schématu.

A to nejhlavnější: *hotel měl nekonečně mnoho pokojů.* Vygonti doufali, že teď už nikdo nebude muset pořád poslouchat větu, které už měli za dobu svých toulek až po krk — „volné pokoje nejsou".

Přesto mi štěstí nepřálo. První, co mi padlo v hotelové hale do oka, byl plakát: „Registrace účastníků sjezdu kosmozoologů ve 127. patře".

Jelikož kosmozoologové přijeli ze všech galaxií — a těch je nekonečně mnoho — byly všechny pokoje obsazeny účastníky sjezdu. Pro mne už místo nezbylo. Recepční se mne sice snažil dát do pokoje k některému z kosmozoologů, ale když jsem zjistil, že jeden z možných spolubydlících sálá fluor a druhý považuje za normální teplotu svého okolí 860 °C, zdvořile jsem „příjemné" spolubydlení odmítl.

Naštěstí byl ředitelem hotelu Vygont, který si dobře pamatoval, jaké služby jsem jim kdysi prokázal, a vynasnažil se mě přece jen ubytovat. Vždyť bych si při přenocování v mezihvězdném prostoru mohl snadno uhnat zápal plic. Po chvilce přemýšlení přikázal recepčnímu:

— Ubytujte ho v pokoji číslo 1.

— Ale kam dám hosta z jedničky, ptal se recepční.

— Přestěhujte ho do pokoje číslo 2. Hosta z čísla 2 dejte do čísla 3, hosta z čísla 3 do čísla 4 atd.

Teprve teď jsem náležitě ocenil neobyčejné vlastnosti hotelu. Kdyby měl pouze konečný počet pokojů, musel by se host z posledního pokoje odebrat do mezihvězdného prostoru. Avšak díky tomu, že pokojů bylo nekonečně mnoho, měli všichni místa a já jsem se mohl ubytovat, aniž bych některého z kosmozoologů připravil o pokoj.

Nedivil jsem se, když mě druhého dne ráno požádali, abych se přestěhoval do pokoje číslo 1 000 000. Se zpožděním přijeli totiž ještě kosmozoologové z galaxie VSK — 3472 a bylo třeba ubytovat ještě 999 999 hostů. Když jsem však třetího dne zašel do recepce zaplatit za ubytování, zatmělo se mi před očima. K recepci se táhla fronta, jejíž konec se ztrácel kdesi v mracích Magellanových. Ze zástupu bylo slyšet hlasy:

„Vyměním dvě známky mlhoviny Andromedy za známku Siria".

„Má někdo známku Velryby z 57. roku kosmické éry?" Nechápavě jsem se obrátil k recepčnímu s otázkou:

— Co je to za hosty?

— Mezigalaktický sjezd filatelistů.

— A je jich hodně?

— Nekonečně mnoho — z každé galaxie jeden zástupce.

— Ale jak je ubytujete, vždyť kosmozoologové odjíždějí až zítra?

— Nevím, bude se to teď řešit na pětiminutovce u ředitele.

Avšak úkol byl značně složitý a pětiminutovka se protáhla na celou hodinu (což se často stává i na Zemi). Konečně recepční přišel od ředitele a začal s rozmisťováním hostů. Nejprve nařídil přestěhovat hosta z pokoje číslo 1 do pokoje číslo 2. Zdálo se mi to divné, neboť z vlastní zkušenosti jsem věděl, že takovým přemístěním se uvolní pouze jeden pokoj, kdežto filatelistů nebylo ani málo ani mnoho — ale nekonečně mnoho. Recepční však pokračoval v příkazech:

— A hosta z čísla 2 přestěhujte do čísla 4, hosta z čísla 3 do čísla 6 a obecně hosta z čísla $n$ do čísla $2n$.

Nyní již byl jeho plán jasný: tímto způsobem uvolnil nekonečnou množinu pokojů s lichými čísly a mohl v nich ubytovat filatelisty. V pokojích se sudými čísly pak bydleli zoologové a v lichých pokojích filatelisté. (O sobě nehovořím — za tři dny jsem se s kosmozoology tak spřátelil, že mě zvolili čestným předsedou sjezdu a spolu s nimi jsem musel opustit zabydlený pokoj a přestěhovat se z čísla 1 000 000



do čísla 2 000 000). A můj známý filatelista, který stál v řadě na 574. místě, dostal pokoj č. 1147. Obecně filatelista stojící na $n$-tém místě dostal pokoj číslo $2n - 1$.

Druhého dne se obtíže s ubytováním zlepšily. Sjezd kosmozoologů skončil a jeho účastníci se rozjeli do svých domovů. Já jsem se přestěhoval k řediteli hotelu, v jehož bytě se uvolnil jeden pokoj. Avšak to, co je výhodné pro hosty, nemusí být uspokojivé pro vedení hotelu. Za několik dní můj hostitel zesmutněl.

— Co se děje, zeptal jsem se ho.

— Polovina pokojů je prázdná. Neplníme finanční plán.

Ne zcela jsem chápal, jaký finanční plán má na mysli, když se platí za nekonečný počet pokojů, ale přesto jsem poradil.

— Přestěhujte hosty tak, aby byly všechny pokoje obsazené. Ukázalo se, že to lze udělat velmi jednoduše. Filatelisté obývali pouze liché pokoje: 1., 3., 5., 7., 9. atd. Hosta z pokoje č. 1 ponechali na místě. Hosta z čísla 3 přestěhovali do čísla 2, hosta z čísla 5 do čísla 3, hosta z čísla 7 do čísla 4 atd. Tak se podařilo všechny pokoje obsadit, ačkoliv nikdo nový nepřijel.

Ředitelovy nesnáze tím však neskončily. Ukázalo se, že Vygonti se neomezili na výstavbu hotelu „Kosmos". Neúnavní budovatelé postavili ještě nekonečnou množinu hotelů, z nichž každý měl nekonečný počet pokojů. Při tom však rozebrali tolik galaxií, že porušili mezigalaktickou rovnováhu, což mohlo mít velmi vážné následky. Byli vyzváni, aby všechny hotely kromě našeho zrušili a použitý materiál vrátili na místo. Splnění tohoto příkazu bylo ztíženo tím, že všechny hotely včetně našeho byly plně obsazeny. Vedení hotelu čekal tedy úkol umístit do jediného a k tomu ještě plně obsazeného hotelu všechny hosty z nekonečně mnoha hotelů, z nichž v každém bydlelo nekonečně mnoho hostů.

— Už toho mám dost! zvolal ředitel. — Nejprve jsem v plně obsazeném hotelu ubytoval ještě jednoho hosta, potom ještě 999 999 hostů, pak ještě nekonečně mnoho hostů;

a teď chtějí, aby se do něho vešlo ještě nekonečně mnoho skupin o nekonečně mnoha návštěvnících. Ne, hotel není z gumy, ať si je dají, kam chtějí!

Ale příkaz je příkaz a za pět dní mělo být vše připraveno k přijetí nových hostů. V tyto dny nikdo v hotelu nepracoval — všichni přemýšleli, jak úkol splnit. Byla vyhlášena soutěž, jejíž vítěz měl zajištěnu turistickou cestu po jedné z galaxií. Ale všechna navrhovaná řešení byla zamítnuta jako nevyhovující. Pomocný kuchař navrhl ponechat hosta v prvním pokoji na místě, hosta z druhého pokoje přemístit do pokoje číslo 1001, hosta z třetího pokoje do čísla 2001 atd. Potom ubytovat v našem hotelu hosty z druhého hotelu do pokojů s čísly 2, 1 002, 2 002 atd., hosty z třetího hotelu do pokoje s čísly 3, 1 003, 2 003 atd. Návrh byl zamítnut, protože již hosté z prvního tisíce hotelů obsadí všechny pokoje a nebude místo pro hosty z 1 001. hotelu.

Vzpomněl jsem si přitom, jak se císař Tiberius uštěpačně zeptal římských senátorů, kteří mu navrhovali, aby na jeho počest byl měsíc září přejmenován na měsíc „tiberius" (předcházející měsíce se již jmenovaly podle císařů Julia a Augusta): „A co navrhnete třináctému císaři?"

Poměrně dobrý návrh podal účetní hotelu. Radil využít vlastností geometrické posloupnosti a ubytovat hosty takto: obyvatele prvního hotelu umístit do pokojů s čísly 2, 4, 8, 16, 32 atd. (tato čísla tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 2). Hosty z druhého hotelu do pokojů s čísly 3, 9, 27, 81 atd. (tato čísla tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 3). A takto pokračoval i s hosty dalších hotelů. Ředitel se ho však zeptal:

— A pro třetí hotel je třeba použít posloupnosti s kvocientem 4?

— Samozřejmě, odpověděl účetní.

— Pak nám to nepomůže, vždyť čtvrtý pokoj již obývá host z prvního hotelu a teď tam máme ubytovat ještě někoho ze třetího hotelu.



Nyní bylo na mně, abych ukázal, že se na Hvězdné akademii nestuduje pět let matematika zbytečně.

— Využijte prvočísel! Ubytujte hosty prvního hotelu v pokojích s čísly 2, 4, 8, 16, ..., hosty druhého hotelu v pokojích 3, 9, 27, 81, ..., hosty třetího hotelu v pokojích 5, 25, 125, 625, ..., hosty čtvrtého hotelu v pokojích 7, 49, 343, ...

— Nebudeme muset opět ubytovat v jednom pokoji dva hosty, zeptal se ředitel.

— Ne! Vždyť pro žádná dvě různá prvočísla nejsou žádné jejich mocniny s přirozenými mocniteli stejné: Jsou-li $p$ a $q$ prvočísla, přičemž platí $p \neq q$, a jsou-li $m$ a $n$ přirozená čísla, pak je $p^m \neq q^n$.

Ředitel se mnou souhlasil a hned navržený způsob zdokonalil tak, že stačila dvě prvočísla: 2 a 3. Navrhl totiž ubytovat hosta z $m$-tého pokoje $n$-tého hotelu v pokoji číslo $2^m.3^n$. Využil přitom toho, že je-li $m \neq p$ nebo $n \neq q$, je $2^m.3^n \neq 2^p.3^q$. V žádném pokoji nebudou proto dva hosté.

Tímto návrhem byli všichni nadšeni. Řešil úlohu, která se zdála být neřešitelnou. Vypsanou odměnu jsem však nedostal ani já ani ředitel — při použití našich návrhů by zůstalo mnoho pokojů volných (u mého návrhu to byly pokoje číslo 6, 10, 12 a obecně všechny pokoje, jejichž čísla nebyla mocninami prvočísel, a u ředitelova návrhu všechny pokoje, jejichž čísla nelze zapsat ve tvaru $2^m.3^n$, kde $m$ a $n$ jsou přirozená čísla.* Nejlepší řešení navrhl jeden z filatelistů — předseda matematické akademie galaxie Labutí.

Podle jeho rady se nejdříve sestaví tabulka, jejíž řádky se očíslují čísly hotelů a její sloupce čísly pokojů. Na příklad v průsečíku čtvrté řádky a šestého sloupce se zapíše šestý pokoj čtvrtého hotelu. Zde je tato tabulka (či přesněji, její

*) Zkuste sami určit pět nejmenších čísel pokojů, které by zůstaly neobsazeny podle ředitelova návrhu!

levá horní část, neboť k zápisu celé tabulky je třeba n konečně mnoho řádků a nekonečně mnoho sloupců):

$$
\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \dots & (1,n) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \dots & (2,n) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \dots & (3,n) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \dots & (4,n) & \dots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \dots & (5,n) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(m,1) & (m,2) & (m,3) & (m,4) & (m,5) & \dots & (m,n) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

— A teď přidělujte pokoje po čtvercích, řekl matemati -filatelista.

— Jak? Nechápal ředitel.

— Po čtvercích! V pokoji číslo 1 se ubytuje host z mís (1,1), tj. z prvního pokoje prvního hotelu; v pokoji číslo se ubytuje host z místa (1,2), tj. z druhého pokoje prvníh hotelu, v čísle 3 pak host z místa (2,2), tj. z druhého poko druhého hotelu a v čísle 4 host z místa (2,1), tj. z prvníh pokoje druhého hotelu. Tím se podaří ubytovat hosty z l vého horního čtverce o straně 2. V čísle 5 pak umístím hosta z (1,3), v čísle 6 hosta z (2,3), a tak dále.

A na kousku papíru načrtl toto schéma rozmístěn

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & \dots & (1,n) & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \dots & (2,n) & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \dots & (3,n) & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & \dots & (4,n) & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & \dots & (5,n) & \dots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & (n,5) & \dots & (n,n) & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$



— A bude opravdu místo pro všechny, zapochyboval ředitel.

— Určitě. Vždyť v prvních $n^2$ pokojích ubytujeme podle tohoto schématu všechny hosty z prvních $n$ pokojů každého z prvních $n$ hotelů. Dříve či později dostane proto každý host jeden pokoj. Například host z 217. pokoje 136. hotelu dostane pokoj v 217. kroku. Dokonce je snadné zjistit číslo jeho pokoje. Je to pokoj číslo $217^2 - 136 + 1$. Obecně, host z $n$-tého pokoje $m$-tého hotelu dostane pokoj číslo $(n - 1)^2 + m$, je-li $n \geqq m$ a pokoj číslo $m^2 - n + 1$, je-li $n < m$.

Tento návrh byl uznán za nejlepší — všichni hosté ze všech hotelů byli ubytováni v našem hotelu a žádný pokoj nezůstal prázdný. Matematik-filatelista získal vyhlášenou odměnu — poukaz na turistickou cestu do galaxie LCR — 287.

Na oslavu tak úspěšného rozmístění hostů uspořádal ředitel hotelu recepci a pozval na ni všechny hosty. Ani tato recepce se neobešla bez nesnází. Hosté ze sudých čísel pokojů se opozdili o půl hodiny a když se objevili, zjistilo se, že jsou už všechny židle obsazeny, ačkoliv hostitel připravil po jedné židli pro každého hosta. Muselo se čekat, dokud si všichni nepřesedli na nová místa a neuvolnili potřebný počet židlí (žádná nová židle přitom nebyla do sáhu přinesena). Zato ale každý host dostal dvě porce zmrzliny, ačkoliv kuchaři připravili pro každého právě jednu porci. Doufám, že čtenář pochopí, jak k tomu došlo.

Po recepci jsem nastoupil do své fotonové rakety a odletěl na Zemi. Musel jsem přece říci všem pozemským kosmonautům o novém kosmickém útočišti. Kromě toho jsem si chtěl pohovořit s nejvýznačnějšími matematiky Země a se svým přítelem Tarantogou o vlastnostech nekonečných množin.

## Autorova poznámka

Tím se s naším hrdinou dočasně rozloučíme. Mnohé v jeho vyprávění vyvolává pochybnosti — vždyť podle zákonů teorie relativity nelze přenášet signály s rychlostí větší než 300 000 kilometrů za vteřinu. Proto už jenom splnění prvního příkazu by trvalo nekonečně dlouho. Nechtějme však od Ijona Tichého příliš mnoho — při svých cestách zažil již mnohem nepravděpodobnější příhody.

Další část knihy je věnována vyprávění o teorii nekonečných množin. A třebaže se příběhy nebudou odehrávat v mezihvězdném prostoru, ale v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ nebo ve čtverci o straně 1, ukáží se mnohé z nich neméně neobyčejnými.

## Jak porovnávat množiny

V 1. kapitole jsme se zajímali o vlastnosti, kterými se vyznačují jak množiny konečné, tak i množiny nekonečné. Nyní se budeme zabývat vlastnostmi, které jsou charakteristické pouze pro nekonečné množiny. Z vyprávění Ijona Tichého již víme, že tyto vlastnosti se výrazně liší od vlastností konečných množin. Jevy, které nejsou možné u konečných množin, se mohou vyskytovat u množin nekonečných.

První otázka, kterou se nyní budeme zabývat, je problém vzájemného porovnávání nekonečných množin. U konečných množin nejrůznější povahy lze vždy říci, které z nich obsahují více prvků a které méně. Pro nekonečné množiny je tato otázka mnohem složitější. Čeho je například více, přirozených čísel nebo racionálních čísel nebo reálných čísel? Kde je více bodů, na úsečce nebo na celé přímce, na přímce nebo ve čtverci?



Na první pohled se zdá, že odpovědět na tyto otázky je docela jednoduché. Vždyť množina přirozených čísel je částí množiny racionálních čísel a úsečka je částí přímky. Není tedy zřejmé, že přirozených čísel je méně než racionálních a že bodů na úsečce je méně než bodů na přímce? Ukazuje se, že to není zřejmé. Vždyť odnikud neplyne, že při přechodu k nekonečným množinám zůstanou zachovány zákonitosti zjištěné studiem konečných množin; že například bude zachována platnost tvrzení „část je menší než celek".

A ještě důležitější je to, že již samotné porovnání počtu prvků nekonečných množin podle toho, zda jedna množina je částí druhé, je předem odsouzeno k nezdaru*). Například, kde je více bodů: ve čtverci nebo na celé nekonečné přímce? Vždyť nelze vložit ani čtverec do přímky ani přímku do čtverce. Je sice možné rozdělit přímku na úsečky o délce rovné délce strany čtverce a pak položit každou úsečku do čtverce tak, aby se vzájemně neprotínaly. Ale co když je také možné rozložit čtverec na takové části, že lze pak tyto části položit na přímku tak, aby se žádné dvě nedotýkaly? A kolik je nekonečných množin, z nichž jedna není částí druhé! Množina čtverců v rovině a množina kruhů v téže rovině nemají žádný prvek společný. Jak je porovnávat? Jak zjistit, čeho je ve vesmíru více — atomů dusíku nebo kyslíku?

Úloha je tedy zadána. Nejdříve vyjasníme, v jakých případech se má říkat, že jedna množina má stejný počet prvků jako druhá. Jinými slovy, objasníme, v jakých případech mají dvě nekonečné množiny „stejně mnoho" prvků.

*) K témuž nezdaru je ovšem odsouzeno i porovnávání počtu prvků konečných množin podle uvedeného příznaku (pozn. překl.).

## Na tanečním parketu

Pro konečné množiny je úloha porovnání dvou množin snadno řešitelná. Stačí prvky obou množin spočítat a dostaneme-li stejné výsledky, znamená to, že obě množiny mají stejně mnoho prvků. Pro nekonečné množiny se však takový způsob nehodí, neboť začneme-li přepočítávat prvky nekonečné množiny, riskujeme, že tomu zasvětíme celý život a přesto započaté dílo nedokončíme*).

Avšak ani u konečných množin není metoda přepočítání ve všech případech účelná. Pojďme třeba na taneční parket. Jak zjistíme, je-li zde stejně mnoho mládenců a dívek? Mohli bychom ovšem požádat, aby se mládenci postavili na jednu stranu a dívky na druhou a pustit se do sčítání jedněch i druhých. Ale tím jednak získáme zbytečnou informaci, neboť nás nezajímá, kolik je zde mládenců a dívek, ale pouze zda jich je stejně mnoho a jednak, mladí si přišli zatančit a ne stát a čekat, až je spočítáme.

Splníme tedy jejich přání a požádáme orchestr, aby zahrál nějaký tanec, který všichni umějí. Mládenci požádají dívky o tanec a ... naše úloha bude vyřešena. Ukáže-li se, že všichni mládenci a všechny dívky tančí, tj. že mládež se rozdělila na tančící páry, bude zřejmé, že na tanečním parketu je mládenců stejně mnoho jako dívek.

Zcela stejným způsobem lze zjistit, zda počet diváků v divadle je stejný jako počet sedadel. Jsou-li při představení všechna místa obsazena, přičemž žádný divák nestojí v uličce a na každém sedadle sedí pouze jeden divák, můžeme si být jisti, že diváků je stejně mnoho jako sedadel v hledišti.

*) To se nám ovšem může u konečné množiny stát také (pozn. překl.).



## Ke každému přílivu jeden odliv

Poznali jsme způsob, jak zjistit, že dvě konečné množiny mají stejně mnoho prvků, aniž počítáme jejich prvky. Tohoto způsobu lze užít i pro nekonečné množiny. Nemůžeme však již použít orchestru, ale musíme z prvků dvou porovnávaných množin utvořit „taneční páry“ sami.

Mějme tedy dány dvě množiny A a B. Řekneme, že jsme mezi nimi (nebo také mezi jejich prvky) utvořili *vzájemně jednoznačné přiřazení,**) jestliže jsme z prvků těchto množin utvořili uspořádané dvojice $(a, b)$ takovým způsobem, že

1) prvek $a$ patří do množiny A a prvek $b$ do množiny B;
2) každý prvek z obou množin patří do jedné a jen jedné dvojice.

Například, skládá-li se množina A z mládenců na tanečním parketu a množina B z dívek na témž parketu, vytvářejí se dvojice $(a, b)$ ze spolu tančících mládenců a dívek. Tvoří-li množinu A diváci a množinu B sedadla v hledišti, pak je dvojice $(a, b)$ tvořena divákem a sedadlem, na kterém sedí.

Samozřejmě ne každé přiřazení mezi množinami je vzájemně jednoznačné. Je-li A množina všech stromů na Zemi a B množina všech plodů, které na nich rostou, je možné utvořit mezi těmito množinami například toto přiřazení: každému plodu přiřadíme strom, na kterém roste. Avšak toto přiřazení není vzájemně jednoznačné: na některých stromech roste více plodů a některé stromy nyní nerodí. Některé prvky $a$ (stromy) se budou proto vyskytovat ve více dvojicích a jiné prvky se nevyskytnou v žádné dvojici.

Existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dvěma konečnými množinami je ekvivalentní s tím, že obě mají stejně mnoho prvků. Snad nejdůležitějším mezníkem v teorii množin byl okamžik, kdy se Cantor rozhodl použít pojmu

*) Často se také říká zobrazení (pozn. překl.).

vzájemně jednoznačného přiřazení k porovnávání nekonečných množin.

Jinými slovy, podle Cantora mají dvě (třeba i nekonečné) množiny **A** a **B** „stejně mnoho" prvků, jestliže mezi nimi existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Obvykle však matematici neříkají, že „množiny **A** a **B** mají stejně mnoho prvků", ale že „množiny **A** a **B** mají stejnou *mohutnost*" nebo, že „množiny **A** a **B** jsou *ekvivalentní*".

U nekonečných množin znamená tedy slovo „mohutnost" totéž, co u konečných množin znamená „počet prvků".

Ještě před Cantorem dospěl k pojmu vzájemně jednoznačného zobrazení pražský vědec Bernard Bolzano. Avšak Bolzano ustoupil před obtížemi, ke kterým tento pojem vedl. Jak brzy uvidíme, po přijetí principu porovnávání nekonečných množin pomocí vzájemně jednoznačného přiřazení je třeba rozloučit se s mnohými dogmaty.

## Je část rovna celku?

Základní „dogma", které bylo třeba zavrhnout, bylo pravidlo, přijaté na samém počátku rozvoje matematiky: *„Část je menší než celek"*. Toto pravidlo nepochybně platí pro konečné množiny, avšak pro nekonečné množiny platit přestává. Vzpomeňte si, jak ředitel neobyčejného hotelu ubytoval kosmozoology v sudých pokojích. Při tomto rozmístění se host z pokoje číslo $n$ přestěhoval do pokoje číslo $2n$. Jinými slovy, ubytování se řídilo tímto schématem

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 \ldots & n \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 \ldots & 2n \ldots \end{array}$$



Tímto schématem je však určeno vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech přirozených čísel

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

a její částí — množinou sudých čísel

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

A my jsme se dohodli, že množiny, mezi kterými existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, považujeme za množiny ekvivalentní. Množina všech přirozených čísel má tudíž „stejně mnoho" prvků jako její část — množina všech sudých přirozených čísel.

Stejně tak lze najít vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou všech přirozených čísel a množinou všech čísel tvaru

$$10, 100, 1\,000, 10\,000, \ldots$$

Stačí přiřadit každému přirozenému číslu $n$ číslo $10^n$:

$$n \to 10^n.$$

Tím je žádané vzájemně jednoznačné zobrazení určeno.

Opět stejným způsobem lze určit vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou všech přirozených čísel a množinou všech druhých mocnin přirozených čísel

$$n \to n^2,$$

nebo množinou všech třetích mocnin přirozených čísel

$$n \to n^3,$$

atd.

Obecně, mezi množinou všech přirozených čísel a její libovolnou nekonečnou částí vždy existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Stačí seřadit čísla této části podle velikosti a očíslovat je.

Ostatně, ne nadarmo se říká — nic nového pod sluncem; nové, to je pouze dobře zapomenuté staré. Již na počátku 17. století přemýšlel Galileo Galilei o paradoxech nekonečna a objevil možnost vzájemně jednoznačného přiřazení mezi množinou všech přirozených čísel a množinou všech jejich druhých mocnin. V jeho knize „Besedy a matematické důkazy vztahující se k mechanice pohybu“ (1638) je uveden dialog, ve kterém Salviati, vyjadřující myšlenky samotného Galilea, říká: To, co jsme řekli, se vztahuje k těm obtížím, které vznikají v důsledku toho, že, uvažujíce naším omezeným rozumem o nekonečnu, přisuzujeme nekonečnu vlastnosti, které nacházíme u věcí konečných a omezených. To je však nesprávné, neboť takové vlastnosti jako být větší, být menší a rovnost jsou nepoužitelné pro nekonečno — nelze říkat, že jedno nekonečno je větší nebo menší než jiné nekonečno, nebo že je mu rovno“.

Na podporu své myšlenky Salviati uvádí, že na jedné straně „druhých mocnin je tolik, kolik je základů, neboť každá druhá mocnina má svůj základ a každý základ má svou druhou mocninu; ani jedna mocnina nemůže mít více než jeden základ a ani jeden základ nemůže mít více než jednu druhou mocninu...*)

Přitom počet všech základů je roven počtu všech čísel vůbec, neboť není žádné číslo, které by nemohlo být základem nějaké druhé mocniny. Po tomto zjištění nezbývá než říci, že počet všech druhých mocnin je stejný jako počet všech čísel ...“

Na druhé straně Salviati poznamenává, že „počet všech čísel dohromady — čísel, která jsou druhými mocninami a čísel, která nejsou druhými mocninami — je větší než počet pouze samotných druhých mocnin“, přičemž „jak postupujeme ke stále větším číslům, počet druhých mocnin ve značné míře stále ubývá“. Jako jediné východisko z objeveného protikladu nabízí Salviati toto:

„Nevidíme žádnou jinou možnost řešení, než uznat, že počet všech čísel vůbec je nekonečný, že počet všech druhých mocnin je nekonečný a že počet všech základů je také nekonečný. Nelze říci, že počet druhých mocnin je menší než počet všech čísel a že počet všech čísel je větší: vlastností rovnosti a také vlastností být větší a být menší nelze užívat tam, kde se jedná o nekonečnu, ale pouze tam, kde se jedná o konečná množství“.

*) Zde jde pouze o přirozená čísla.



Vidíme, že ve skutečnosti Galilei znal myšlenku vzájemně jednoznačného přiřazení a věděl, že existuje takové přiřazení mezi množinou všech přirozených čísel a mezi množinou všech druhých mocnin přirozených čísel, a že lze proto považovat tyto množiny za množiny mající stejný počet prvků. Chápal také to, že u nekonečných množin může být část rovna celku. Z toho však udělal nesprávný závěr, že všechna nekonečna jsou „stejná“. Uvažoval pouze o nekonečných podmnožinách množiny všech přirozených čísel, jejichž prvky lze očíslovat.

Galilei si nemohl představit, že prvky množiny všech bodů úsečky nelze očíslovat přirozenými čísly (což za nedlouho ukážeme). Podobně jako starověcí atomisté předpokládal, že úsečka se skládá z nekonečného počtu atomů, které lze očíslovat.

## Spočetné množiny

Všechny množiny, které jsou ekvivalentní množině všech přirozených čísel, se nazývají ***spočetné množiny***. O množině tedy říkáme, že je spočetná, jestliže je nekonečná, ale všechny její prvky lze očíslovat přirozenými čísly. Například množina všech sudých čísel, množina všech lichých čísel, množina všech prvočísel a obecně libovolná nekonečná část množiny přirozených čísel jsou spočetné množiny.

Chceme-li dokázat spočetnost některých množin, musíme někdy projevit určitou dávku vynalézavosti. Vezměme například množinu všech celých čísel (záporných i nezáporných):

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Pokusíme-li se očíslovat je podle velikosti počínaje od nějakého čísla, pak zůstanou neočíslována všechna čísla, nacházející se před vybraným číslem. Abychom při očíslování nevynechali žádné číslo, je třeba zapsat prvky této množiny do dvou řádků:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots \end{array}$$

a očíslovat je po sloupcích. Přitom číslo 0 bude první, číslo $-1$ druhé, číslo 1 třetí, číslo $-2$ čtvrté atd. Jinými slovy, nula a všechna kladná čísla budou očíslována lichými čísly a všechna záporná čísla sudými čísly. Podobá se to tomu, jak ředitel hotelu obsazeného kosmozoology ubytoval všechny filatelisty.

Je sice snadné ověřit, že množina všech celých čísel je spočetná, avšak přesvědčit se, že množina všech racionálních čísel je rovněž spočetná, bude složitější. Racionální čísla jsou totiž rozložena velmi hustě — mezi libovolnými dvěma racionálními čísly se najde ještě nekonečně mnoho jiných racionálních čísel. Není proto vůbec jasné, jak je očíslovat; zdá se, že mezi každými dvěma čísly je třeba očíslovat ještě nekonečně mnoho čísel a že tento postup nikdy neskončí. Skutečně se ukazuje, že racionální čísla nelze očíslovat podle velikosti přirozenými čísly.

Upustíme-li však od očíslování racionálních čísel podle velikosti, podaří se nám je očíslovat. Uděláme to takto: vypíšeme nejprve všechny kladné zlomky se jmenovatelem 1, potom všechny kladné zlomky se jmenovatelem 2, pak se jmenovatelem 3 atd. Dostaneme tabulku tohoto tvaru:



$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots \\ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \ldots \\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Je zřejmé, že každé kladné racionální číslo se v této tabulce vyskytuje a ne jen jednou. Číslo 3 se například vyskytuje jak ve tvaru $\frac{3}{1}$, tak ve tvaru $\frac{6}{2}$, tak i ve tvaru $\frac{9}{3}$.

Nyní přistoupíme k očíslování. Vzpomeneme si na poslední hrdinský čin ředitele neobyčejného hotelu, který v něm ubytoval všechny hosty z nekonečně mnoha takových hotelů. Použil tehdy očíslování po čtvercích. Stejným způsobem budeme postupovat i my, pouze s tím rozdílem, že některé zlomky budeme vynechávat (například, zlomky $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ atd. vynecháme, neboť zlomek $\frac{1}{1}$ už bude očíslován: všechny tyto zlomky vyjadřují totéž číslo).

Očíslujeme kladná racionální čísla v tomto pořadí:

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Tím jsme očíslovali všechna kladná racionální čísla. Nyní je již snadné pochopit, jak se očíslují všechna (záporná i nezáporná) racionální čísla. Stačí zapsat odděleně kladné a záporné zlomky ve tvaru dvou tabulek a čísla jedné tabulky očíslovat sudými čísly a čísla druhé tabulky lichými čísly (a ponechat ještě jedno číslo pro nulu).

Obecně sjednocením spočetně mnoha spočetných množin dostaneme opět spočetnou množinu. Dá se to dokázat stejným způsobem — očíslováním „po čtvercích".

## Algebraická čísla

Podařilo se nám očíslovat všechna racionální čísla. Avšak racionální čísla se získají z přirozených čísel pomocí pouze jedné operace — pomocí dělení (a případně změnou znaménka). Nyní přidáme ještě operaci odmocňování a budeme vyšetřovat množinu všech čísel, která lze získat z přirozených čísel pomocí této operace a základních početních výkonů. Mezi těmito čísly budou taková čísla jako $\sqrt[3]{2}+1$, $\sqrt[4]{3-\sqrt{5}}$ a dokonce taková „monstra" jako

$$\sqrt[7]{\frac{\sqrt[15]{147+\sqrt{3}}-\sqrt[14]{6+\sqrt{2}}}{\sqrt[21]{289-\sqrt[5]{4+\sqrt{2}}}+1}}.$$

Vzniká otázka, zda je možné očíslovat také množinu všech těchto čísel. Zdá se, že to bude ještě obtížnější, než bylo očíslování množiny všech racionálních čísel. Opravdu, kterému z čísel $\sqrt[3]{2}$ a $\sqrt{3}$ máme přiřadit menší číslo? Ukazuje se však, že i tato množina je spočetná, tj., že její prvky lze očíslovat.

Abychom mohli toto tvrzení dokázat, všimneme si nejprve toho, že každé číslo uvedeného tvaru je kořenem nějaké algebraické rovnice tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

kde $a_0 \neq 0$ a kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. Například, číslo $\frac{3}{7}$ je kořen rovnice $7x - 3 = 0$, číslo $\sqrt[3]{5}$ je kořen rovnice $x^3 - 5 = 0$ a číslo $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}$ je kořen rovnice $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11 = 0$. Někdy je obtížné najít rovnici, jejímž kořenem je dané číslo uvedeného tvaru, nicméně je to vždy možné. Zkuste sami najít rovnici, jejímž kořenem je číslo

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}.$$

Všimněme si, že zdaleka ne všechny kořeny rovnic tvaru (1), kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou celá čísla, lze vyjádřit čísly získanými z přirozených čísel základními početními výkony a odmocňováním. Například kořeny rovnice

$$x^5 - 3x + 3 = 0$$

nelze takto vyjádřit. Všechna čísla, která jsou kořeny rovnic tvaru (1) s celočíselnými koeficienty, se nazývají *algebraická* čísla. Množina všech algebraických čísel obsahuje tudíž množinu všech těch čísel, která lze získat z přirozených čísel pomocí základních aritmetických operací a odmocňování. Podaří-li se nám očíslovat všechna algebraická čísla, odpovíme tím také na otázku položenou na začátku tohoto odstavce.

Avšak dříve než očíslujeme algebraická čísla, musíme očíslovat samotné algebraické rovnice tvaru (1). A tím bude již úloha řešena, neboť každá algebraická rovnice $n$-tého stupně má nejvýše $n$ různých kořenů. Stačí tedy — potom co budou všechny rovnice s celočíselnými koeficienty očíslovány — sestavit tabulku, v jejíž první řádce budou všechny různé kořeny první rovnice, v jejíž druhé řádce budou všechny různé kořeny druhé rovnice, které se nevyskytují v první řádce, v jejíž třetí řádce budou všechny různé kořeny třetí rovnice, které se nevyskytují ani v první ani ve druhé řádce, atd. Tabulka bude vypadat takto:

$$\begin{array}{l} a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to \\ \to b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_l \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \to c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_m \to \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nyní je zřejmé, jak je možné všechna čísla této tabulky očíslovat (v pořadí naznačeném šipkami).

Zbývá tedy očíslovat prvky množiny všech algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty. Můžeme to udělat dvěma způsoby. Jeden způsob spočívá v tom, že se každé rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

přiřadí její „výška", což je číslo

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Například výška rovnice $2x^4 - 3x + 5 = 0$ je

$$h = 4 + 2 + 0 + 0 + 3 + 5 = 14.$$

Počet všech rovnic dané výšky je zřejmě konečný. Například výšku 2 mají dvě rovnice: $x = 0$ a $-x = 0$, výšku 3 má šest rovnic: $x^2 = 0$, $-x^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $-x + 1 = 0$ a $-x - 1 = 0$. A nyní očíslujeme rovnice takto: Nejdříve očíslujeme všechny rovnice výšky 2 (žádné rovnice výšky 1 nejsou), potom očíslujeme všechny rovnice výšky 3, pak rovnice výšky 4 atd. Začátek tohoto číslování má tento tvar:

| $N$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x = 0$ | $-x = 0$ | $x^2 = 0$ | $-x^2 = 0$ | $x + 1 = 0$ |
| $N$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | $x - 1 = 10$ | $-x + 1 = 0$ | $x - - 1 = 0$ | $x^3 = 0$ | $x -^{3} = 0$ |



Nakonec budou všechny rovnice očíslovány a pak již — jak je uvedeno výše — není obtížné očíslovat i všechna algebraická čísla.

Popsaný způsob číslování rovnic má tu nevýhodu, že je obtížné říci, jaké číslo přísluší dané rovnici (ačkoli i tato úloha je samozřejmě řešitelná). Druhý způsob je založen na myšlence, které se pokoušel užít k řešení své nejobtížnější úlohy ředitel hotelu. Připomeňme, že navrhl použít čísel tvaru $2^n . 3^m$. K řešení naší úlohy je třeba užít všech prvočísel. Čtenář samozřejmě ví, že libovolné přirozené číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součin prvočísel.

Budeme postupovat takto: Nejdříve očíslujeme všechna celá čísla, což jsme již učinili na str. 84. Pořadové číslo celého čísla $a$ označíme symbolem $\mathbf{a}$. Každé rovnici tvaru

$$a_0x^n + \ldots + a_n = 0$$

(kde, připomeňme, $a_0, \ldots, a_n$ jsou celá čísla, $a_0 \neq 0$) přiřadíme číslo

$$2^{\mathbf{a}_n} . 3^{\mathbf{a}_{n-1}} \ldots p_{n+1}^{\mathbf{a}_0}$$

(symbol $p_{n+1}$ značí $(n + 1)$-ní prvočíslo). Například, rovnici $2x^2 - 2 = 0$ přiřadíme číslo $2^4 . 3^1 . 5^5 = 150\,000$ (neboť celému číslu $-2$ je přiřazeno číslo 4, nule číslo 1 a celému číslu 2 číslo 5). Nyní má každá rovnice své číslo, přičemž různé rovnice mají různá čísla (každé $N$ se jednoznačně rozkládá na prvočinitele, tj. jednoznačně určuje čísla $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n-1}, \ldots, \mathbf{a}_0$; těmto číslům odpovídají jistá čísla $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ a těmi je určena jistá rovnice $a_0x^n + \ldots + a_n = 0$).

## ■ Osmičky v rovině

Metody, s jejichž pomocí jsme očíslovali všechna algebraická čísla, jsou použitelné i v jiných případech. Obecná situace je zde tato: Buď dána spočtená množina spočetných množin

$A_1, \dots, A_n, \dots$ Utvoříme všechny možné konečné „soubory“ prvků těchto množin, přičemž do žádného souboru nepatří více než jeden prvek z každé množiny $A_k$. Jinými slovy, každý soubor má tvar $(a_m, \dots, a_t)$, kde $a_m \in A_m, \dots$ $\dots a_t \in A_t$ (počet prvků v různých souborech může být různý, důležité je pouze to, že každý soubor se skládá z konečného počtu prvků). Potom je množina všech takových souborů spočetná.

K důkazu tohoto tvrzení stačí přiřadit každému souboru $(a_m, \dots, a_t)$ číslo

$$N = p_m^{\mathrm{a}_m} \dots p_t^{\mathrm{a}_t},$$

kde $p_m$ je podle velikosti $m$-té prvočíslo atd., $\mathrm{a}_m$ je pořadové číslo prvku $a_m$ v množině $A_m$ atd. (při našem označení index $m$ u prvku $a_m$ ukazuje, do které z množin tento prvek patří a nikoli jeho pořadové číslo v množině $A_m$). Tytéž úvahy jako v případě algebraických rovnic ukazují, že při tomto přiřazení budou různým souborům odpovídat různá čísla $N$, tj., že se podaří všechny soubory očíslovat. A přejeme-li si, můžeme to udělat i jinak: každému souboru $(a_m, \dots, a_t)$ přiřadíme jeho „výšku“ $h = n + \mathrm{a}_m + \dots$ $\dots + \mathrm{a}_t$ a očíslujeme nejprve soubory výšky 2, pak soubory výšky 3 atd.

Z dokázaného tvrzení vyplývá, že množina A, jejíž prvky lze zadat soubory tvaru $(a_1, \dots, a_n)$, kde prvky $a_1$ patří do spočetné množiny $A_1$, prvky $a_2$ do spočetné množiny $A_2$ atd., je sama spočetná nebo konečná. Mezi jinými je tedy patrné, že množina všech bodů roviny s racionálními souřadnicemi je spočetná: takové body jsou zadány soubory ze dvou racionálních čísel $(r_1, r_2)$ a množina racionálních čísel je spočetná.

Uveďme složitější příklad důkazu spočetnosti jisté množiny. Mějme v rovině zobrazena písmena T, přičemž žádná dvě písmena nemají žádné body společné (rozměry písmen mohou být libovolné — obr. 25).

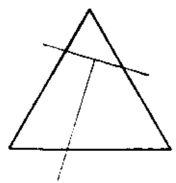
Ukážeme, že taková množina písmen je buď spočetná



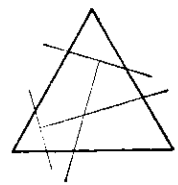
Obr. 25

nebo konečná. Za tímto účelem zvolíme v rovině soustavu souřadnic a každému písmenu přiřadíme trojúhelník o vrcholech s racionálními souřadnicemi, jehož jedna strana protíná „nožičku“ písmene T a jehož zbylé dvě strany protínají „boční větve“ příslušného písmene (obr. 26). Z obrázku 27 je patrné, že odpovídají-li dvě písmena T témuž trojúhelníku, musejí se protínat (mimochodem, jak tomu v matematice často bývá, přesný důkaz této skutečnosti není vůbec jednoduchý). Jelikož, podle naší podmínky, nemají žádná dvě písmena společné body, odpovídají různým písmenům různé trojúhelníky. Zbývá nám tudíž dokázat, že množina všech takto vybraných trojúhelníků je spočetná nebo konečná. A k tomu stačí všimnout si, že každý trojúhelník je určen svými třemi vrcholy $A$, $B$, $C$ a že každý vrchol je určen svými souřadnicemi. Jelikož jsme vybírali pouze vrcholy, jejichž obě souřadnice jsou racionál-

Obr. 26

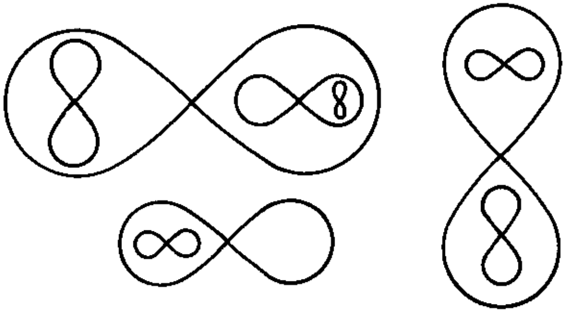


Obr. 27



ní, je každý trojúhelník zadán šesti racionálními čísly — souřadnicemi jeho vrcholů. A množina šestic racionálních čísel je spočetná. Množina všech trojúhelníků s „racionálními" vrcholy je tedy spočetná a množina trojúhelníků, které jsme pro naše písmena sestrojili, je pak spočetná nebo konečná. Je tudíž spočetná nebo konečná i množina samotných písmen.

Stejným způsobem se dá také dokázat, že množina vzájemně se neprotínajících osmiček v rovině (obr. 28) je spočetná nebo konečná.



Obr. 28

## Různě velké množiny

Již jsme objasnili, co znamenají slova „dvě množiny mají stejně mnoho prvků".

Nyní vysvětlíme, co znamená tvrzení „jedna množina má více prvků než druhá". U konečných množin to lze objasnit,



aniž bychom prvky množin sečetli. Vzpomeňme si na náš příklad s tanečním parketem.

Jestliže po té, kdy orchestr spustí a mládenci vyzvou dívky k tanci, zůstanou někteří neobratní mládenci bez partnerek, je zřejmé, že mládenců je více. Jestliže část dívek bude smutně pozorovat své tančící kamarádky, je zřejmé, že více je dívek.

V tomto případě jsme postupovali takto: Hledali jsme vzájemně jednoznačné přiřazení mezi jednou množinou a částí druhé množiny. Podařilo-li se to, vyplývalo z toho, že druhá množina má více prvků než první. Užívajíce tohoto postupu, snadno zjistíme, že například všech ryb v oceánu je méně než všech atomů na zeměkouli (třebaže jsou obě tyto množiny konečné, sotva lze jejich prvky spočítat). Stačí přiřadit každé rybě jeden atom jejího těla. Tím bude určeno vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami všech ryb a částí množiny všech atomů na zeměkouli.

Bohužel u nekonečných množin nelze postupovat tak jednoduše. Vždyť jsme již viděli, že množina může mít stejně mnoho prvků jako její část. Nelze tedy z pouhé skutečnosti, že množina **A** má stejně mnoho prvků jako část množiny **B**, učinit závěr, že množina **A** má méně prvků než množina **B**.

Budeme při našich závěrech skromnější a řekneme, že existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou **A** a částí množiny **B**, pak množina **B** má *nejméně tolik prvků* jako množina **A**. Dá se dokázat, že tento vztah má všechny dobré vlastnosti nerovností:

1) Každá množina **A** má nejméně tolik prvků jako sama tato množina.

2) Má-li množina **A** nejméně tolik prvků jako množina **B** a má-li množina **B** nejméně tolik prvků jako množina **C**, pak má množina **A** nejméně tolik prvků jako množina **C**.

3) Má-li množina **A** nejméně tolik prvků jako množina **B** a má-li zároveň množina **B** nejméně tolik prvků jako

množina A, pak obě množiny mají stejně mnoho prvků (tj. mezi těmito množinami existuje vzájemně jednoznačné přiřazení).

Může se stát, že množina B má nejméně tolik prvků jako množina A a že zároveň tyto množiny nejsou ekvivalentní. Jinými slovy, může se stát, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou A a částí $B_1$ množiny B a přitom neexistuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou A a celou množinou B. V takovém případě budeme říkat, že množina B má více prvků než množina A.

## Spočetné množiny jsou nejmenší z nekonečných množin

Již jsme hovořili o tom, že libovolná nekonečná část množiny přirozených čísel je spočetná. To však znamená, že nemůže existovat nekonečná množina, jejíž mohutnost by byla menší než mohutnost spočetné množiny. Nyní dokážeme, že každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu. Z toho pak plyne, že mohutnost spočetné množiny není větší než mohutnost libovolné nekonečné množiny, tj. že tato mohutnost je nejmenší z mohutností nekonečných množin.

Abychom vybrali z nekonečné množiny A spočetnou podmnožinu, budeme postupovat takto: Vybereme jeden prvek $x_1$ — to je možné, neboť množina A je nekonečná a není tedy v žádném případě prázdná. Dále je zřejmé, že vyjmutím jednoho prvku $x_1$ množinu A nevyčerpáme a můžeme z ní tedy vybrat druhý prvek $x_2$. Pak vybereme třetí prvek $x_3$ atd. Tímto způsobem vybereme z množiny A spočetnou množinu očíslovaných prvků

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$



Nevelkým zdokonalením tohoto postupu se dá dosáhnout toho, že po vybrání spočetné podmnožiny zbude z množiny A nekonečná množina. K tomu stačí vrátit všechny prvky množiny X se sudými indexy. Z množiny A jsme tak nakonec vybrali spočetnou podmnožinu.

$$Y = \{x_1, x_3, x_5 \ldots\},$$

a zbylá množina ještě obsahuje nekonečnou množinu $\{x_2, x_4, x_6, \ldots\}$ (a případně ještě mnoho dalších prvků).

Není obtížné dokázat tato tvrzení:

*Mohutnost nekonečné množiny se nezmění, přidáme-li k ní množinu spočetnou.*

*Mohutnost nespočetné množiny se nezmění, vyjmeme-li z ní množinu spočetnou.*

Tyto věty opět potvrzují, že spočetné množiny jsou nejmenší z nekonečných množin.

## Nespočetné množiny

Všechny doposud sestrojené množiny byly spočetné. To vyvolává domněnku: nejsou vůbec všechny nekonečné množiny spočetné? Kdyby tomu tak bylo, byl by život matematiků snadný: všechny nekonečné množiny by měly stejně mnoho prvků a žádná analýza nekonečna by nebyla zapotřebí. Ukázalo se však, že záležitost je mnohem složitější, nespočetné množiny existují a mohou mít různé mohutnosti. Jednu nespočetnou množinu všichni dobře známe — množinu všech bodů přímky. Avšak dříve než se budeme touto množinou zabývat, řekneme si o jiné množině A všech možných způsobů obsazení neobyčejného hotelu.

Všimneme si, že důkaz nespočetnosti nějaké množiny není vůbec snadný. K důkazu spočetnosti nějaké množiny stačí prostě najít předpis pro očíslování všech jejích prvků. Dokázat nespočetnost nějaké množiny znamená dokázat, že takový předpis neexistuje. Jinými slovy, ať si vymyslíme jakýkoli předpis, vždy zůstane alespoň jeden prvek neočíslovaný. Cantor vymyslel velmi vtipný způsob, jak dokazovat nespočetnost množin. Tento způsob dostal název diagonální proces (a ve skutečnosti jsme se s ním již setkali na str. 18). Cantorova metoda důkazu bude zřejmá z následujícího vyprávění Ijona Tichého.

## Nesepsaný seznam

Dosud jsem vyprávěl o úspěších ředitele neobyčejného hotelu: o tom jak se mu podařilo ubytovat v plně obsazeném hotelu ještě nekonečně mnoho hostů a potom ještě hosty nekonečně mnoha stejně neobyčejných hotelů. Jednou však i tohoto mága a kouzelníka potkal neúspěch.

Z ředitelství kosmických hotelů přišel příkaz sestavit seznam všech možných způsobů obsazení hotelových pokojů. Ředitelství požadovalo, aby seznam měl tvar tabulky, jejíž každá řádka by představovala jeden z možných způsobů. Přitom obsazené pokoje měly být představovány jedničkami a volné pokoje nulami. Například řádka

$$1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots$$

představuje způsob, při němž jsou všechny liché pokoje obsazeny a všechny sudé pokoje volné, řádka

$$1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ldots$$

zachycuje způsob, při němž jsou všechny pokoje obsazeny, a řádka

$$0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ldots$$

uvádí způsob vedoucí k úplnému finančnímu krachu — všechny pokoje jsou prázdné.



Ředitel byl zavalen prací, a proto vymyslel jednoduché východisko. Každé pokojské nařídil sepsat tolik způsobů obsazení, kolik má na starosti pokojů. Přitom učinil opatření, aby se jednotlivé způsoby neopakovaly. Za několik dní dostal ředitel tyto seznamy a shrnul je do jednoho seznamu.

— Jste si jist, že seznam je úplný, zeptal jsem se ředitele. Není nějaký způsob vynechán?

— Nevím, odpověděl. Jednotlivých způsobů je nekonečně mnoho a nechápu, jak bych mohl prověřit, zda není nějaký další.

A v tom mě něco napadlo (nebo možná trochu přeceňuji své schopnosti a bylo to prostě tím, že besedy o nekonečných množinách s profesorem Tarantogou ve mně zanechaly nějaké stopy).

— Ručím za to, že seznam je neúplný. Ukáži vám způsob, který jste určitě vynechali.

— S tím, že seznam je neúplný, ještě souhlasím. Ale vynechaný způsob obsazení nenajdete. Vždyť seznam už obsahuje nekonečně mnoho způsobů.

Vsadili jsme se. Abych vyhrál, požádal jsem, aby na dveře každého pokoje přibili jemu odpovídající rozpis (čtenář si snad vzpomíná, že způsobů bylo právě tolik, kolik bylo v hotelu pokojů). A pak jsem postupoval velmi jednoduše. Na dveřích prvního pokoje jsem viděl, že jemu odpovídající způsob začíná číslicí 0 a do zápisníku jsem si zapsal číslici 1; byla to první číslice pro způsob obsazení, který jsem chtěl najít. U dveří druhého pokoje mne první číslice odpovídajícího způsobu nezajímala, neboť první číslici svého způsobu jsem si již zapsal. Zaměřil jsem se na druhou číslici. Když jsem uviděl, že je to číslice 1, zapsal jsem si do svého zápisníku číslici 0. Podobně, když jsem zjistil, že třetí číslice způsobu vyvěšeného na dveřích třetího pokoje je zase 1, zapsal jsem si do zápisníku číslici 0. Obecně, jestliže jsem zjistil, že $n$-tá číslice $n$-tého způsobu je 0, zapsal jsem si do svého zápisníku na $n$-té místo číslici 1, a byla-li to číslice 1, zapsal jsem si číslici 0.

Když jsem obešel všechny pokoje*), měl jsem v zápisníku posloupnost nul a jedniček.

Vstoupil jsem do ředitelovy pracovny a řekl:

— Tady se pokochejte vynechaným způsobem.

— A odkud víte, že je vynechán?

— Nemůže to být první způsob, liší se od něho první číslicí, nemůže to být druhý způsob, liší se od něho druhou číslicí, nemůže to být ani třetí způsob, neboť se od něho liší třetí číslicí, a obecně to nemůže být $n$-tý způsob, neboť se od něho liší $n$-tou číslicí.

Sázku jsem vyhrál a získal jsem tak navždy právo na bezplatné ubytování v tomto hotelu.

Zároveň se však zjistilo, že ať už vezmeme jakoukoli spočetnou množinu způsobů, vždy existuje způsob, který do této množiny nepatří (způsoby z této množiny lze vždy vyvěsit na dveře pokojů). A to právě znamená, že množina všech možných způsobů obsazení pokojů hotelu je nespočetná — příkaz z ředitelství byl tedy nesplnitelný.

Bylo rozhodnuto podat o tom zprávu telegraficky. A musíme říci, že v neobyčejném hotelu byl i telegraf neobyčejný: jeho telegramy se neskládaly z konečné, nýbrž z nekonečné (přesněji řečeno, spočetné) množiny teček a čárek. Měly například tvar

—.——.———. atd.

Hned jsem si uvědomil, že také množina všech takových telegramů je nespočetná, vždyť místo teček a čárek lze psát nuly a jedničky a pak nebude žádný rozdíl mezi telegramy se spočetnou množinou znaků a množinou všech způsobů obsazení hotelu.

Po odeslání telegramu jsem se s ředitelem srdečně rozloučil a odletěl jsem do galaxie RGC — 8067, kde jsem měl provádět astrografické mapování...

*) Hm, hm, jak dlouho to trvalo?



## Nespočetnost kontinua

Nyní již není složité dokázat, že množina všech bodů přímky je nespočetná. Místo o této množině můžeme hovořit o množině všech reálných čísel, neboť každému bodu přímky odpovídá reálné číslo a také naopak.

Každé reálné číslo lze zapsat ve tvaru nekonečného desetinného zlomku tvaru

$$a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

Některá čísla lze takto zapsat dokonce dvojím způsobem, například: zápisy 0,500000 ... a 0,4999999... představují totéž číslo. Pro určitost budeme používat zápisu s nulami.

Předpokládejme, že se nám podařilo nějakým způsobem očíslovat všechna reálná čísla. K tomu, abychom dokázali, že tento předpoklad je nesprávný, stačí najít alespoň jedno neočíslované číslo. Následujíce příkladu Ijona Tichého, budeme postupovat takto:

Nejprve napíšeme nulu a za ní desetinnou čárku. Pak vezmeme první číslo (tj. číslo očíslované při předpokládaném očíslování jedničkou) a podíváme se na jeho první desetinné místo. Je-li na tomto místě číslice různá od 1, pak na první desetinné místo čísla, které sestavujeme, zapíšeme 1 a je-li na tomto místě číslice 1, zapíšeme na první desetinné místo 2. Pak přejdeme k druhému číslu a podíváme se na jeho druhé desetinné místo. Opět, je-li na tomto místě číslice různá od jedničky, zapíšeme na místo setin v sestavovaném čísle číslici 1 a je-li na tomto místě jednička, zapíšeme číslici 2. Stejným způsobem budeme postupovat i dále a budeme si u $n$-tého čísla všímat pouze číslice stojící na $n$-tém desetinném místě. Výsledkem bude nějaké číslo, například:

$$N = 0{,}1121211\ldots$$

Toto číslo zřejmě není mezi očíslovanými reálnými čísly, neboť na prvním desetinném místě se liší od prvního čísla, na druhém desetinném místě od druhého čísla, ..., na $n$-tém místě od $n$-tého čísla atd. (srv. str. 97).

Aby bylo čtenáři pochopitelnější, jak se hledá neočíslované číslo, budeme předpokládat, že podle předpokládaného očíslování má prvních pět čísel tento tvar:

$$\begin{array}{r} 4{,}27364\ldots \\ -1{,}31226\ldots \\ 7{,}95471\ldots \\ 0{,}62419\ldots \\ 8{,}56280\ldots \end{array}$$

Potom neočíslované reálné číslo bude začínat takto:

$$0{,}12121\ldots$$

Pochopitelně, nejen toto, ale i mnoho jiných reálných čísel není mezi očíslovanými (mohli bychom zaměňovat všechny číslice kromě dvojky za dvojku a dvojku za sedmičku nebo se řídit ještě nějakým jiným pravidlem). Nám však k vyvrácení předpokladu o možnosti očíslování všech reálných čísel stačí existence jednoho jediného neočíslovaného reálného čísla.

## Existence transcendentních čísel

Říkali jsme, že *algebraickými* čísly nazýváme ta čísla, která jsou kořeny rovnic

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

s celočíselnými koeficienty. Čísla, která nejsou kořeny takových rovnic, se nazývají *transcendentní*.

Po dlouhou dobu pracovali matematici pouze s algebraickými čísly — s takovými jako $\frac{7}{15}$, $\sqrt[8]{10}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ atd.



Jen za cenu velikého úsilí se francouzskému matematikovi Liouvilleovi podařilo v roce 1844 najít několik transcendentních čísel. A důkaz transcendentnosti čísla $\pi$, provedený Lindemannem v roce 1882, byl velikou vědeckou událostí: z tohoto důkazu vyplývala totiž nemožnost kvadratury kruhu.

Najednou se ukázalo, že algebraická čísla, s nimiž se setkáváme na každém kroku, jsou ve skutečnosti velice řídkým jevem a že transcendentní čísla, která se tak obtížně konstruují, jsou něčím běžným. Opravdu, již jsme viděli, že algebraická čísla vytvářejí pouze spočetnou množinu. Množina všech reálných čísel je, jak jsme právě zjistili, nespočetná. Je tedy nespočetný i rozdíl množiny všech reálných čísel a množiny všech algebraických čísel, tj. množina všech transcendentních čísel.

Tento důkaz existence transcendentních čísel, provedený G. Cantorem v roce 1873, učinil na matematiky velký dojem. Cantorovi se totiž podařilo dokázat existenci transcendentních čísel pouze na základě obecných úvah, bez uvedení konkrétního příkladu takových čísel. Avšak to, co je předností Cantorova důkazu, je zároveň i jeho slabou stránkou.

Z Liouvilleových tvrzení vyplývá jednoduchý způsob konstrukce konkrétních příkladů transcendentních čísel. Transcendentním číslem je například číslo 0,1010010000001 ..., v jehož zápisu po první jedničce je jedna nula, po druhé jedničce dvě nuly, po třetí jedničce šest nul, ..., po $n$-té jedničce $n!$ nul, atd. Cantorův důkaz neumožňuje najít žádný konkrétní příklad transcendentního čísla. Takový důkaz je, jak říkají matematici, nekonstruktivní: ukazuje se pouze, že předpoklad o neexistenci transcendentních čísel vede ke sporu.

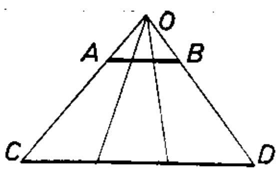
## Na dlouhé i na krátké úsečce je stejně mnoho bodů

Dokud se čtenář neseznámil s udivujícími vlastnostmi nekonečných množin, nevyvolala u něho otázka „kde je více bodů, na úsečce dlouhé 1 mm nebo na úsečce dlouhé 1 m?" ani stín pochybnosti — je přece zřejmé, že úsečka dlouhá 1 m má mnohem více bodů, vždyť je 1 000krát delší. Nyní si však asi čtenář dá pozor na tak kategorická prohlášení — vlastnosti nekonečných množin jsou příliš nepodobné tomu, čemu nás učí všední život. A skutečně, na velmi krátké úsečce i na velmi dlouhé úsečce je stejně mnoho bodů! Jinými slovy, mezi těmito úsečkami vždy existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Jak se takové přiřazení najde, je nejlépe patrné z obr. 29.

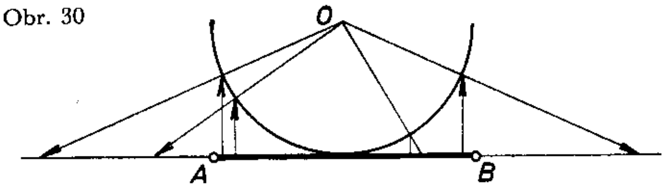
Je těžké smířit se s myšlenkou, že na úsečce délky milión světelných let je „stejně mnoho bodů" jako na poloměru atomového jádra!

Ještě neočekávanější je to, že dokonce ani celá nekonečná přímka nemá více bodů než úsečka, tj., že mezi množinou všech bodů přímky a množinou všech bodů úsečky existuje vzájemně jednoznačné přiřazení.

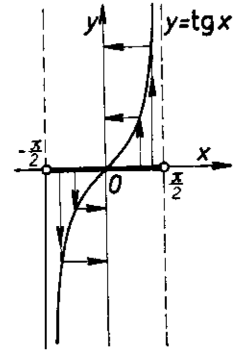
Nevezmeme dokonce ani celou úsečku a vynecháme z ní oba její koncové body (jak se říká, nevezmeme úsečku, ale otevřený interval). Jak lze najít vzájemně jednoznačné přiřazení mezi otevřeným intervalem a přímkou, je patrné z obr. 30. Nejprve se bodům intervalu přiřadí body polokružnice a pak se polokružnice promítne na přímku. Každému bodu intervalu přitom zřejmě odpovídá právě jeden bod přímky a žádný bod přímky přitom není vynechán. Ostatně takové přiřazení lze najít i jinak — pomocí grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$ (obr. 31).




Obr. 29




Obr. 30




Obr. 31

## Úsečka a čtverec

S tím, že na nekonečné přímce je stejně mnoho bodů jako na úsečce, se matematici s těžkým srdcem smířili. Ale další

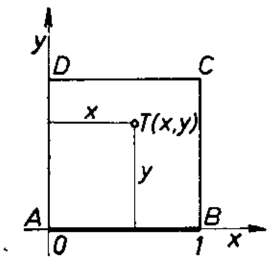
Cantorův výsledek byl ještě neočekávanější. Při hledání množiny mající více prvků než úsečka vyšetřoval Cantor množinu všech bodů čtverce. O výsledku nebylo pochyb. Vždyť úsečka se dá umístit na jednu stranu čtverce a množina všech úseček, na něž se dá čtverec rozložit, má sama tutéž mohutnost jako množina bodů úsečky.

Po tři léta (od roku 1871 do roku 1874) hledal Cantor důkaz toho, že mezi body úsečky a body čtverce neexistuje vzájemně jednoznačné přiřazení.

Léta plynula a žádoucí výsledek nepřicházel. A najednou, zcela neočekávaně, se mu podařilo najít přiřazení, o němž se domníval, že neexistuje! Zprvu sám sobě nevěřil. Matematikovi Dedekindovi psal: „Vidím to, ale nevěřím tomu.“

Ale přece jen bylo nutné, smířit se s tím, že i v tomto případě intuice zklamala — ve čtverci je stejně mnoho bodů jako na úsečce. Cantorův důkaz tohoto tvrzení zde pouze načrtneme, neboť jeho přesný důkaz je ztížen nejednoznačností zápisu čísel v desítkové soustavě.

Vezměme uzavřený interval $\langle 0,1\rangle$ a čtverec o straně délky 1. Tento čtverec lze umístit tak, jak je znázorněno na obr. 32. Máme najít vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body úsečky a čtverce. Promítání čtverce na úsečku $AB$ zde nepomáhá, neboť se při něm do jednoho bodu úsečky




Obr. 32



promítne nekonečně mnoho bodů čtverce (například do bodu $A$ se promítnou všechny body úsečky $DA$).

Řešení se dostane takto: Každý bod $T$ čtverce $ABCD$ lze zadat dvěma čísly — jeho souřadnicemi $x$ a $y$ (čili jednoduše, jeho vzdálenostmi od stran $AB$ a $AD$). Tato čísla lze zapsat ve tvaru nekonečných desetinných zlomků. Jelikož ani $x$ ani $y$ není větší než 1, mají tyto zlomky tvar

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \qquad (1)$$
$$y = 0{,}\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots \qquad (2)$$

(pro jednoduchost nebereme v úvahu body čtverce ležící na jeho stranách, ale pouze jeho vnitřní body). Symboly $\alpha_n$ a $\beta_n$ označují číslice $(-n)$-tého řádu čísel $x$ a $y$; je-li například $x = 0{,}63205\ldots$ a $y = 0{,}21357\ldots$, je $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$ atd., a $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$ atd.

Nyní potřebujeme najít bod $Q$ úsečky $AB$, který odpovídá bodu $T$. Stačí udat délku úsečky $AQ$. Položíme tuto délku rovnou číslu $z$, jehož desetinný rozvoj dostaneme „promícháním“ číslic čísel $x$ a $y$. Jinými slovy, ze dvou zápisů (1) a (2) sestavíme třetí, a to tak, že budeme střídat jejich číslice:

$$z = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 \ldots \alpha_n\beta_n \ldots$$

Je-li například

$$x = 0{,}515623\ldots$$

a

$$y = 0{,}734856\ldots,$$

pak položíme

$$z = 0{,}571354682536\ldots$$

Bod $z$ leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$, a zřejmě různým bodům čtverce přitom odpovídají různé body intervalu. Nejsou-li totiž body $T$ a $T'$ totožné, budou se zápisy čísel $x$ a $x'$ nebo $y$ a $y'$ v desetinné soustavě lišit alespoň na jednom místě. To však povede k tomu, že čísla $z$ a $z'$ nebudou totožná. Podrobnější rozbor ukazuje, že potom ani samy tyto body nejsou totožné.

Všechny body úsečky jsme nedostali. Například bod $z = 0{,}191919\ldots$ by musel být přiřazen dvojici $x = 0{,}111\ldots$, $y = 0{,}999\ldots$, odpovídající bodu strany čtverce, a takové body jsme nebrali v úvahu. Při uvedeném zobrazení čtverce do úsečky tudíž nebude bod $z$ odpovídat žádnému vnitřnímu bodu čtverce.

Našli jsme tedy vzájemně jednoznačné přiřazení mezi vnitřními body čtverce a body části intervalu $\langle 0,1\rangle$. To ukazuje, že množina všech vnitřních bodů čtverce nemá větší mohutnost než množina všech bodů úsečky. Avšak její mohutnost nemůže být menší, a proto obě množiny mají stejnou mohutnost.

□ Nevelkými změnami v našich úvahách lze získat vzájemně jednoznačné přiřazení mezi všemi body čtverce a všemi body úsečky. Stačí k tomu o něco opatrněji míchat číslice souřadnic.

Opět nevezmeme celý čtverec, ale pouze jeho část, která zbude po vynechání stran $BC$ a $CD$. Souřadnice bodů této části vyhovují nerovnostem $0 \leqq x < 1$ a $0 \leqq y < 1$. Tyto souřadnice lze zapsat ve tvaru nekonečných desetinných zlomků, a díky výše uvedené podmínce nemohou tyto zlomky končit samými devítkami.

A nyní číslice desetinných rozvojů čísel $x$ a $y$ rozdělíme na skupiny tím, že každou číslici různou od devítky oddělíme svislou čarou. Je-li například

$$x = 0{,}3994599967\ldots,$$
$$y = 0{,}959978090\ldots,$$

pak rozdělení do skupin má tvar

$$x \sim 3|994|5|9996|7|\ldots,$$
$$y \sim 95|997|8|0|90|\ldots$$

Takto získané skupiny číslic zamícháme stejným způsobem jako jsme zamíchali samotné číslice. Dostaneme nekonečnou posloupnost skupin číslic:

$$3|95|994|997|5|8|9996|0|7|90|\ldots$$



Před tuto posloupnost umístíme nulu, napíšeme za ní desetinnou čárku, vynecháme svislé čáry a dostaneme desetinný zlomek

$$z = 0{,}3959949975899960790\ldots,$$

odpovídající bodu čtverce $M(x, y)$.

Dá se ukázat, že toto přiřazení mezi body čtverce $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ a intervalu $0 \leqq z < 1$ je vzájemně jednoznačné. Nyní už lze snadno najít přiřazení mezi body celého čtverce $ABCD$ a body nějaké úsečky. Stačí vzít úsečku délky 3 a vzájemně jednoznačně zobrazit část čtverce $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ na interval $0 \leqq z < 1$ a lomenou čáru $BCD$ na úsečku $1 \leqq z \leqq 3$. □

Nejen čtverec, ale i krychle má stejně mnoho bodů jako úsečka. Obecně každý geometrický útvar obsahující alespoň jednu čáru má stejně mnoho bodů jako úsečka. Takové množiny se nazývají množinami mohutnosti *kontinua* (z latinského continuum—spojité). Mohutnost kontinua má i množina nekonečných telegramů (viz str. 98).

## Jedna úloha nějak nevychází

Zatím jsme se seznámili se dvěma druhy nekonečných množin. Jedny mají stejně mnoho prvků jako množina všech přirozených čísel a druhé mají stejně mnoho prvků jako má přímka bodů. Ukázalo se, že druhá množina má více prvků. Vzniká přirozeně otázka, zda mezi nimi neexistuje množina, která má více prvků než množina všech přirozených čísel a méně prvků než množina všech bodů přímky. Tato otázka dostala název „*problém kontinua*“. Nad tímto problémem se zamýšleli mnozí vynikající matematici, počínaje samotným G. Cantorem, avšak až do nedávné doby zůstával tento problém nevyřešen.

Mnoho let přemýšlel o problému kontinua jeden z nejlepších matematiků, zakladatel sovětské vědecké školy teorie funkcí reálné proměnné, akademik N. N. Luzin. Řešení však unikalo jak fata morgana v poušti (během úvah nad tímto problémem ovšem vyřešil N. N. Luzin celou řadu nejobtížnějších úloh teorie množin a vytvořil celý oddíl matematiky — deskriptivní teorii množin).

Jednou k N. N. Luzinovi přivedli patnáctiletého chlapce Lva Šnirelmana, který měl výjimečné matematické nadání (později se stal jedním z nejpřednějších sovětských matematiků a členem korespondentem Akademie věd SSSR). Aby vyzkoušel schopnosti mladého matematika, uložil mu N. N. Luzin třicet velmi obtížných úloh. Řešení 29 úloh znal a jednou úlohou byl ... problém kontinua. Ale běda, za týden přišel mladý matematik k N. N. Luzinovi a smutně řekl: „Jedna úloha nějak nevychází."

Neúspěchy při řešení problému kontinua nebyly náhodné. Situace zde připomíná historii postulátu o rovnoběžkách. Po dvě tisíciletí se projevovaly snahy odvodit tento postulát z ostatních axiómů geometrie. Práce Lobačevského, Hilberta a dalších vědců ukázaly, že tento postulát ostatním axiómům neodporuje, ale také jej nelze z nich odvodit.

Podobně se ukázalo, že ve vhodné axiomatice teorie množin neodporuje tvrzení o existenci „mezilehlé" mohutnosti ostatním axiómům (výsledek německého matematika K. Gödela, r. 1938), ale nelze je také z nich odvodit (dokázali to nedávno, téměř současně a nezávisle na sobě Američan Cohen, 1963—1964, a Čech Vopěnka, 1964).

## ■ Existuje množina největší mohutnosti?

Největší mohutnost, se kterou jsme se v našem vyprávění dosud setkali, je mohutnost množiny všech bodů přímky, tj. mohutnost kontinua. Ani množina všech bodů čtverce, ani množina všech bodů krychle nemá větší mohutnost. Není tedy mohutnost kontinua největší mohutností? Ukazuje se, že není. A nejen to, množina o největší mohutnosti vůbec neexistuje. Ke každé množině A existuje množina, jejíž mohutnost je větší než mohutnost množiny A. Takovou množinou je například množina B všech funkcí definovaných na množině A a nabývajících pouze hodnot 0 a 1.



Nejdříve ukážeme, že mohutnost množiny B není menší než mohutnost množiny A. Každému bodu $a$ množiny A přiřadíme funkci $f^a(x)$ nabývající v bodě $a$ hodnoty 1 a ve všech ostatních bodech hodnoty 0. Různým bodům zřejmě odpovídají různé funkce. Skládá-li se množina A například ze tří bodů 1, 2, 3, pak bodu 1 odpovídá funkce nabývající v bodě 1 hodnoty 1 a bodu 2 odpovídá funkce nabývající v bodě 1 hodnoty 0. Takové dvě funkce se sobě nerovnají.

Tak tedy mohutnost množiny B není menší než mohutnost množiny A. Nyní ukážeme, že tyto mohutnosti se sobě nerovnají, tj. že neexistuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi prvky množiny A a B. Předpokládejme, že takové přiřazení existuje.

Označme funkci, odpovídající prvku $a$ z A, symbolem $f_a(x)$. Připomeňme, že všechny funkce $f_a(x)$ nabývají pouze hodnot 0 a 1.

Definujme nyní novou funkci $\varphi(x)$, a to vztahem

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x).$$

Hodnotu této funkce v nějakém bodě $a$ množiny A nalezneme tudíž tak, že hodnotu funkce $f_a(x)$ (odpovídající bodu $a$) v bodě $a$ odečteme od jedné. Funkce $\varphi(x)$ je rovněž definována na množině A a nabývá pouze hodnot 0 a 1. Funkce $\varphi(x)$ je tudíž prvkem množiny B. Avšak podle předpokladu funkce $\varphi(x)$ odpovídá nějakému bodu $b$ množiny A, a tedy

$$\varphi(x) = f_b(x).$$

Vzhledem k tomu, jak je funkce $\varphi(x)$ definována, dostaneme odtud, že pro každý prvek $x$ množiny A platí

$$1 - f_x(x) = f_b(x).$$

Dosadíme-li do této rovnosti $x = b$, dostaneme rovnost

$$1 - f_b(b) = f_b(b),$$

a tedy

$$f_b(b) = \frac{1}{2}.$$

To je však ve sporu s tím, že hodnoty funkce $f_b(x)$ jsou 0 nebo 1. Tento spor ukazuje, že vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinami A a B nemůže existovat.

K libovolné množině A lze tedy sestrojit množinu B o větší mohutnosti. Proto *množina o největší mohutnosti neexistuje.*

Všimneme si, že množinu B lze sestrojit i jinak. Množinu B lze považovat za množinu všech podmnožin množiny A. Skutečně, buď C nějaká podmnožina množiny A. Vezměme funkci $f(x)$ nabývající hodnoty 1 v těch bodech $x$, pro které $x \in C$ a hodnoty 0 v těch bodech, pro které $x \notin C$. Zřejmě různým podmnožinám odpovídají různé funkce. Naopak, každé funkci $f(x)$, nabývající pouze hodnot 0 a 1, odpovídá podmnožina množiny A, skládající se z těch prvků $x$, ve kterých funkce $f(x)$ nabývá hodnoty 1. Tím je určeno vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech funkcí definovaných na množině A a nabývajících hodnot 0 a 1 a množinou všech podmnožin množiny A.

## Aritmetika nekonečna

Seznámili jsme se s mohutnostmi různých množin. Jak jsme již řekli, pojem mohutnosti je zobecněním pojmu počtu



prvků konečné množiny. S přirozenými čísly však můžeme provádět aritmetické operace — můžeme je sčítat, odčítat, násobit atd. Tyto operace vyjadřují jisté operace s množinami. Například sčítání dvou přirozených čísel odpovídá sjednocování dvou disjunktních konečných množin. Má-li jedna množina $m$ prvků a druhá $n$ prvků, má jejich sjednocení $m + n$ prvků.

Analogicky se definují operace s mohutnostmi. Jednotlivé mohutnosti budeme přitom označovat zvláštními symboly. Například, mohutnost spočetné množiny se označuje symbolem $\aleph_0$ ($\aleph$ je první písmeno hebrejské abecedy — nazývá se *alef*). Mohutnost kontinua se označuje symbolem $\mathfrak{c}$ (gotické c), mohutnost množiny všech reálných funkcí definovaných na množině všech reálných čísel symbolem $\mathfrak{f}$ atd.

Mohutnosti lze sčítat tak, jako se sčítají přirozená čísla: Má-li množina A mohutnost $\mathfrak{m}$ a množina B mohutnost $\mathfrak{n}$ a jsou-li množiny A a B disjunktní, označuje se mohutnost množiny $A \cup B$ symbolem $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Z vlastností sjednocení množin plyne, že

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m},$$
$$\mathfrak{m} + (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) + \mathfrak{p}$$

Avšak mnohá pravidla sčítání nekonečných mohutností se nepodobají obvyklým pravidlům aritmetiky. To však není nic divného, neboť vlastnosti nekonečných množin, jak již víme, se nepodobají vlastnostem konečných množin. V aritmetice nekonečna například platí rovnosti

1) $n + \aleph_0 = \aleph_0,$
2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$
3) $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$
4) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$
5) $\mathfrak{c} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}.$

První rovnost říká, že sjednocení konečné a spočetné množiny je spočetná množina, druhá říká, že sjednocení dvou spočetných množin je spočetná množina a třetí vyjadřuje to, že sjednocení spočetné množiny a množiny mohutnosti kontinua je množina mohutnosti kontinua. Čtenář si již sám snadno vyloží ostatní rovnosti.

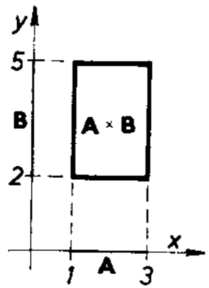
Nyní se podíváme, jak se nekonečné mohutnosti vzájemně násobí. Nejprve musíme pochopit, jaká operace s množinami odpovídá násobení přirozených čísel. Buď $\mathsf{A}$ konečná množina skládající se z $m$ prvků a $\mathsf{B}$ konečná množina skládající se z $n$ prvků. Utvoříme novou množinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, jejímiž elementy jsou všechny uspořádané dvojice $(a, b)$, kde $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$. Označíme-li prvky množiny $\mathsf{A}$ písmeny $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a prvky množiny $\mathsf{B}$ písmeny $b_1, b_2, \ldots, b_n$, můžeme tyto dvojice uspořádat do tabulky

$$\begin{array}{cccc} (a_1,b_1) & (a_1,b_2) & \ldots & (a_1,b_n) \\ (a_2,b_1) & (a_2,b_2) & \ldots & (a_2,b_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m,b_1) & (a_m,b_2) & \ldots & (a_m,b_n). \end{array}$$

Odtud je patrné, že počet takových dvojic je roven $mn$, tj. součinu čísel $m$ a $n$.

Přeneseme tuto operaci na nekonečné množiny. Buďte $\mathsf{A}$ a $\mathsf{B}$ nekonečné množiny. Jejich kartézským součinem nazveme množinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, jejímiž prvky jsou všechny uspořádané dvojice $(a, b)$, kde $a \in \mathsf{A}$, $b \in \mathsf{B}$. Je-li například $\mathsf{A}$ množina všech bodů intervalu $\langle 1,3 \rangle$ a $\mathsf{B}$ množina všech bodů intervalu $\langle 2,5 \rangle$, lze množinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ znázornit množinou bodů obdélníka na obr. 33; každému bodu tohoto obdélníka skutečně odpovídají dva jeho průměty na osy.

Obr. 33






Má-li množina $\mathsf{A}$ mohutnost $\mathfrak{m}$ a množina $\mathsf{B}$ mohutnost $\mathfrak{n}$, značíme symbolem $\mathfrak{mn}$ mohutnost množiny $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. Pro násobení mohutností platí tato pravidla:

$$\mathfrak{mn} = \mathfrak{nm},$$
$$(\mathfrak{mn})\,\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\,(\mathfrak{np}),$$
$$\mathfrak{m}\,(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{mn} + \mathfrak{mp}.$$

Dále platí rovnosti

$$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0,$$
$$\aleph_0\mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{cc} = \mathfrak{c}.$$

První z těchto rovností zachycuje to, že kartézský součin dvou spočetných množin je množina spočetná. Třetí rovnost vyjadřuje skutečnost, že kartézský součin dvou množin mohutnosti kontinua je množina mohutnosti kontinua. Mimo jiné to říká, že počet bodů úsečky je stejný jako počet bodů čtverce. Vždyť $\mathfrak{c}$ označuje počet bodů úsečky a $\mathfrak{cc}$ počet bodů kartézského součinu úsečky se sebou samou, tj. počet bodů čtverce.

## Mocniny s nekonečným mocnitelem

Jelikož již umíme mohutnosti násobit, dovedeme libovolnou mohutnost umocnit libovolným přirozeným číslem. A nyní objasníme jak umocňovat mohutnost nekonečným mocnitelem, tj. objasníme význam symbolu $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$. Vrátíme se proto opět ke konečným množinám a popíšeme množinu mající $n^m$ prvků.

Dělá se to takto: Nechť množina $\mathsf{A}$ obsahuje $m$ prvků a množina $\mathsf{B}$ $n$ prvků. Symbolem $\mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ označíme množinu, jejímiž prvky jsou všechny funkce definované na množině

A a nabývající hodnot z množiny B. Jinými slovy, každý prvek množiny $B^A$ udává pravidlo, které prvkům $a$ množiny A přiřazuje prvky $b = f(a)$ množiny B. Nechť se například množina A skládá ze tří čísel: 1, 2, 3 a množina B ze dvou prvků: tečky a čárky. Prvky množiny $B^A$ jsou pak „funkce" tvaru $f(1) = .$, $f(2) = .$, $f(3) = -$ nebo $f(1) = -$, $f(2) = .$ $f(3) = .$ apod. Jednoduše lze tyto funkce zadat posloupnostmi teček a čárek skládajících se ze tří znaků. Snadno lze nahlédnout, že takových posloupností je 8, tj. $2^3$. Jsou to tyto posloupnosti:

. . . ; . . — ; . — . ; . — — ;
— . . ; — . — ; — — . ; — — —

Dostali jsme $8 = 2^3$ posloupností. Není to žádná náhoda. Skládá-li se množina A z $m$ prvků a množina B z $n$ prvků, pak se množina $B^A$ skládá z $n^m$ prvků. Necháváme na čtenáři, aby toto tvrzení dokázal.

A nyní již můžeme objasnit význam symbolu $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ v případě, že $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ jsou nekonečné mohutnosti. Vezmeme množinu A mohutnosti $\mathfrak{m}$ a množinu B mohutnosti $\mathfrak{n}$ a označíme symbolem $B^A$ množinu všech „funkcí" definovaných na množině A a nabývajících hodnot z množiny B. Její mohutnost je označena právě symbolem $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$.

Výše jsme ukázali, že pro libovolnou množinu A je mohutnost množiny všech funkcí definovaných na množině A a nabývajících dvou hodnot 0 a 1 větší než mohutnost samotné množiny A. To znamená, že pro libovolnou mohutnost $\mathfrak{m}$ platí nerovnost

$$2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}.$$

Všimneme si ještě, že

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Opravdu, viděli jsme, že množina všech nekonečných telegramů má mohutnost kontinua. Ale žádný nekonečný telegram není nic jiného než funkce definovaná na množině všech přirozených čísel a nabývající pouze dvou hodnot:



tečky a čárky. Proto má množina všech nekonečných telegramů mohutnost $2^{\aleph_0}$. Tím je naše rovnost dokázána.

## Po pořádku...

Mohutnosti množin (neboli, jak se také nazývají, *kardinální čísla*) plní pouze „polovinu práce" přirozených čísel. Vždyť přirozených čísel se používá nejen k tomu, abychom odpověděli na otázku „kolik?", ale také k tomu, abychom odpověděli na otázku „kolikátý?". Jinými slovy, říkáme nejen „dva", „pět", „dvacet", ale také „druhý", „pátý", „dvacátý". A mohutnosti neříkají nic o tom, v jakém pořadí za sebou prvky následují. A ačkoliv množina všech přirozených čísel má stejně mnoho prvků jako množina všech celých čísel, jsou tyto množiny uspořádány různě. Množina všech přirozených čísel má první prvek a množina všech celých čísel první prvek nemá.

Při zkoumání pořadí, v jakém jsou prvky v množině rozloženy, tudíž nevystačíme s kardinálními čísly (s mohutnostmi), potřebujeme nové pojmy. Nejprve zavedeme pojem *uspořádané množiny*. Říká se, že množina A je uspořádaná, jestliže pro její libovolné prvky $a$, $b$ je definován pojem „uspořádání" $a < b$, vyznačující se těmito vlastnostmi:

1) je-li $a < b$, pak $a \neq b$;
2) je-li $a < b$ a $b < c$, pak $a < c$.

Snadno lze uspořádat množiny všech reálných čísel, všech racionálních čísel, všech přirozených čísel atd. Také množinu všech komplexních čísel lze uspořádat. Stačí, řekneme-li, že $a + bi < c + di$, jestliže buď $a < c$ nebo $a = c$ a zároveň $b < d$. Například, $2 + 15i < 3 + 10i$, $2 + 4i < 2 + 5i$. Analogicky lze uspořádat množinu všech mnohočlenů. Množinu lze ovšem uspořádat různými způsoby.

Zkoumejme například množinu všech různých slov vyskytujících se v této knize. Tuto množinu lze uspořádat třeba takto: začneme knihu číst a budeme z ní vypisovat slova v tom pořadí, jak se s nimi setkáváme. V tomto případě lze pravidlo uspořádání formulovat takto: slovo A předchází slovo B, jestliže jsme se při čtení setkali se slovem A dříve než se slovem B.

Můžeme však postupovat i jinak a říkat, že slovo A předchází slovu B, jestliže je v abecedním uspořádání slovo A před slovem B. Tato dvě uspořádání téže množiny jsou zřejmě různá.

Říká se, že dvě uspořádané množiny **A** a **B** jsou téhož *pořádkového typu,* jestliže mezi nimi existuje vzájemně jednoznačné přiřazení zachovávající uspořádání. Jinými slovy, je-li $a_1 \longleftrightarrow b_1$ a $a_2 \longleftrightarrow b_2$, pak z $a_1 < a_2$ plyne, že $b_1 < b_2$.

Například libovolné dvě úsečky jsou téhož pořádkového typu. Zobrazení, znázorněné na obr. 29 (str. 102) zachovává uspořádání bodů. Také zobrazení celé přímky na otevřený interval znázorněné na obr. 30 zachovává uspořádání. Ale úsečka (uzavřený interval) a přímka jsou různého pořádkového typu, přestože mezi nimi existuje vzájemně jednoznačné přiřazení — každé takové přiřazení nutně poruší uspořádání, neboť úsečka má počáteční a koncový bod a celá přímka nikoli.

## Dobře uspořádané množiny

Dokonce i spočetnou množinu lze uspořádat nejrůznějšími způsoby. Vždyť spočetnými množinami jsou jak množina všech přirozených čísel, tak množina všech celých čísel, tak i množina všech racionálních čísel. A uspořádání těchto množin je zcela odlišné. Množina všech přirozených



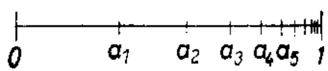
čísel má první prvek (číslo 1) a ani množina všech celých čísel ani množina všech racionálních čísel první prvek nemá. Na druhé straně v množinách všech přirozených čísel a všech celých čísel existují dvojice prvků, mezi nimiž neleží žádné jiné prvky těchto množin (například čísla 5 a 6) a v množině všech racionálních čísel leží mezi libovolnými dvěma různými prvky nekonečně mnoho jiných prvků této množiny.

Pro snazší orientaci v tomto různorodém množství uspořádání zavedl G. Cantor zvláštní třídu uspořádaných množin, jejichž vlastnosti značně připomínaly vlastnosti množiny přirozených čísel. Vybereme-li z množiny přirozených čísel libovolnou neprázdnou podmnožinu, bude tato podmnožina nutně obsahovat nejmenší prvek. Množiny, které se vyznačují touto vlastností, nazval G. Cantor dobře uspořádanými množinami. Jinými slovy, uspořádaná množina **A** se nazývá *dobře uspořádanou množinou,* jestliže její libovolná neprázdná podmnožina má první prvek.

Jak jsme již říkali, nejjednodušší dobře uspořádanou množinou je množina všech přirozených čísel. Její prvky si můžeme znázornit na intervalu $(0, \infty)$ body 1, 2, 3, ... Zobrazení přímky na interval znázorněné na obr. 30 zachovává uspořádání bodů. Polopřímka $(0, \infty)$ přitom přejde v interval $(0, 1)$. Místo s body 1, 2, 3,... můžeme proto pracovat s body intervalu $(0,1)$. Dostaneme nekonečnou množinu bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, „přibližujících" se k bodu 1 (obr. 34a).

Zkoumejme nyní bod 1. Tento bod již nemůžeme očíslovat obvyklými čísly — spotřebovali jsme je na očíslování

Obr. 34a

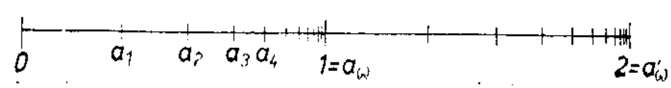


bodů $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ K tomu, abychom očíslovali i tento bod, potřebujeme nové číslo, které není přirozeným číslem. Protože bod 1 leží za všemi body $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, které jsou již očíslovány obvyklými čísly, nazveme toto nové číslo „transfinitním" (z latinského trans — za, přes; finitus — konečný). Transfinitní číslo následující hned za všemi přirozenými čísly 1, 2, 3, ... se obvykle označuje písmenem $\omega$. Označíme proto bod 1 symbolem $a_\omega$. Množina A všech bodů $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_\omega$ je také dobře uspořádanou množinou (uvažte proč!).

A nyní vezmeme získanou množinu A a posuneme ji o délku 1 napravo. Bod $a_1$ přitom přejde do bodu $a'_1 = a_1 + 1$, bod $a_2$ do bodu $a'_2 = a_2 + 1$ atd. Dostaneme takto množinu B, skládající se z bodů $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots, a'_\omega$. Není obtížné ověřit, že množina $A \cup B$ je dobře uspořádaná množina. Pokusíme se její prvky očíslovat. Umíme již očíslovat prvky množiny A. Bod $a'_1$ následuje hned po bodu $a_\omega$ (viz obr. 34b). Je tudíž přirozené očíslovat bod $a'_1$ transfinitním číslem $\omega + 1$, tj. položit $a'_1 = a_{\omega+1}$. Stejně přirozené je očíslovat další bod, tj. bod $a'_2$, transfinitním číslem $\omega + 2$ atd. A bod $a'_\omega$, který následuje za všemi body $a_{\omega+1}, \ldots, a_{\omega+n}, \ldots$, očíslujeme transfinitním číslem $2\omega$, tj. položíme $a'_\omega = a_{2\omega}$.

Čtenář se již asi dovtípil, že nyní posuneme body množiny A napravo o délku 2 a dostaneme nové body, které je třeba očíslovat transfinitními čísly $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, ... $2\omega + n, \ldots, 3\omega$. Postupujeme-li takto dále, dostaneme dobře uspořádanou množinu, tvořenou body očíslovanými transfinitními čísly tvaru $k\omega + n$, kde $k$ a $n$ jsou přirozená čísla.

Obr. 34b






Tím však vytváření transfinitních čísel nekončí. Opět jsme dostali množinu, jejíž body leží na polopřímce $(0, \infty)$. Přitom každá úsečka $\langle n, n + 1\rangle$ této polopřímky obsahuje nekonečně mnoho bodů naší množiny. Zobrazíme opět polopřímku $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$. Dostaneme množinu bodů, přibližujících se k bodu 1. K očíslování bodu 1 potřebujeme nyní nové transfinitní číslo. Toto číslo se označuje symbolem $\omega^2$. Dále se pak konstruují transfinitní čísla $\omega^2 + 1, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots$ a dokonce $\omega^\omega$. Existuje i transfinitní číslo tvaru

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

Těmito otázkami se však nebudeme podrobněji zabývat.

## Nepochopitelný axióm

Již jsme říkali, že některé množiny lze uspořádat různými způsoby. A je možné uspořádat libovolnou množinu? A jestliže ano, lze ji uspořádat tak, aby byla dobře uspořádaná? Těmito otázkami se zabývali mnozí matematikové — z kladného výsledku by plynulo, že transfinitními čísly lze očíslovat prvky libovolné množiny.

Nečekaně jednoduché a krátké řešení uveřejnil r. 1904 Zermelo. Podařilo se mu dokázat, že každou množinu lze dobře uspořádat (G. Cantor předvídal tuto odpověď již r. 1883). Avšak zdaleka ne všem matematikům se Zermelův důkaz zalíbil. Tento důkaz se totiž zakládá na jednom tvrzení, které se samotnému Zermelovi a také dalším matematikům nezdálo být nijak zřejmé.

Toto tvrzení, nazvané později *axióm výběru* nebo *Zermelův axióm*, spočívá v tomto:

Představte si, že máte před sebou několik hromádek jablek. Z každé hromádky lze zřejmě vybrat po jednom jablku a utvořit z nich novou hromádku. Zdálo by se, že totéž lze udělat i v případě, že každá hromádka obsahuje nekonečně mnoho jablek a že samotných hromádek je také nekonečně mnoho. A v tom je podstata axiómu výběru:

*Je-li dána nekonečná množina nekonečných množin, lze z každé množiny vybrat jeden prvek, aniž udáme předem pravidlo výběru.*

A právě v posledních slovech je jádro věci — axióm výběru vede ke zcela nekonstruktivním důkazům. Pomocí axiómu výběru se dá například dokázat, že každou množinu lze dobře uspořádat, avšak žádný „konkrétní" způsob takového uspořádání odtud nevyplývá. Dlouhá léta užívali matematikové axiómu výběru a považovali jej za zcela zřejmý. Když se však nad ním začali hlouběji zamýšlet, stával se stále a stále záhadnějším. Mnohá z tvrzení odvozených pomocí axiómu výběru zcela odporují našemu názoru. Jeden z předních matematiků Bertrand Russell se o tomto axiómu vyjádřil takto:

„Nejdříve se zdá zřejmý, avšak čím více se nad ním zamýšlíš, tím podivnější se zdají jeho důsledky; nakonec pak přestaneš chápat, co vlastně znamená."

Nicméně většina matematiků axiómu výběru ve svých úvahách používá.

V poslední době se podařilo dokázat, že s axiómem výběru je to stejné jako s hypotézou kontinua, tj. axióm výběru ostatním axiómům ani neodporuje, ani z nich není odvoditelný.



## Z jednoho jablka dvě

Povíme si o jednom z nejpodivuhodnějších důsledků axiómu výběru. Asi jste již viděli při práci estrádního kouzelníka. Nejprve ukáže divákům prázdný sáček, pak tam vhodí kouli a vytáhne dvě koule; obě koule vhodí zpět a vytáhne čtyři; vhodí tam čtyři a vytáhne jich osm. Všichni ovšem vědí, že nejde o žádné zázraky a že vše záleží, jak se říká, na „šikovných rukou". V teorii množin se však takové zázraky dějí. Vezměme si nejobyčejnější jablko a rozřežme je libovolným způsobem na čtyři části. Zdá se být zřejmé, že nelze sestavit jablko z pouhých dvou těchto částí (stejně jako nelze sestavit celý pomeranč z dílků zbylých po snědení půlky pomeranče).

Avšak matematikům se podařilo rozdělit kouli na čtyři stejné části tak, že ze dvou těchto částí lze sestavit celou kouli téhož poloměru, aniž by se k nim něco přidalo; jenom se s nimi bude pohybovat jako s tuhými tělesy. Ze dvou zbylých částí lze sestavit druhou, stejně velikou kouli. Z jedné koule tak dostaneme dvě koule, stejně velké jako koule původní. Škoda, že je tento problém vyřešen pouze teoreticky, jinak bychom mohli z jednoho jablka udělat dvě, pak čtyři, potom osm atd. Praktické řešení ovšem není možné — odporovalo by zákonu zachování hmoty.

Změněné rozdělení koule na čtyři části je založeno právě na axiómu výběru.

O dalších, neméně podivuhodných důsledcích tohoto axiómu nebudeme zatím hovořit.

## Konečné rozklady

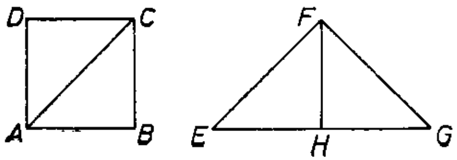
Z hodin geometrie si čtenář patrně pamatuje, co jsou to shodně rozložitelné útvary. O dvou útvarech řekneme, že jsou *shodně rozložitelné,* jestliže je lze rozložit na útvary $X_1, \ldots, X_m$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ tak, že útvar $X_1$ je shodný s útvarem $Y_1$, útvar $X_2$ je shodný s útvarem $Y_2, \ldots$, útvar $X_m$ je shodný s útvarem $Y_m$. Například čtverec o straně $a$ a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o základně $2a$ jsou shodně rozložitelné (obr. 35).

Avšak z hlediska teorie množin není tato definice tak jednoznačná. Při rozkládání útvaru jako bychom „zdvojovali" body ležící na dělicím řezu: z každého bodu dostaneme dva — po jednom v každé části. A skutečně, rozklad čtverce $ABCD$ a trojúhelníka $EFG$ z obr. 35 se nehodí z hlediska teorie množin: po rozdělení trojúhelníka a složení (ze získaných částí) čtverce body odvěsen $EF$ a $FG$ splynou a dají jednu úhlopříčku $AC$ čtverce, kdežto body výšky $FH$ „se rozdvojí" a vytvoří strany $AB$ a $CD$ našeho čtverce.

V teorii množin je tedy třeba definovat tento pojem jinak. O dvou útvarech X a Y řekneme, že jsou shodně rozložitelné, jestliže je lze rozložit na konečně mnoho *po dvou disjunktních* částí

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m,$$
$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$$

tak, že útvar $X_1$ je shodný s útvarem $Y_1$, $X_2$ s $Y_2, \ldots, X_m$ s $Y_m$. Ukazuje se, že i v tomto smyslu jsou čtverce $ABCD$ a trojúhelník $EFG$ shodně rozložitelné. Nyní je však důkaz tohoto tvrzení podstatně obtížnější. Čtenáře, který se chce s tímto důkazem seznámit, odkazujeme na knížku W. Sierpińského „O teorii mnogości".




Obr. 35



Polští matematikové S. Banach a A. Tarski dokázali, že nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby dva rovinné mnohoúhelníky byly shodně rozložitelné ve smyslu teorie množin, je rovnost jejich obsahů. Zdá se přirozeným očekávat, že pro mnohostěny bude takovou podmínkou rovnost jejich objemů. Avšak tak tomu vůbec není. Pomocí axiómu výběru S. Banach a A. Tarski dokázali, že libovolné dva (omezené) mnohostěny jsou shodně rozložitelné ve smyslu teorie množin, dokonce i když mají různé objemy. A navíc ještě dokázali, že koule a krychle jsou v tomto smyslu shodně rozložitelné a že vůbec každá dvě omezená tělesa jsou shodně rozložitelná. Rozumí se však, podobně jako u zdvojení koule, o kterém jsme hovořili výše, že shodná rozložitelnost koule a krychle se dokazuje pomocí axiómu výběru. Ukázat konkrétní způsob takového rozkladu nelze. V předkládaném rozkladu se vyskytují opravdu „zázračné" části — nemající objem; jsou, jak říkají matematici, neměřitelné.

# Kapitola 3

# Podivuhodné funkce a křivky aneb procházky sbírkou matematických kuriozit

## Jak se rozvíjel pojem funkce

Většina matematických pojmů prošla dlouhým vývojem. Zpočátku vznikaly jako zobecnění názorných představ, jako zobecnění každodenní skutečnosti. Odstraňováním speciálních a náhodných rysů postupně z těchto představ vykrystalizovaly přesné matematické definice. Často se však ukázalo, že tyto definice zachycují nejen objekty, jejichž studium vedlo k formulaci dané definice, ale i mnohé jiné objekty. Další studium těchto nových objektů vedlo k vyššímu stupni abstrakce a pak k rozšíření původně zavedených definic. Zároveň nabývaly matematické pojmy stále širšího smyslu, zahrnovaly v sobě stále širší a širší okruh objektů a rozmanitost jejich použití stále rostla.

Jak dlouhou vývojovou cestou — od předhistorických dob, kdy se počítalo jen „jeden, dva, mnoho" až do našich dnů — prošel například pojem čísla! Přirozená čísla, zlomky, záporná čísla, komplexní čísla, kvaterniony, hyperkomplexní čísla . . . A je třeba říci, že ne vždy vítali všichni matematici zobecnění toho či onoho pojmu s nadšením. Například po dlouhou dobu nebyla mnohými vědci uznávána nejen čísla komplexní, ale dokonce i čísla záporná.

Složitým vývojem prošel i pojem funkce. Myšlenka závislosti některých veličin má svůj původ patrně ve starořecké vědě. Staří Řekové se však zabývali pouze veličinami geometrické povahy. Dokonce i Newton, jeden ze zakladatelů matematické analýzy, používal při studiu závislých veličin geometrického jazyka. I když pojmu funkce užívali ve skutečnosti již Fermat a Descartes, termín „funkce" pochází až z roku 1694, kdy se objevuje v pracích německého myslitele Leibnize, který se s Newtonem dělí o zásluhu vytvoření matematické analýzy. U Leibnize však měl pojem funkce velmi úzký smysl a týkal se pouze některých úseček závisejících na poloze bodu na křivce: pořadnice, subtagenty a subnormály, poloměru křivosti atd. A tak i Leibniz zůstal v okruhu geometrických představ. Až teprve Leibnizův žák Johann Bernoulli podal r. 1718 definici funkce, oproštěnou od geometrické podoby: „*Funkce proměnné veličiny se nazývá množství utvořené jakýmkoli způsobem z této proměnné veličiny a z konstant*".

Další krok v rozvoji pojmu funkce je spjat se jménem geniálního žáka Johanna Bernoulliho, petrohradského akademika Leonarda Eulera. Ve svém „Diferenciálním počtu" definuje Euler funkci takto: „*Veličiny, závisející na druhých veličinách tak, že se změnou druhých se mění i první, bývají nazývány jejich funkcemi*".

Avšak pojem funkce byl u Eulera a jeho současníků spojen s možností vyjádřit funkci formulí. Z hlediska matematiků 18. století neurčuje zápis

$$y = \begin{cases} x\ , & \text{je-li } x < 0, \\ x^2\ , & \text{je-li } x \geqq 0 \end{cases}$$

jednu funkci, ale dvě.

Brzy se stalo zřejmým, že záležitost je mnohem složitější. Při studiu kmitání struny získal Daniel Bernoulli řešení ve tvaru tzv. *trigonometrické řady*. Nebudeme nyní hovořit o tom, co je to trigonometrická řada, a řekneme pouze, že tvar struny byl popsán jedinou formulí (obsahující však nekonečně mnoho členů). Touž úlohu o kmitání struny řešil francouzský učenec d'Alembert. D'Alembertovo řešení mělo zcela jiný tvar než řešení Bernoulliho a mohlo být pro různé hodnoty argumentu popsáno různými formulemi.

Pro matematiku 18. století tak vznikl zdánlivě neřešitelný rozpor: Táž úloha měla dvě řešení, přičemž jedno řešení bylo pro všechny hodnoty argumentu vyjádřeno jedinou formulí, kdežto druhé několika formulemi. To vedlo k pochybnostem o Bernoulliho řešení. Mnozí se domnívali, že D. Bernoulli nenašel všechna řešení, ale pouze řešení, která lze vyjádřit jedinou formulí. Vznikl rozhořčený spor, kterého se účastnili téměř všichni význačnější matematici 18. století — Euler, d'Alembert aj.

Spor se však vlastně týkal pojmu funkce, souvislosti mezi funkční závislostí a možností vyjádřit tuto závislost formulí. Konečné řešení otázky přinesl až počátek 19. století, kdy francouzský učenec J. Fourier ukázal, že součet nekonečné řady trigonometrických funkcí se dá na různých úsecích vyjádřit různými formulemi. Potom podal novou definici funkce, v níž zdůraznil, že podstatným je zadání hodnot funkce a ne to, zda je toto zadání uskutečněno pomocí jediné formule či nikoli.

Fourierovy výsledky byly zpřesněny německým matematikem Dirichletem, který ukázal, že grafem součtu trigonometrické řady může být libovolná křivka. Je pouze třeba, aby počet maxim a minim této křivky byl konečný a aby neubíhala nekonečně vysoko. Dirichlet také upřesnil Fourierovu definici funkce a dal jí tvar, kterého se užívá i nyní (podobné definice podali o něco dříve než Dirichlet také Lacroix, Lobačevskij a někteří další matematici). Dirichletova definice zní: „Proměnná veličina $y$ se nazývá funkcí proměnné veličiny $x$, jestliže každé hodnotě veličiny $x$ odpovídá jediná přesně určená hodnota veličiny $y$".

Později byla k slovům „každé hodnotě veličiny $x$" přidána slova „náležející určité množině" (funkce nemusí být totiž definována pro všechny hodnoty veličiny $x$).

Tato definice byla neobyčejně obecná, nic se v ní neříkalo o tom, že funkce musí být zadána jedinou formulí na celém intervalu, v němž je definována. A nejen to, funkce nemusela být zadána vůbec žádnou formulí — mohla být definována slovy. Samotný Dirichlet například vyšetřoval tuto funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \text{ iracionální číslo,} \\ 1\,, & \text{je-li } x \text{ racionální číslo.} \end{cases}$$

Z hlediska matematiků 18. století nebyla touto definicí zadána žádná funkce, neboť nebyla dána formule, podle které lze *„Dirichletovu funkci"* vyčíslit. Přesto je touto definicí plně určena jistá funkce. Je z ní zcela zřejmé, že například

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 1,$$
$$f(\sqrt{2}) = 0.$$

Dirichletova definice (spolu s uvedeným zpřesněním) byla v podstatě konečným výsledkem pro číselné funkce číselného argumentu. Další vývoj spočíval v tom, že se začaly studovat funkce definované na libovolných množinách, jejichž hodnoty také patří do libovolných množin. Mějme dány dvě množiny A a B a nechť je každému prvku $a$ množiny A přiřazen právě jeden prvek $b$ množiny B. Potom se říká, že na množině A je definována funkce s hodnotami v množině B. V natolik obecné formulaci splývá pojem funkce s pojmy *přiřazení, zobrazení, transformace.*

Z tohoto hlediska je například obsah trojúhelníka funkce, definovaná na množině všech trojúhelníků a nabývající hodnot z množiny kladných čísel. A kružnice vepsaná do trojúhelníku je funkce zadaná na množině všech trojúhelníků a nabývající hodnot z množiny kružnic. My však nebudeme vycházet z natolik obecné definice, a omezíme se na funkce zadané na číselných množinách a nabývající číselných hodnot.



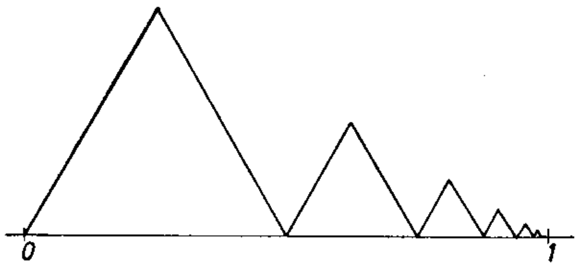
## Džin prchá z láhve

Dirichletova definice umožnila konstruovat funkce s podivuhodnými vlastnostmi. Jestliže dříve bylo pro sestrojení funkce s neobvyklou vlastností potřeba dlouho kombinovat různé formule, nyní se vše zjednodušilo. Objevila se možnost konstruovat a studovat různé funkce, bez ohledu na to, zda je lze vyjádřit jedinou formulí. A během posledního půl druhého století byly sestrojeny funkce, jejichž vlastnosti se zcela liší od vlastností „rozumných" funkcí. Sám Dirichlet patrně nepředpokládal, že mohou existovat takové „zrůdy".

Neobvyklé vlastnosti má již sama Dirichletova funkce, o níž jsme již hovořili. Na jakkoli malé úsečce reálné osy se totiž nachází nekonečně mnoho jak racionálních, tak i iracionálních čísel. Avšak Dirichletova funkce je rovna jedné pro racionální čísla a nule pro iracionální. Probíhá-li $x$ reálnou osou, „přeskakují" tudíž hodnoty funkce stále z 0 na 1 a zpět. Narýsovat graf této funkce je zcela nemožné, neboť tato funkce je ve všech bodech nespojitá.

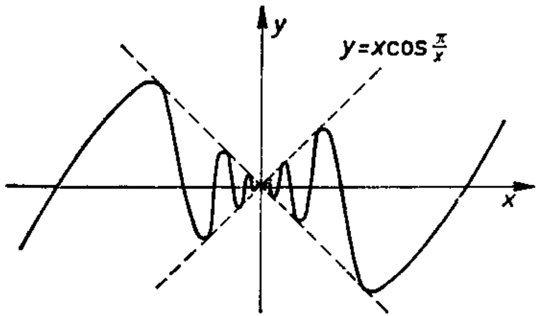
Avšak i mezi spojitými funkcemi jsou funkce s neobyčejnými vlastnostmi. Například může mít na konečném intervalu spojitá funkce nekonečně mnoho ostrých lokálních maxim a minim? Na první pohled je to zcela nemožné. Taková funkce musí totiž nejprve z bodu maxima klesnout do bodu minima, pak opět růst a dostat se do bodu maxima atd. A jak to všechno má udělat na konečném intervalu? Přesto se ukázalo, že takové divné funkce existují a že dokonce není vůbec obtížné takové funkce sestrojit.

Sestrojíme takovou funkci na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Nejdříve interval $\langle 0, 1\rangle$ rozpůlíme a na jeho levé polovině sestrojíme rovnostranný trojúhelník. Zbylou pravou polovinu opět rozpůlíme a na její levé polovině $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle$ sestrojíme druhý rovnostranný trojúhelník. Popsanou operaci provedeme nekonečněkrát. Dostaneme horský pás o nekonečně mnoha




Obr. 36

vrcholcích postupně klesající k bodu 1 (obr. 36). Získanou lomenou čáru budeme považovat za graf funkce $f(x)$. Tato funkce bude definována v každém bodě intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s výjimkou pravého krajního bodu 1. V tomto bodě položíme $f(1) = 0$. Jelikož výšky vrcholů klesají k nule, když se jejich první souřadnice blíží k bodu 1, je naše funkce spojitá ve všech bodech intervalu $\langle 0,1\rangle$. A počet bodů maxima a minima je na tomto intervalu nekonečně velký!




Obr. 37



K sestrojení takové podivné funkce by matematik 18. století musel dlouho kombinovat různé funkce, než by dospěl k tomu, že funkce

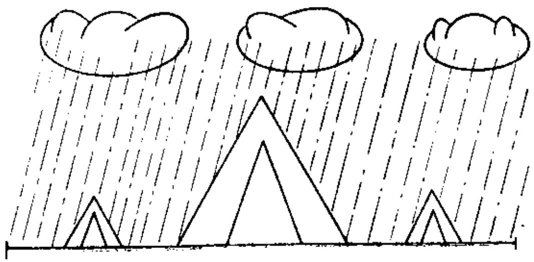
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & \text{je-li } x \neq 0, \\ 0 & \text{, je-li } x = 0 \end{cases}$$

má na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nekonečně mnoho maximálních a minimálních hodnot (obr. 37).

Avšak funkce s nekonečně mnoha maximálními a minimálními hodnotami byly pouze počátkem nepříjemností čekajících na matematiky. Džin teprve začínal unikat z láhve.

## Mokré body

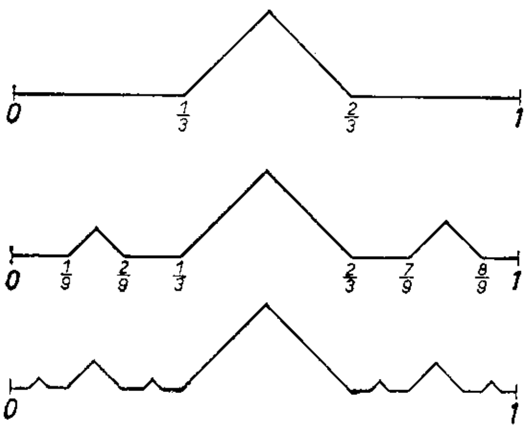
Funkce, kterou jsme sestrojili v předchozím odstavci, má pouze jeden bod, v jehož okolí je nekonečně mnoho bodů maxima a minima, a to bod 1. Nyní sestrojíme jinou funkci, která bude mít takových bodů mnohem více.



Předpokládejme, že na interval $\langle 0,1\rangle$ reálné osy shora prší. Před deštěm se budeme chránit takto: Interval $\langle 0,1\rangle$ rozdělíme na tři stejné části a nad střední částí postavíme stan ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Tento stan ochrání před deštěm všechny body střední části (kromě jejích krajích bodů, tj. bodů $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$). Dále každou ze zbývajících dvou částí rozdělíme opět na tři stejné části a střední části ochráníme před deštěm stany stejného tvaru (ale třikrát menších rozměrů). Dostaneme tak lomenou čáru, znázorněnou na obr. 38. Při třetím kroku sestrojíme další čtyři stany, pak osm atd.

Vzniká otázka, zda získaná lomená čára, připomínající pilu, ochraňuje všechny body intervalu či zda zůstaly body, které zmoknou? Některé z takových „mokrých" bodů lze

Obr. 38






snadno najít; jsou to krajní body chráněných částí (tj. např. body $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, atd.) Všechny tyto body zůstanou po postavení příslušného stanu na dešti a další stany je již neochrání. Snadno se dá nahlédnout, že množina všech těchto krajních bodů je nekonečná, avšak pouze spočetná.

Ukazuje se však, že kromě těchto spočetně mnoha „mokrých" bodů existuje ještě dalších nespočetně mnoho „mokrých" bodů. Abychom je mohli pohodlně popsat, použijeme trojkové soustavy. Jak známo, tato soustava je založena na stejném pozičním principu jako soustava desítková, jen s tím rozdílem, že jedna jednotka vyššího řádu nepředstavuje deset jednotek, ale pouze tři jednotky nižšího řádu. K zápisu čísel v trojkové soustavě proto stačí místo deseti číslic pouze tři číslice 0, 1 a 2.

Není také obtížné naučit se převádět čísla z trojkové soustavy do desítkové. Například číslo mající v trojkové soustavě zápis

$$0{,}02020202\ldots$$

je vlastně součtem geometrické řady, mající v desítkové soustavě tvar

$$\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \cdots$$

Součet této řady je roven $\frac{1}{4}$ a proto platí

$$[0{,}25]_{\mathrm{X}} = [0{,}020202\ldots]_{\mathrm{III}},$$

kde ovšem na levé straně je zápis v desítkové soustavě a na pravé straně zápis v trojkové soustavě.

Nyní již můžeme ukázat všechny body, které zůstanou „mokré" i po sestrojení všech ochranných stanů. První stan chrání všechny body ležící mezi body $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$. To jsou však právě ty body, které mají v trojkové soustavě zápis tvaru

$$0{,}1\ldots,$$

kde tečky zastupují libovolnou kombinaci číslic 0, 1, 2 (stejně tak jako v desítkové soustavě leží mezi body $\frac{1}{10}$ a $\frac{2}{10}$ všechny ty body, které mají v desítkové soustavě na prvním desetinném místě jedničku, tj. čísla tvaru 0,1 . . .).

Po prvním kroku zůstanou „mokré" ty body, jejichž zápis v trojkové soustavě má tvar

$$0{,}0\ldots$$

nebo tvar

$$0{,}2\ldots$$

Stejným způsobem se dokáže, že po sestrojení dvou stanů ve druhém kroku zůstanou „mokré" pouze body, jejichž zápisy v trojkové soustavě začínají jednou z těchto čtyř kombinací:

$$0{,}00\ldots$$
$$0{,}02\ldots$$
$$0{,}20\ldots$$
$$0{,}22\ldots$$

Takto, krok za krokem, se před deštěm ochraňují body, jejichž zápis v trojkové soustavě obsahuje jedničky. Nakonec zůstanou „mokré" pouze body, které lze zapsat v trojkové soustavě bez užití číslice 1. „Mokrý" zůstane například bod

$$\frac{1}{4} = 0{,}020202\ldots,$$

bod

$$\frac{3}{4} = 0{,}202020\ldots$$

atd.

A nyní je již zřejmé, proč množina všech „mokrých" bodů má mohutnost kontinua. Jejím bodům lze totiž



vzájemně jednoznačně přiřadit prvky množiny všech nekonečných telegramů (viz str. 98). K tomu stačí přiřadit každému bodu tvaru

$$0{,}20220200\ldots$$

nekonečný telegram tím, že 0 zaměníme tečkou a 2 zaměníme čárkou. Víme, že množina všech nekonečných telegramů má mohutnost kontinua, a proto má mohutnost kontinua i množina všech „mokrých" bodů.

Množinu bodů, které jsme nazvali „mokré", sestrojil poprvé Cantor a říká se jí proto *Cantorovo diskontinuum.* Ze způsobu konstruování stanů je patrné, že v okolí každého bodu Cantorova diskontinua je nekonečně mnoho bodů maxima a minima pilovité lomené čáry.

## Čertovo schodiště

S Cantorovou množinou souvisí ještě jedna zajímavá funkce. Sestrojí se takto: Opět rozdělíme interval $\langle 0, 1\rangle$ na tři stejné části a ve všech bodech střední části $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ položíme hodnotu funkce rovnou $\frac{1}{2}$. Levou i pravou třetinu intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme opět na tři stejné části a v části $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ položíme hodnotu funkce rovnou $\frac{1}{4}$ a v části $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ rovnou $\frac{3}{4}$. Nyní nám zbývají čtyři intervaly, v nichž funkce ještě není definována:

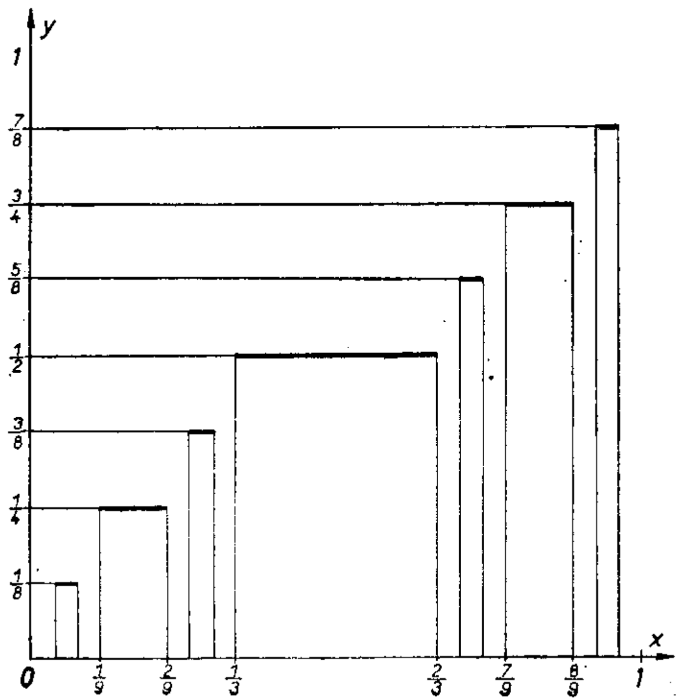
$$\langle 0, \frac{1}{9}\rangle, \langle \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\rangle, \langle \frac{2}{3}, \frac{7}{9}\rangle, \langle \frac{8}{9}, 1\rangle.$$

Každý z nich rozdělíme na tři stejné části a v každé ze středních částí položíme hodnotu funkce rovnou postupně

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \text{ a } \frac{7}{8}.$$

Postupujeme takto dále a dostaneme funkci definovanou ve všech „suchých" bodech, tj. ve všech bodech nepatřících do Cantorova diskontinua. Je snadné definovat ji i v bodech této množiny tak, aby potom byla spojitá a neklesající.

Obr. 39






Graf takové funkce je přibližně znázorněn na obr. 39. Má tvar schodiště s nekonečně mnoha schody (na obrázku ovšem všechny schody nejsou).

Ostatně, když už jsme se seznámili s křivkami majícími nekonečně mnoho maxim a minim, sotva někoho udivíme schodištěm o nekonečně mnoha schodech. Udivující je však něco jiného. Vypočítáme celkovou délku všech schodů našeho schodiště. První schod má délku $\frac{1}{3}$, oba další mají délku $\frac{1}{9}$, každý z dalších čtyř má délku $\frac{1}{27}$ atd. Součet délek všech schodů je tudíž vyjádřen součtem geometrické řady

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$$

Součet této řady je roven

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Celková délka všech schodů je tedy rovna 1. Avšak na těchto schodech funkce vůbec neroste, všechen její růst je soustředěn do bodů Cantorovy množiny. A na „délku" této množiny zbývá „velmi málo". Má sice mohutnost kontinua, avšak její délka je nulová (délka celého intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je rovna 1 a celková délka schodů je také rovna jedné, takže na Cantorovu množinu zbývá pouze nulová délka). Naše funkce tedy dokáže „stoupnout" od nuly do jedné, ačkoli vzrůstá pouze na množině nulové délky a přitom nedělá žádné skoky. Není to vskutku podivuhodné?

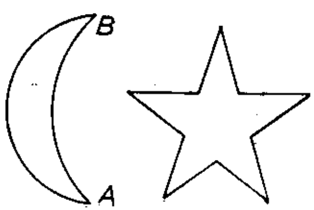
# Ostnatá čára

Po mnoho století pracovali matematikové pouze s křivkami majícími skoro v každém bodě tečnu. Pokud byly výjimky, pak to byly křivky nemající tečnu nejvýše v několika bodech. V těchto bodech se křivka jakoby lámala, a proto se takové body nazývaly body zlomu. Křivka na obr. 40a má dva body zlomu a křivka na obr. 40b deset bodů zlomu.

Avšak křivky, které jsme před chvílí sestavili, mají již nekonečně mnoho bodů zlomu: lomená čára z obr. 36 jich má spočetně mnoho a křivka, která vznikne z lomených čar z obr. 38 jich má dokonce nespočetně mnoho. „Láme" se ve všech bodech Cantorova diskontinua a kromě toho ještě ve vrcholech všech trojúhelníků. Avšak dokonce i tato křivka se láme na poměrně „malé" množině bodů — délka této množiny je nulová.

Dlouhou dobu žádný matematik nevěřil, že může existovat spojitá křivka skládající se výhradně z bodů zlomu, hrotů a ostnů. Matematikové byli ohromeni, když se podařilo takovou křivku zkonstruovat a nejen to, podařilo se dokonce zkonstruovat funkci, jejíž graf byl takovým ostnatým plotem. Jako prvnímu se to podařilo Bolzanovi. Avšak jeho práce nebyla uveřejněna a jako první uveřejnil takový příklad německý matematik K. Weierstrass. Je však obtížné

Obr. 40ab





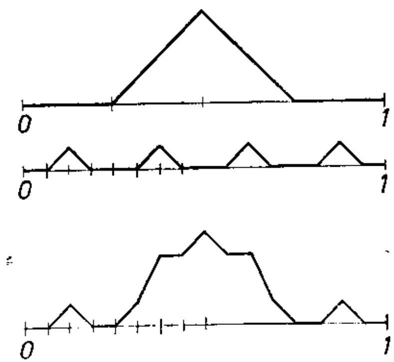

vyložit zde Weierstrassův příklad, neboť je založen na teorii trigonometrických řad. Bolzanův příklad je zcela jednoduchý a velmi připomíná lomené čáry, které jsme již sestrojili.

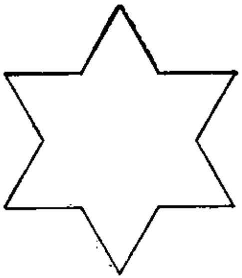
S nevelkými změnami uvedeme nyní Bolzanův příklad. Interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na čtyři stejně velké části a nad oběma středními částmi sestrojíme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník (obr. 41a). Získaná křivka je grafem jisté funkce; tuto funkci označíme $y = f_1(x)$.

Nyní každou ze čtyř částí rozdělíme ještě na čtyři stejně velké části a sestrojíme další čtyři rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky (obr. 41b). Dostaneme graf druhé funkce $y = f_2(x)$. Sečteme-li tyto dvě funkce, bude mít graf součtu $y = f_1(x) + f_2(x)$ tvar znázorněný na obr. 41c. Je patrné, že získaná lomená čára má již více bodů zlomu a že body zlomu jsou rozloženy hustěji. Při dalším kroku rozdělíme každou z částí na další čtyři části, sestrojíme 16 rovnostranných pravoúhlých trojúhelníků a přičteme příslušnou funkci $y = f_3(x)$ k funkci $y = f_1(x) + f_2(x)$.

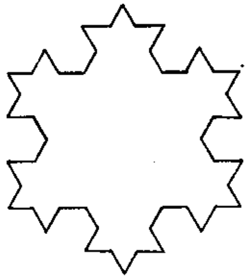
Při dalších krocích budeme dostávat stále a stále lomenější čáry, až nakonec výsledná čára bude mít bod zlomu v každém bodě a ani v jednom z nich nebude možné vést tečnu.

Obr. 41abc





Obr. 42a



Obr. 42b

Podobný příklad křivky, nemající nikde tečnu, sestrojil holandský matematik van der Waerden. Vzal rovnostranný trojúhelník, každou jeho stranu rozdělil na tři stejně velké části a nad středními částmi sestrojil nové rovnostranné trojúhelníky s vrcholem vně původního trojúhelníku. Dostal tak šesticípou hvězdu (obr. 42a). Každou z dvanácti stran této hvězdy rozdělil na další tři části a opět nad každou střední částí sestrojil rovnostranný trojúhelník. Vznikla tak ještě ostnatější čára, znázorněná na obr. 42b. Po nekonečně mnoha děleních a konstrukcích rovnostranných trojúhelníků vznikne čára, jejíž každý bod je bodem zlomu, jejíž každý bod má osten.

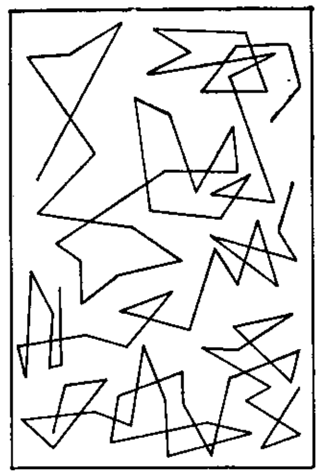
Matematikové sestrojili mnoho spojitých funkcí, jejichž grafy nemají tečnu v žádném bodě, a začali studovat jejich vlastnosti. Tyto vlastnosti se vůbec nepodobaly vlastnostem „rozumných" hladkých funkcí, s nimiž se dosud setkávali. Proto mnozí matematikové hleděli na nové funkce s úžasem. A nejen to, nejpřednější představitel klasické matematické analýzy Charles Hermite psal svému příteli holandskému matematikovi Stieltjesovi: „S hrůzou se odvracím od toho politováníhodného vředu spojitých funkcí nemajících derivaci ani v jednom bodě" (tj. jak jsme jim říkali, od všude ostnatých křivek).



Známý francouzský učenec H. Poincaré psal: „Dříve se při hledání nových funkcí myslelo na nějaký praktický účel. Nyní se vymýšlejí funkce jedině proto, aby se odhalila nedokonalost úsudku našich otců, žádný jiný závěr z nich nelze odvodit."

Další vývoj vědy však ukázal, že se Poincaré mýlil. Ve fyzice se vyskytují čáry velmi připomínající všude ostnaté čáry van der Waerdena a dalších matematiků. Jsou to trajektorie částic vykonávajících vlivem nárazů molekul tzv. Brownův pohyb. Francouzský vědec Perrin zachytil v náčrtech pohyb takových částic. Každých 30 vteřin pozoroval jejich polohu a získané body spojil úsečkami. Výsledkem byly složité lomené čáry, podobné čarám znázorněným na obr. 43. Nesmíme si však myslet, že v době

Obr. 43



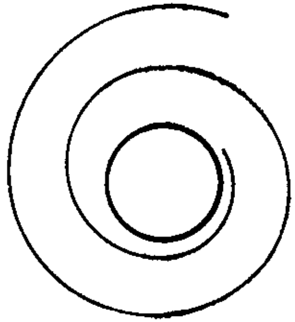
mezi jednotlivými pozorováními se částice pohybuje skutečně po přímce. Kdyby ji Perrin pozoroval nejen každou půlminutu, ale každou půlvteřinu, musel by každou úsečku nahradit stejně složitou lomenou čarou jako jsou čáry na obr. 43. A čím menší by byly časové intervaly mezi jednotlivými pozorováními, tím složitější a „ostnatější" by byly získané čáry. Americký matematik N. Wiener ukázal, že Brownův pohyb natolik malé částice, že její setrvačnost lze zanedbat, je možné popsat křivkou nemající nikde tečnu.

## Uzavřená křivka nekonečné délky

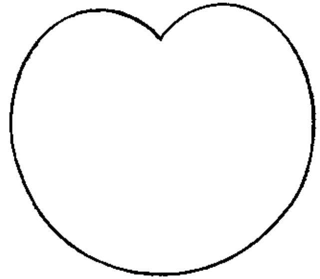
S křivkami nekonečné délky se setkáváme často — nekonečnou délku má přímka, parabola, hyperbola atd. Všechny tyto křivky „ubíhají" do nekonečna, a není tedy nic podivného na tom, že mají nekonečnou délku. Ostatně, není obtížné sestrojit také křivku, která celá leží v omezené části roviny a má přitom nekonečnou délku. K tomu stačí vzít kružnici a „navinout" na ni spirálu s nekonečným počtem závitů (obr. 44). Jelikož závitů je nekonečně mnoho a délka každého závitu je větší než délka kružnice, je délka celé spirály nekonečná.

Ale zdalipak může existovat uzavřená křivka nekonečné délky? „Obvyklé" uzavřené křivky, jako jsou například kružnice, elipsa, kardioida (obr. 45), mají konečnou délku. Avšak délka ostnaté van der Waerdenovy křivky konečná není. Opravdu, nechť je obvod výchozího trojúhelníku roven třem. Hvězda vzniklá po prvním kroku má, jak se dá snadno spočítat, obvod rovný čtyřem. Dalším krokem vznikne lomená čára, skládající se ze 48 úseček délky $\frac{1}{9}$. Její obvod je tedy roven $\frac{48}{9}$. Délka další lomené čáry je $\frac{192}{27}$ atd.





Obr. 44



Obr. 45

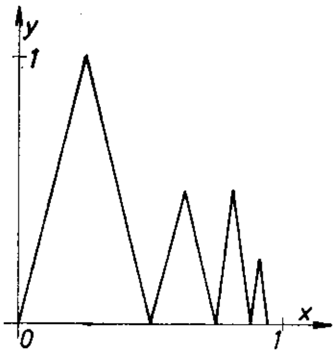
Obecně, při $n$-tém kroku vznikne čára o obvodu $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. A při rostoucím $n$ roste tento výraz nade všechny meze. Délka van der Waerdenovy křivky je tedy nekonečná.

Existují i jiné křivky nekonečné délky. Sestrojme například lomenou čáru takto: Interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na polovinu a nad levou polovinou sestrojíme rovnoramenný trojúhelník o výšce 1. Potom rozpůlíme interval $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$ a nad jeho levou polovinou sestrojíme rovnoramenný trojúhelník o výšce $\frac{1}{2}$. Další rovnoramenný trojúhelník sestrojíme nad intervalem $\langle \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\rangle$ a jeho výšk[redacted]ovnež $\frac{1}{2}$. Výšky dalších čtyř trojúhelníků zvolíme rovny $\frac{1}{4}$ atd. (obr. 46).

Dostaneme opět „klesající horský hřeben“, podobně jako na str. 132. Nyní však klesá velmi pomalu. Délka bočních stran prvního trojúhelníka je zřejmě větší než 1, délka bočních stran druhého a třetího trojúhelníka je větší než $\frac{1}{2}$, délka bočních stran čtvrtého, pátého, šestého a sedmého trojúhelníka je větší než $\frac{1}{4}$ atd. (boční strana je vždy delší než výška). Délka celé lomené čáry není tedy menší než součet nekonečné řady

$$2 + \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right) + \dots$$

Ale součet čísel v každé závorce je roven 2 a závorek je nekonečně mnoho. Součet takové řady je nekonečný a délka naší lomené čáry je tedy nekonečná.




Obr. 46

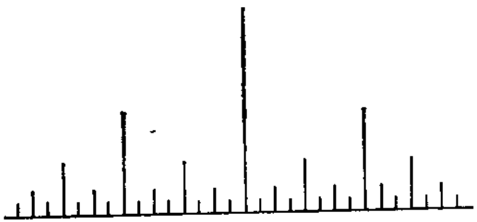


## Matematický koberec

Vypráví se, že Kateřina II. se jednou zeptala jakéhosi generála, jaký je rozdíl mezi moždířem a houfnicí. V rozpacích generál odpověděl: „Víš, carevno-mátuško, moždíř – to je jedna věc a houfnice – to je druhá věc“. Stejně obsažnou odpověď lze asi dostat, zeptáme-li se člověka, jemuž je matematika cizí, jaký je rozdíl mezi křivkou, plochou a tělesem. A nejen to, bude se divit, jak je vůbec možné, ptát se na tak samozřejmou věc. Každému je přece jasné, že křivka, plocha a těleso jsou zcela různé věci a nikoho nenapadne nazývat kružnici plochou nebo kulovou plochu křivkou.

Jeden vtipný šachový velmistr řekl, že rozdíl mezi šachovým mistrem a šachistou začátečníkem spočívá v tom, že v postavení, ve kterém vidí mistr plno záhad, je pro začátečníka vše jasné. Podobně je tomu i s naší otázkou. Pokud jde ovšem o takové geometrické útvary, jako jsou čtverce nebo kružnice, nevznikají u nikoho žádné pochyby o tom, zda se jedná o křivky nebo o plochy. Ale během rozvoje vědy se po Cantorových objevech vynořilo mnoho podivuhodných geometrických útvarů, o nichž nejen školák, ale ani zkušený profesor matematiky nerozhodne bez váhání, zda jsou to křivky, plochy nebo tělesa.

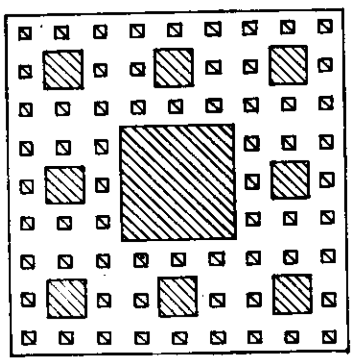
Uvedeme několik příkladů takových útvarů. Vezmeme interval $\langle 0, 1\rangle$, rozpůlíme jej a v jeho středu vztyčíme kolmici délky $\frac{1}{2}$. Potom každou z polovin opět rozpůlíme a v každém z nových dělicích bodů vztyčíme kolmici, nyní však délky $\frac{1}{4}$. Dále opět získané intervaly rozpůlíme a v dělicích bodech vztyčíme kolmice délky $\frac{1}{8}$. Po pátém



Obr. 47

kroku dostaneme útvar znázorněný na obr. 47. Neomezíme se však na pět kroků, ale budeme naši operaci opakovat nekonečněkrát. Výsledkem bude jakýsi geometrický útvar. A čím je tento útvar, křivkou nebo plochou? Vztyčili jsme přece nekonečně mnoho kolmic. Neslijí se tyto kolmice dohromady a nezaplní malý kousek plochy „nad intervalem“ $\langle 0, 1\rangle$?

A druhý příklad: Vezmeme čtverec o straně 1, rozdělíme jej na 9 stejně velkých částí a vyjmeme střední část (strany vyjímaného čtverečku však ve čtverci ponecháme). Každý ze zbylých čtverců opět rozdělíme na devět stejně velkých



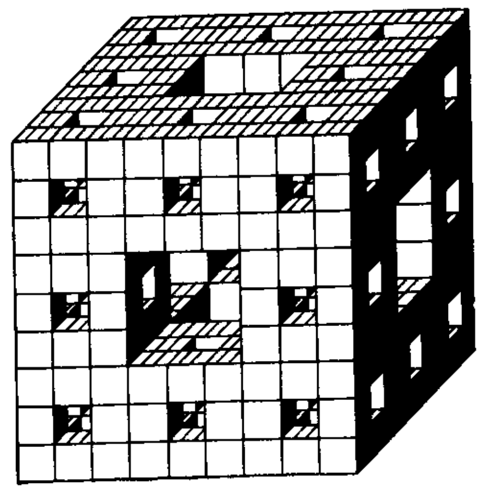
Obr. 48



čtverečků a střední čtverečky opět vyjmeme. Další krok nás již přivede k útvaru znázorněnému na obr. 48 (vyjmuté čtverečky jsou vyšrafovány). Útvar na obr. 48 je ještě plochou. Nezastavíme se však na třetím kroku a budeme nekonečněkrát dělit čtverečky na devět stejně velkých částí a vyjímat střední čtverečky. Výsledkem bude jistý geometrický útvar nazývaný po polském matematikovi, který si jej vymyslel, *Sierpińského koberec.*

Tento obrazec se podobá látce utkané šíleným tkalcem. Podél i napříč se táhnou nitě osnovy a útku a splétají se do symetrických a velmi krásných vzorů. Sama látka je však velmi „řídká“ — každý její kousek je „děravý“, i z toho nejmenšího čtverečku byla vyjmuta střední část. A není vůbec jasné, čím je tento koberec — křivkou nebo plochou? Na jedné straně neobsahuje žádnou celistvou část, a proto je stěží plochou, a na druhé straně jsou jeho nitě spleteny

Obr. 49



do tak složitého vzoru, že sotva někdo bez váhání prohlásí Sierpińského koberec za křivku. V žádném případě nelze tento obrazec narýsovat.

A Sierpińského koberec není nejsložitější geometrický útvar. Místo čtverce bychom mohli vzít krychli, rozdělit ji na 27 stejně velkých krychliček a vyjmout spolu se střední krychličkou ještě šest s ní sousedících krychliček. Potom opět rozdělit každou ze zbylých krychliček na 27 částí a pokračovat ve vyjímání (na obr. 49 je znázorněno těleso zbylé po dvou krocích). Provedeme tuto operaci nekonečněkrát. Čím je zbylý geometrický útvar — křivkou, plochou nebo tělesem?

## Euklides nepomáhá

Když před matematiky dřívějších dob vyvstal složitý geometrický problém, podívali se nejdříve, co o tom píše Euklides. Téměř po dvě tisíciletí sloužil Euklides za vzor matematické přesnosti a jako encyklopedie geometrické moudrosti. Ne nadarmo i filosofové, ve snaze vyhnout se výtkám z nepřesnosti úvah, se obraceli k Euklidovu jazyku a formulovali svá tvrzení jako axiómy, lemmata a věty.

Ale právě o otázce, jež nás zajímá, píše Euklides něco zcela nejasného. První řádky Euklidových „Základů" říkají toto:

1. Bod je to, co nemá části.
2. Čára je to, co má jen délku bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Plocha je to, co má jen délku a šířku.
5. Hranicemi plochy jsou čáry.
6. Mez je to, co je hranicí něčeho.
7. Útvar je to, co se nachází uvnitř nějaké nebo nějakých mezí.



Toto je vším možným, jenom ne přesnou matematickou definicí. Člověk, který neví, co je to bod, křivka, plocha, se to sotva doví z těchto „definic" připomínajících odpověď bezradného generála („Čára — to je jedna věc, a plocha — to je druhá věc"). A určitě se z těchto definic nedovíme, čím je Sierpińského koberec — křivkou nebo plochou, má-li pouze délku bez šířky nebo má-li délku i šířku.

Ale v Euklidově době tak složité útvary jako je Sierpińského koberec nebyly známy a pro jednoduché útvary nebyly definice příliš zapotřebí: každý viděl, kde je na obrázku čára a kde plocha. Ostatně i Euklides zřejmě cítil, že s jeho definicemi základních pojmů není vše v pořádku. Uvedl je na začátku knihy a pak na ně dočista zapomněl a ani jednou jich v celé práci nepoužil.

## Jsou zapotřebí přesné definice?

Po dvě tisíciletí byla Euklidova autorita neotřesitelná. Pochybovat o nějakém jeho tvrzení znamenalo definitivně a nenávratně ztratit svou dobrou matematickou pověst. Jeden z největších matematiků 19. století Carl Friedrich Gauss, který ještě před Lobačevským dospěl k základním idejím neeuklidovské geometrie, se neodvážil své výsledky uveřejnit, obávaje se — jak psal jednomu ze svých přátel — křiku Boioťanů*). A teprve odvážný vědecký čin velikého ruského geometra Nikolaje Ivanoviče Lobačevského, který své objevy uveřejnil neohlížeje se na posměch učenců, kteří ho nechápali, učinil neeuklidovskou geometrii obecným majetkem.

*) Boioťané — řecký kmen, který se považoval za zvlášť nadaný duševními schopnostmi.

Po uveřejnění prací N. I. Lobačevského bylo zřejmé, že existují dvě, logicky stejně bezesporné geometrie, které však vedou ke zcela odlišným tvrzením. Ale je-li tomu tak, ztrácejí jakákoli odvolání na „geometrickou názornost" svou oprávněnost. Každé geometrické tvrzení bylo třeba založit na přesných definicích a bezúhonných logických tvrzeních. A především pro základní geometrické pojmy — křivky, útvary, tělesa — bylo třeba najít přesné definice, ničím nepřipomínající definice typu „toto je jedna věc, a toto zase druhá věc".

Snaha po přesných definicích byla vlastní nejen geometrii, ale i matematické analýze 19. století.

Pomocí diferenciálního a integrálního počtu, který svými pracemi vytvořili Newton, Leibniz, Euler, Lagrange a další velcí matematikové 17. a 18. století, se podařilo řešit nejrůznější úlohy — od výpočtu dráhy střely až do předpovědí o pohybu planet a komet. Avšak základní pojmy, s jejichž pomocí bylo těchto vynikajících výsledků dosaženo, byly vymezeny velice nepřesně. Základ tehdejší matematické analýzy — pojem nekonečně malé veličiny — se zdál být něčím na rozhraní mezi bytím a nebytím, něčím jako nula, ale ne úplná nula. Matematikové 18. století byli nuceni dodávat svým pochybujícím žákům odvahy slovy: „Pracujte a víra přijde."

Ale matematika přece není náboženství a nelze ji budovat na víře. A co bylo ještě vážnější — metody, dávající tak významné výsledky v rukou velikých mistrů, vedly k chybám a paradoxům, jakmile jich používali méně talentovaní žáci. Mistry chránila před chybami jejich neomylná matematická intuice, onen podvědomý cit, často vedoucí ke správné odpovědi mnohem rychleji než dlouhé logické úvahy. Žákům taková intuice chyběla a konec 18. století byl poznamenán neslýchanou ostudou matematiky — záplavou vzorců nemajících mnohdy ani cenu papíru, na němž byly tištěny, a pochybných tvrzení, jejichž použitelnost byla zcela nejasná.



A tak matematikové — podobni dětem, které ničí krásnou hračku, aby zjistily, jak je udělána — podrobili všechny dosud užívané pojmy tvrdé kritice a počali na základě přesných definic matematiku budovat znovu. Odkazy na názornost se zavrhovaly a místo nich se vyžadovala nejpřísnější logika*). Avšak požadavkům logiky nevyhovovaly ani nejjednodušší obraty z učebnic matematické analýzy, jako například věta:

„Uvažujme oblast **G**, omezenou uzavřenou křivkou $\Gamma$."

Co je to uzavřená křivka? Proč je hranicí oblasti? Na kolik částí dělí rovinu uzavřená křivka a kterou z těchto částí máme na mysli?

Na žádnou z těchto otázek matematika 18. století neodpovídala. Matematikové jednoduše nakreslili ovál a mysleli, že je tím vše řečeno. Ale v 19. století již obrázkům nevěřili. Otázka „co je to křivka" se stala jednou z nejpalčivějších.

Trvalo však velmi dlouho, než se podařilo dát na ni vyčerpávající odpověď.

## Křivka je stopa pohybujícího se bodu

Aby bylo možno podat přesnou definici křivky, bylo zapotřebí vycházet z oněch názorných představ, které vedly k vytvoření tohoto matematického pojmu: z představy dlouhých a tenkých nití, světelných paprsků, dlouhých a úzkých cest. Ve všech těchto případech je délka o tolik větší než šířka, že lze šířku zanedbat. Výsledkem matematické idealizace je pojem křivky nemající šířku.

*) Přitom se někdy s vaničkou vylévalo i dítě a ve 20. století se mnohé ze „zavrhnutého" vrátilo opět do vědy.

První pokus o přesnou definici křivky patří francouzskému matematikovi Camille Jordanovi. Jordan vycházel z toho, že dráhu pohybujícího se velmi malého tělesa si lze představit jako úzkou a dlouhou trubičku. Čím menší jsou rozměry pohybujícího se tělesa, tím se stává trubička užší a užší, až nakonec dostaneme dráhu pohybujícího se bodu — čáru nemající šířku. Z tohoto přirovnání vyšel Jordan při definici křivky a křivkou nazval dráhu pohybujícího se bodu. Sám bod se přitom musel pohybovat spojitě — beze skoků.

Přesněji zněla Jordanova definice takto: K určení polohy pohybujícího se bodu je zapotřebí zadat jeho souřadnice v každém okamžiku pohybu. Jelikož pohyb se odehrává během nějakého konečného časového intervalu, je možné bez újmy na obecnosti předpokládat, že tímto intervalem je interval $\langle 0, 1\rangle$. Jinými slovy, pohyb bodu začíná v nějakém okamžiku, od něhož začneme čas počítat a končí po uplynutí nějaké časové jednotky (jedné vteřiny, jedné minuty, jednoho roku atd.). V každém okamžiku $t$ tohoto časového intervalu má pohybující se bod jisté souřadnice. Souřadnice pohybujícího se bodu tedy závisí na okamžiku $t$, jsou jeho funkcemi. Označme tyto funkce (v případě, že se pohyb odehrává v rovině) symboly $f(t)$ a $g(t)$:

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

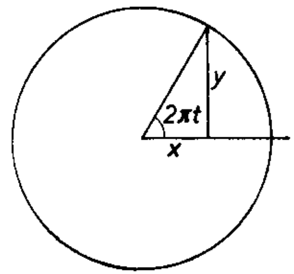
Podmínka „spojitosti pohybu" bodu znamená, že funkce $f(t)$ a $g(t)$ jsou spojité v každém bodě intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Zhruba řečeno to znamená, že při malé změně $t$ se málo změní také hodnoty funkcí $f(t)$ a $g(t)$. Přesněji, blíží-li se $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ k nějaké hodnotě $t$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, pak platí rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$$

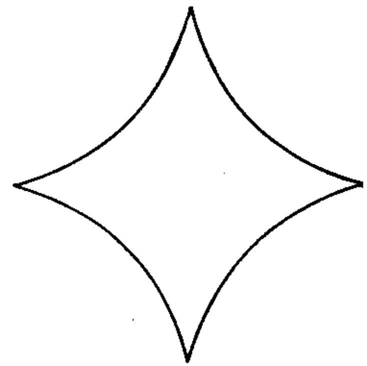
a

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = g(t).$$






Obr. 50



Obr. 51

Ukázalo se, že Jordanova definice byla dosti zdařilá. Všechny křivky, s nimiž matematici té doby pracovali, byly křivkami v Jordanově smyslu, čili jak se říká, byly *Jordanovými křivkami*. Vezměme například kružnici o poloměru 1. Délka této kružnice je $2\pi$. Má-li ji tudíž oběhnout bod za jednotku času, musí se pohybovat rychlostí $2\pi$. Za dobu $t$ tedy oběhne oblouk délky $2\pi t$. Z obrázku 50 je zřejmé, že její souřadnice v čase $t$ jsou dány vzorci

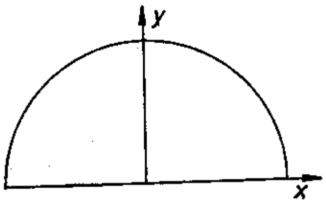
$$x = \cos 2\pi t,$$
$$y = \sin 2\pi t.$$

Tyto rovnice se nazývají *parametrickými rovnicemi kružnice*. Parametrické rovnice křivky znázorněné na obr. 51 (tato křivka se nazývá *astroida*) jsou

$$x = \cos^3 2\pi t,$$
$$y = \sin^3 2\pi t.$$

Jordanovými křivkami mohou být i čáry utvořené z různých křivek. Vezměme například křivku, tvořenou půl-

Obr. 52




kružnicí o poloměru 1 a jejím průměrem (obr. 52). Pohybující se bod oběhne za polovinu času půlkružnici a za druhou polovinu průměr. Vyjádření souřadnic při pohybu po kružnici již známe. Při pohybu po průměru zůstává souřadnice $y$ rovna nule a $x$ se mění od $-1$ do 1. Výsledkem budou tyto parametrické rovnice naší křivky:

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t, & \text{je-li } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ 4t - 3, & \text{je-li } \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \sin 2\pi t, & \text{je-li } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{je-li } \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

## Věta je zřejmá, důkaz nikoli

Použitím jeho pojmu křivky se Jordanovi podařilo upřesnit význam onoho obratu z učebnic matematické



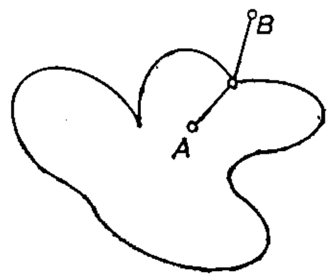
analýzy, o němž jsme již hovořili: „Nechť uzavřená křivka $\Gamma$ je hranicí oblasti G.“ Uzavřená Jordanova křivka — to je taková Jordanova křivka, která se v čase $t = 1$ dostane do téhož bodu, ve kterém byla v čase $t = 0$. Jestliže přitom různým okamžikům $t_1$ a $t_2$, ležícím mezi 0 a 1, odpovídají různé body, pak tato křivka sama sebe neprotíná.

Jordan dokázal tuto větu:

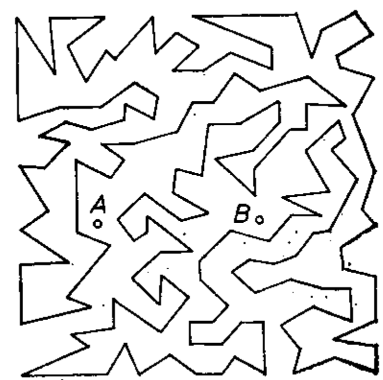
Uzavřená Jordanova křivka $\Gamma$, která sama sebe neprotíná, dělí celou rovinu na dvě části. Dva body ležící v téže části lze spojit lomenou čarou neprotínající křivku $\Gamma$ a dva body z různých částí takovou čarou spojit nelze, každá lomená čára, která je spojuje, protíná křivku $\Gamma$ (obr. 53).

Tato věta se zdá být zcela zřejmou, ale její důkaz vyžaduje velmi jemných úvah. Důkaz je dosti složitý dokonce i v případě, že křivka $\Gamma$ je uzavřený mnohoúhelník. Pokuste se bez rozmýšlení říci, zda lze body $A$ a $B$ na obr. 54 spojit lomenou čarou neprotínající křivku $\Gamma$.

Obr. 53




Obr. 54



Dvě části, na které uzavřená Jordanova křivka dělí rovinu, se nazývají vnitřní a vnější oblast ohraničená touto křivkou. Pojem oblasti ohraničené uzavřenou křivkou tak nabyl přesného významu.

## Křivka prochází všemi body čtverce

Když Jordan podal svou definici křivky, zdálo se zpočátku, že cíle je dosaženo, že máme přesnou definici křivky, definici neopírající se o názornost. Brzy se však ukázalo, že tomu tak není — Jordanova definice v sobě zahrnuje nejen matematikům běžné křivky, ale i útvary, které by nikdo křivkami nenazval. Se „všude ostnatými křivkami" by se matematici ještě nějak smířili, ale nazvat křivkou čtverec, k tomu by nikdo nenašel odvahu. Ukázalo se však, že jak čtverec, tak trojúhelník (ne obvod trojúhelníka, ale celý trojúhelník se všemi vnitřními body), tak i kruh jsou křivky v Jordanově smyslu. Dokázal to italský matematik Peano.

Již jsme si říkali, že Cantor našel vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body úsečky a čtverce, tj. ukázal, že úsečka má stejně mnoho bodů jako čtverec. Toto přiřazení nebylo spojité. Když se bod pohyboval po úsečce, jemu přiřazený bod čtverce nepopolézal jako brouk, ale skákal jako blecha. Opravdu, vezměme na úsečce body

$$0{,}50000000\ldots \quad \text{a} \quad 0{,}4999909990000000\ldots$$

Tyto body leží dosti blízko u sebe, ale jim odpovídající body čtverce jsou od sebe dosti vzdáleny. Prvnímu bodu totiž odpovídá bod (0,50000..., 0,00000...). ležící na dolní straně čtverce a druhému bodu odpovídá bod (0,4999000..., 0,9999000...), ležící až u horní strany čtverce. A budeme-li zvětšovat počet devítek u druhého bodu,

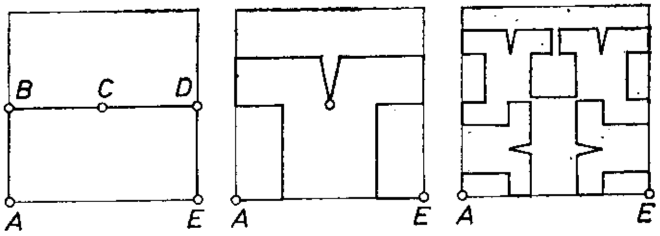


takže se bude blížit k prvnímu bodu, odpovídající body čtverce ani nenapadne, aby se k sobě přibližovaly.

Cantorovo zobrazení úsečky na čtverec je sice vzájemně jednoznačné, ale není spojité. Neurčuje tudíž Jordanovu křivku. Peanovi se podařilo najít jiné zobrazení množiny všech bodů úsečky na množinu všech bodů čtverce, při němž blízkým bodům úsečky odpovídají blízké body čtverce. Jinými slovy, Peanovi se podařilo sestrojit Jordanovu křivku probíhající všemi body čtverce!

Nemůžeme pochopitelně Peanovu křivku nakreslit, ledaže bychom napodobili abstraktního malíře a nakreslili černý čtverec. Na takovém čtverci však stejně nepoznáme, kde křivka začíná, kde končí a jak čtvercem prochází. Nebudeme proto následovat příkladu abstraktního malíře, ale příkladu fyzika Perrina a znázorníme polohy pohybujícího se bodu lomenou čárou. Čím menší budou časové intervaly mezi jednotlivými „pozorováními", tím věrněji bude získaná lomená čára zobrazovat Peanovu křivku.

Nejprve zachytíme polohu pohybujícího se bodu každou čtvrtinu vteřiny, tj. zakreslíme jeho počáteční polohu, pak po $\frac{1}{4}$ vteřiny od začátku pohybu, pak po $\frac{1}{2}$ vteřiny, pak po $\frac{3}{4}$ vteřiny a potom koncovou polohu. Dostaneme 5 bodů, spojíme je úsečkami a dostaneme lomenou čáru, znázorněnou na obr. 55a. Tato lomená čára ovšem neprochází všemi body čtverce. Zmenšíme však časové intervaly mezi jednotlivými pozorováními a budeme zaznamenávat polohu bodu každou $\frac{1}{16}$ vteřiny. Získaná lomená čára bude klikatější, zvětší se počet bodů zlomu a bude mít tvar znázorněný na obr. 55b. Budeme-li zaznamenávat polohu pohybujícího se bodu ještě častěji, dostaneme lomenou čáru znázorněnou na obr. 55c. Vidíme, že čára zaplňuje čtverec stále hustěji a hustěji. V limitě, kdybychom pozorovali pohybující se




Obr. 55abc

bod v každém okamžiku, dostaneme křivku probíhající všemi body čtverce bez výjimky.

Je však třeba dodat, že Peano sice získal na rozdíl od Cantora spojitou křivku, ale na druhé straně jeho křivka již neudávala vzájemně jednoznačné zobrazení úsečky na čtverec. Některými body procházela několikrát. Později se podařilo dokázat, že nelze zachovat zároveň spojitost a vzájemnou jednoznačnost přiřazení: neexistuje Jordanova křivka procházející všemi body čtverce právě jedenkrát!

## Vše bylo v troskách

Těžko lze vyjádřit slovy, jaký dojem v matematickém světě učinil Peanův výsledek. Zdálo se, že se vše zřítilo, že nejzákladnější matematické definice ztratily všechen smysl — nebyl vidět žádný rozdíl mezi křivkou a plochou, plochou a tělesem (výsledek o nemožnosti vzájemně jednoznačného a spojitého zobrazení mezi úsečkou a čtvercem nebyl ještě



znám). Význačný francouzský matematik H. Poincaré s hořkostí zvolal:

„Jak nás mohla intuice do takové míry oklamat!"

Bylo zřejmé, že Jordanova definice křivky není bez vady. Na jedné straně je příliš široká: zahrnuje v sobě i Peanovu křivku. A na druhé straně je příliš úzká: ne všechny obrazce, které bychom snad intuitivně zařadili mezi křivky, spadají do této definice. Například čára zobrazená na obr. 44 str. 145 (kružnice s navinutou spirálou) již není Jordanovou křivkou. Byl objeven i další, hlouběji ukrytý, nedostatek Jordanovy definice — tato definice se týká nejen samotné křivky, ale i toho, jak a s jakou rychlostí ji bod probíhá. Představme si například běžce, který proběhne první polovinu kružnice za $\frac{1}{4}$ minuty a pak unaven proběhne druhou polovinu kružnice za $\frac{3}{4}$ minuty. V tomto případě dostaneme zřejmě zcela jiné parametrické rovnice než na str. 155.

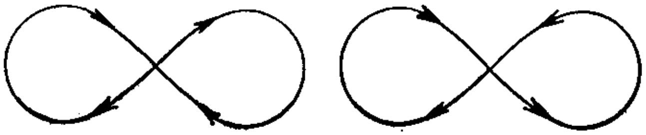
A bod přece může kružnici probíhat nekonečně mnoha způsoby, chvíli rychleji, chvíli pomaleji. Táž kružnice může proto mít různé parametrické rovnice. A není příliš snadné domyslet se, že rovnice

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$
$$y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

určují touž kružnici jeho rovnice

$$x = \cos 2\pi t,$$
$$y = \sin 2\pi t.$$

U složitějších křivek se lze snadno zmýlit. Vezměme například lemniskatu. Tuto křivku lze proběhnout tak, jak je znázorněno na obr. 56a a nebo tak, jak je znázorněno



Obr. 56ab

na obr. 56b. A rozhodnout podle parametrických rovnic, zda jsou to křivky totožné anebo různé, je dosti obtížné.

Vznikla tedy opět otázka, co je to křivka a čím se liší od plochy? Odpověď souvisela s obecnými Cantorovými výsledky o geometrických útvarech.

## Jak se dělají sochy

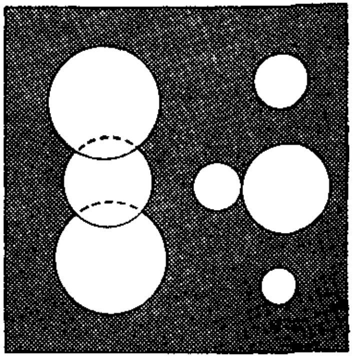
Když Cantor vytvořil základy teorie množin, přešel k otázce *„co je to geometrický útvar“*. Nejobecnější odpověď na tuto otázku zněla: geometrický útvar je libovolná množina bodů prostoru. Leží-li tato množina v rovině, je to rovinný geometrický útvar. Taková odpověď je však příliš obecná — „útvar“ v tomto smyslu nemá žádné dostatečně zajímavé vlastnosti.

Bylo proto nejdříve zapotřebí omezit souhrn studovaných množin, vyčlenit z nich ty, které se svými vlastnostmi nejvíce blíží běžným geometrickým útvarům.

Abychom mohli určit třídu takových útvarů, objasníme, co mají běžné geometrické útvary (jako jsou čtverec, kruh, úsečka, astroida atd.) společného. Ukazuje se, že všechny tyto útvary lze získat jednotným způsobem.



Obr. 57



Vypráví se, že slavný sochař Rodin odpověděl na otázku, jak se mu daří dělat jeho vynikající sochy, slovy: „Vezmu kus mramoru a všechno přebytečné odtesám.“

Tímto způsobem lze získat libovolný omezený rovinný geometrický útvar.**) Je třeba vzít nějaký čtverec, ve kterém daný útvar leží*) a potom „odsekat“ všechno přebytečné. Nemusíme však odseknout vše najednou. Můžeme to udělat po částech. Například můžeme při každém kroku odstranit malý kousek ve tvaru kruhu. Přitom vnitřek kruhu odstraníme, ale jeho hranici — kružnici — ponecháme.

Na první pohled se zdá, že takto lze dostat pouze útvary, které mají podobný tvar jako útvary znázorněné na obr. 57. Připustíme-li přitom, že můžeme odstranit nejen jeden kruh nebo dva kruhy nebo konečně mnoho kruhů, ale i ne-

*) Předpokládáme, že k útvaru patří i jeho hranice (pozn. překl.)

**) Takový čtverec existuje, neboť předpokládáme, že daný útvar je omezený (pozn. překl.).

konečně mnoho kruhů, můžeme takto získat libovolný útvar. Stačí dokonce připustit pouze možnost odstranění nejvýše spočetně mnoha kruhů. Stačí postupovat takto: Vzít všechny kruhy, jejichž poloměry i souřadnice středů jsou racionální. Podle věty na str. 90 je množina takových kruhů spočetná. A potom odstranit z roviny všechny ty kruhy naší množiny, uvnitř kterých není žádný bod geometrického útvaru.

Zřejmě nám zbude pouze samotný geometrický útvar a odstraněných kruhů nebude více než spočetně mnoho.

Ostatně, není nutné odstraňovat kruhy. Místo nich to mohou být čtverce, obdélníky, elipsy — stačí zachovat jedinou podmínku: vnitřní body se odstraňují, hraniční body se ponechávají.

## Kontinua

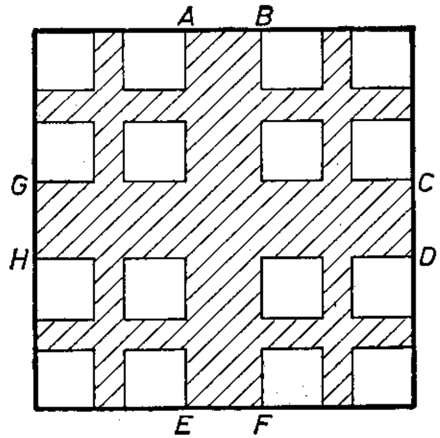
Ukazuje se, že kromě běžných geometrických útvarů lze odstraněním spočetně mnoha kruhů (čtverců atd.) získat i další množiny, které se již běžným útvarům příliš nepodobají, ale které přesto mají mnoho zajímavých vlastností. Například Sierpińského koberec, o němž jsme již nejednou hovořili, se dostane právě tímto způsobem: ze čtverce o straně 1 se postupně odstraňují malinké čtverečky, přičemž se jejich strany ve čtverci ponechají.

Odstraňováním však můžeme dostat i útvary nemající žádný kousek celistvý. Budeme-li například odstraňovat kříže,*) jak je to znázorněno na obr. 58, dostaneme nakonec množinu, neobsahující žádný celistvý

*) A odstraníme-li s každým křížem i jeho krajní úsečky, např. úsečky $AB$, $CD$, $EF$, $GH$.



Obr. 58




kousek (čili, jak se říká, množinu *totálně nesouvislou*). Zavedeme proto toto omezení: po každém odstranění musí zbýt množina tvořená „jediným kouskem". Potom i po všech odstraněních zbude množina tvořená jediným kouskem (čili jak říkají matematici, množina *souvislá*). Kromě toho bude zbylá množina omezená, neboť se celá nachází v nějakém čtverci.

Získané množiny tedy vyhovují těmto třem podmínkám:

1) množina F se sestrojuje ze čtverce odstraňováním spočetně mnoha kruhů (čtverců atd.) s ponecháním jejich hranic;

2) množina F je tvořena „jediným kouskem" (je souvislá),

3) množina F je omezená.

Takové množiny nazval Cantor *kontinua* (připomeňme, že latinské slovo „continuus" znamená „spojitý"). A právě kontinua se ukázala být nejobecnějšími množinami, jejichž vlastnosti jsou velmi blízké vlastnostem běžných geometrických útvarů.

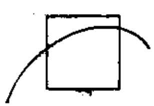
## Cantorovy křivky

Nyní jsme již připraveni odpovědět na otázku, co je to rovinná křivka. Jelikož rovinné křivky mají být geometrickými útvary, je zřejmé, že je třeba je hledat mezi kontinui. Kontinuem je však i kruh a čtverec a o těchto útvarech jistě neřekneme, že jsou to křivky. Musíme proto přidat nějakou podmínku, která by takové útvary vyloučila.

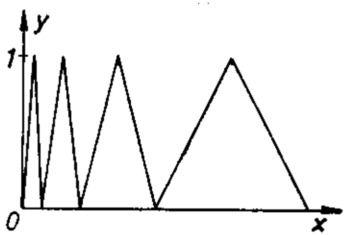
Všimněme si, že jak kruh, tak i čtverec obsahují „celistvé" kousky roviny. A křivky takové celistvé kousky roviny neobsahují; vezmeme-li jakkoli malý čtvereček, vždy jsou v něm body, které na křivce neleží (obr. 59). A to je právě potřebná doplňující podmínka: *rovinnou křivkou v Cantorově smyslu* se nazývá *kontinuum nacházející se v rovině a nezaplňující žádný celistvý kousek roviny* (tj. takové, že v každém čtverci leží body, které do kontinua nepatří).

Například úsečka, obvod trojúhelníka, kružnice, hranice čtyřlisté růže (obr. 70)* jsou křivky. Křivkou je také Sierpińského koberec. Jelikož jsme při jeho sestrojování proděravěli všechny čtverce, jež jsme při dělení dostali, nemůže obsahovat žádný celistvý kousek roviny. Cantorovou křivkou je i kružnice s navinutou spirálou a zubatá křivka z obr. 60

Obr. 59



Obr. 60




*) Viz str. 180.



spolu s intervalem ⟨0,1⟩ osy *y*. Vůbec všechny útvary, které jsou křivkami v názorném, naivním pojetí, jsou také křivkami v Cantorově smyslu. A obrazce, obsahující alespoň jediný celistvý kousek roviny, již mezi Cantorovy křivky nepatří.

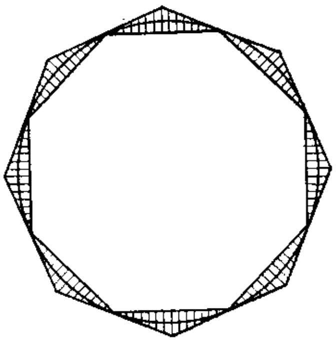
Avšak i mezi Cantorovými křivkami jsou takové, jejichž vlastnosti se vůbec nepodobají vlastnostem běžných křivek. O některých takových křivkách si nyní povíme.

## Je obsah křivky vždy nulový?

Po seznámení s křivkami procházejícími všemi body čtverce je asi čtenář připraven na vše. Ale přesto — může mít křivka nenulový obsah? Vždyť již Euklides říkal, že křivka je délka bez šířky. Odkud by se v takovém případě vzal obsah? Nepospíchejte však s konečnou odpovědí.

Dříve než začneme otázku zkoumat, musíme se dohodnout na přesném významu používaných slov. Jaký význam mají rčení *„křivka má nulový obsah"* nebo *„křivka má nenulový obsah"*? Vezměme si nejběžnější křivku — úsečku. Jelikož její šířka je rovna nule, můžeme ji umístit uvnitř obdélníka libovolně malého obsahu, stačí zvolit dostatečně malou šířku obdélníka. Podobně i kružnici lze umístit do mnohoúhelníka o libovolně malém obsahu. Stačí do ní vepsat pravidelný mnohoúhelník s dostatečně velkým počtem stran a zároveň jí analogický mnohoúhelník opsat. Oblast mezi těmito dvěma mnohoúhelníky bude mít malý obsah (tím menší, čím více mají mnohoúhelníky stran) a celá kružnice je v ní obsažena (obr. 61).

Nyní je již význam slov *„křivka má nulový obsah"* dostatečně zřejmý. Tato slova říkají, že ke každému i jakkoli malému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje mnohoúhelníková oblast



Obr. 61

křivku obsahuje a jejíž obsah je přitom menší než $\varepsilon$. A jestliže alespoň pro jedno kladné $\varepsilon$ taková oblast neexistuje, pak má křivka obsah nenulový.

Abychom tuto definici ještě více objasnili, užijeme jí nejen u tak jednoduchých křivek, jako jsou úsečka a kružnice, ale i u složitějších křivek. Jednou z takových křivek je ovšem Sierpińského koberec. Určíme jeho obsah. Nejdříve si vzpomeneme, že obsah celého čtverce byl roven 1. Při prvním kroku jsme odstranili prostřední čtverec o obsahu $\frac{1}{9}$. Výsledkem byla mnohoúhelníková oblast o obsahu $\frac{8}{9}$. Při druhém kroku jsme vyjmuli 8 čtverců, z nichž každý měl obsah $\frac{1}{81}$. Zbyla mnohoúhelníková oblast o obsahu

$$\frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

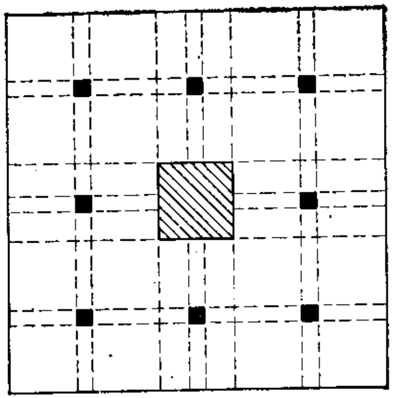
Nyní je již patrné, že po třetím kroku zbude mnohoúhelníková oblast o obsahu $\left(\frac{8}{9}\right)^3$, pak oblast o obsahu $\left(\frac{8}{9}\right)^4$ atd. Vezmeme-li však libovolný ryzí zlomek a budeme-li ho umocňovat stále větším a větším číslem, dostaneme v limitě nulu: je-li $0 < q < 1$, pak je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 .$$

Je tedy také $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$. Avšak podle definice limity to znamená, že pro libovolné kladné $\varepsilon$ existuje takové $n$, že platí $\left(\frac{8}{9}\right)^n < \varepsilon$. Po $n$ krocích tedy dostaneme mnohoúhelníkovou oblast, jejíž obsah je menší než $\varepsilon$. A tato oblast zcela pokrývá Sierpińského koberec. Je tedy obsah Sierpińského koberce nulový.

Zdálo by se, že je to naprostý triumf Euklidovy definice. Dokonce i tak složitá křivka, jako je Sierpińského koberec, má nulový obsah. Ale s oslavou vítězství je třeba ještě počkat. Nikdo nás přece nenutil, abychom vyjímali tak veliké kousky. Budeme postupovat hospodárněji a nerozdělíme čtverec na 9, nýbrž na 25 stejně velkých částí (tj. každou stranu rozdělíme na 5 částí). Odstraníme prostřední čtvereček, jehož obsah je zřejmě $\frac{1}{25}$. Čtenář asi bude nyní chtít rozdělit každý ze zbývajících 24 čtverečků opět na 25 částí a odstranit prostřední část. To by však bylo opět nehospodárné. Místo toho vezmeme strany odstraněného čtverce a prodloužíme je až na strany velkého čtverce. Dostaneme čtyři čtverce (v každém rohu jeden) a čtyři obdélníky. V každém čtverci a v každém obdélníku sestrojíme kříž, jehož ramena mají

Obr. 62



šířku $\frac{1}{25}$ a vyjmeme prostřední části křížů (obr. 62). Jelikož každá střední část má obsah $\frac{1}{625}$, bude součet obsahů všech čtverečků odstraněných při druhém kroku rovný $\frac{8}{625}$. Při třetím kroku odstraníme stejným způsobem 64 čtverečků o celkovém obsahu $\frac{64}{25^3} = \frac{64}{15625}$ atd. Obsahy odstraněných čtverečků tvoří geometrickou řadu

$$\frac{1}{25} + \frac{8}{25^2} + \frac{64}{25^3} + \ldots$$

s kvocientem $\frac{8}{25}$. Součet této řady činí pouze $\frac{1}{17}$. Co to však znamená? Znamená to, že při každém kroku zbývá na zbylou oblast alespoň $\frac{16}{17}$. A žádná mnohoúhelníková



oblast o ploše menší než $\frac{16}{17}$ nemůže zbylou část pokrýt. Ale tato zbývající část, podobně jako Sierpiňského koberec, je křivkou (v Cantorově smyslu) – při jejím sestrojování jsme každý obdélník proděravěli a žádný celý obdélník jsme neponechali.

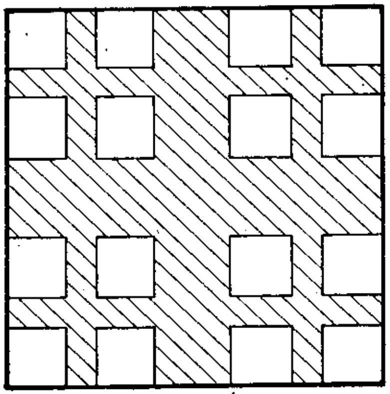
Vychází nám tedy, že křivka v Cantorově smyslu může mít nenulový obsah!

## Oblasti bez plošného obsahu

Přese všechno není uvedený příklad ještě příliš přesvědčivý; příslušná křivka protíná sama sebe v každém svém bodě a není hranicí žádné oblasti. Vzniká tudíž otázka, zda také „rozumná" křivka, která sama sebe neprotíná, tj. uzavřená sama sebe neprotínající křivka v Jordanově smyslu může mít nenulový obsah. Ukazuje se, že může!

Abychom sestrojili takovou křivku, změníme poněkud předchozí konstrukce. Nejprve sestrojíme množinu, jež nemá nejen celistvý kousek roviny, ale ani kousek křivky, ale která má přitom nenulový obsah. K tomu je zapotřebí odstraňovat nejen střední čtverčíky, ale celé kříže, jak je to znázorněno na obr. 63. Rozměry křížů přitom zvolíme tak, aby obsah prvního vyjmutého kříže byl roven $\frac{8}{25}$, aby součet obsahů všech křížů odstraněných při druhém kroku byl roven $\frac{64}{625} = \left(\frac{8}{25}\right)^2$, při třetím kroku pak $\left(\frac{8}{25}\right)^3$ atd. Celkový obsah odstraněných křížů bude roven součtu geometrické řady

$$\frac{8}{25} + \left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^3 + \ldots,$$



Obr. 63

tj. $\frac{8}{17}$; a to je méně než polovina obsahu celého čtverce. Při této konstrukci jsme však vyjímali celé kříže a nelítostně jsme celý čtverec rozpižlali. Žádné dva body tohoto zbytku nelze spojit křivkou, dokonce ani křivkou ve smyslu Cantorovy definice. Jakékoli spojení mezi jeho body chybí. Jak říkají matematici, zbylá množina je totálně nesouvislá. A obsah této množiny, neobsahující žádný celistvý kousek roviny ani oblouk křivky, je různý od nuly. Tuto množinu tedy nelze pokrýt žádnou mnohoúhelníkovou oblastí, jejíž obsah je menší než $\frac{9}{17}$.

Nyní je již snadné sestrojit příklad uzavřené křivky, která sama sebe neprotíná a která přitom má nenulový obsah. K tomu stačí spojit získané body stejným způsobem, jakým jsou Peanovou křivkou spojeny všechny body čtverce. Díky tomu, že jsme při každém kroku odstraňovali celé kříže, neprotíná získaná křivka sama sebe v žádném bodě (a tím



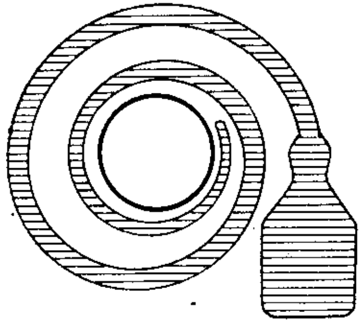
se právě liší od Peanovy křivky). Jelikož však prochází všemi body množiny, jejíž obsah není menší než $\frac{9}{17}$, je také obsah získané křivky přinejmenším roven $\frac{9}{17}$.

Nyní lze již bez námahy sestrojit oblast mající nulový obsah. K tomu stačí spojit dva body $A$ a $B$ naší křivky libovolnou křivkou, například půlkružnicí. Takto vzniklá křivka $\Gamma$ je hranicí jakési oblasti G. Jak velký obsah má tato oblast? Odpověď závisí na tom, zda do oblasti započítáme nebo nezapočítáme její hranici — vždyť sama hranice má obsah alespoň $\frac{9}{17}$. Je zřejmé, že obvyklý plošný obsah naše oblast nemá. O takových oblastech, nemajících obvyklý plošný obsah, se v matematice říká, že *nejsou schopné kvadratury*.

## Nečekané příklady

Po objevu Peanovy křivky byli matematikové pravděpodobně přesvědčeni, že už znají všechny „nestvůry" ze světa neobyčejných funkcí a křivek. Ale i pak je ještě nejednou geometrická intuice oklamala. Nakolik se vlastnosti Cantorových křivek mohou lišit od vlastností běžných křivek, o tom nejlépe svědčí tento příběh.

Na počátku 20. století uveřejnil známý matematik Schoenflies řadu prací, pojednávajících o různých vlastnostech křivek, hranic oblastí atd. Schoenflies se při tom často odvolával na „geometrickou názornost". Avšak po několika letech, roku 1910, se objevil krátký článek (dvanáctistránkový) mladého holandského matematika Brouwera. Článek obsahoval několik překvapujících příkladů, z nichž plynulo, že část Schoenfliesových výsledků je nesprávná a ostatní výsledky, byť i správné, jsou dokázány nepřesně. Byl to



Obr. 64

vskutku špatný žert, který Schoenfliesovi vyvedla „geometrická názornost"!

Abychom ukázali jak se „zřejmá" tvrzení ukázala být nepravdivá, uvedeme některé Brouwerovy příklady (užijeme přitom některých zjednodušení, nalezených později).

Brouwer sestrojil omezenou oblast, jejíž hranice (v běžném slova smyslu) není kontinuum. Vzal „láhev" a její hrdlo začal vytahovat a navíjet na kružnici (obr. 64). Dostal tak oblast, ohraničenou dvěma spirálami a „lahví". Tato hranice však není kontinuem; abychom dostali kontinuum, museli bychom ke spirálám přidat ještě kružnici, na kterou se navinují.

Přidáme-li k hranici kružnici, vznikne nová obtíž: body hranice nelze spojit s body oblasti křivkami konečné délky.

## Oblasti a hranice

Když už jsme začali hovořit o oblastech a hranicích, upřesníme si příslušné pojmy. Vždyť ukázala-li se Jordanova



definice křivky ne zcela vyhovující, je zapotřebí definovat znovu i oblast.

*Otevřenou množinou* v rovině nazveme libovolnou množinu, která je sjednocením kruhů, z nichž jsou odstraněny jejich hranice. Například doplněk libovolného rovinného kontinua je otevřenou množinou v rovině. Všechny běžné rovinné oblasti (vnitřek kruhu, vnitřek čtverce, vnitřek trojúhelníka atd.) jsou otevřenými množinami v rovině. Kromě toho jsou souvislé: libovolné dva jejich body lze spojit lomenou čárou, aniž vyjdeme z oblasti. Tyto vlastnosti právě definují rovinnou oblast:

*Rovinnou oblastí se nazývá souvislá množina bodů roviny, která je sjednocením kruhů, z nichž jsou odstraněny jejich hraniční kružnice.*

Počet kruhů přitom může být libovolný. Dá se však dokázat, že libovolnou oblast lze sestavit ze spočetně mnoha kruhů.

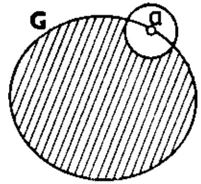
Kruh, z něhož je odstraněna jeho hraniční kružnice, se nazývá okolím svého středu *a*.

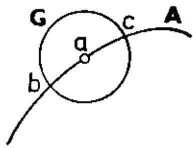
Bod *a* v rovině se nazývá hraničním bodem oblasti G, jestliže se v libovolném okolí bodu *a* nacházejí jak body oblasti G, tak i body, které do oblasti G nepatří (obr. 65).

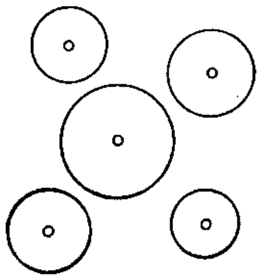
Analogicky se definují pojmy otevřené množiny, oblasti a hraničního bodu oblasti v prostoru. Rozdíl spočívá pouze v tom, že místo kruhů s odstraněnou hranicí se berou koule s odstraněnou hraniční kulovou plochou.

Kromě pojmu okolí bodu (v rovině nebo v prostoru) budeme ještě potřebovat pojem relativního okolí bodu.

Obr. 65





Obr. 66 Obr. 67

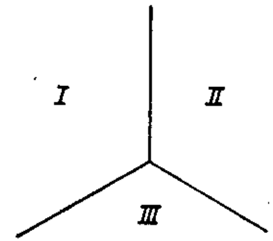
Relativním okolím bodu *a* vzhledem k množině A nazveme množinu těch bodů z okolí bodu *a*, které patří do množiny A, tj. průnik množiny A a obyčejného okolí bodu *a*. Je-li A například křivka znázorněná na obr. 66 a je-li G okolí bodu *a*, pak relativním okolím bodu *a* vzhledem k množině A je oblouk křivky A mezi body *b* a *c*. Skládá-li se množina A z několika bodů, pak každý její bod má relativní okolí tvořené pouze tímto bodem. Takové okolí dostaneme takto: vezmeme obyčejné okolí bodu, které neobsahuje žádný z ostatních bodů množiny A a utvoříme průnik množiny A s tímto okolím (obr. 67).

## Velké zavlažovací práce

Nyní si povíme o druhém ještě podivuhodnějším Brouwerově příkladu. Vezměme mapu nějakého státu a států s ním sousedících. Téměř každý bod hranice tohoto státu patří dvěma a jen dvěma státům: danému státu a jednomu ze sousedních. V každém takovém hraničním bodě tedy mohou



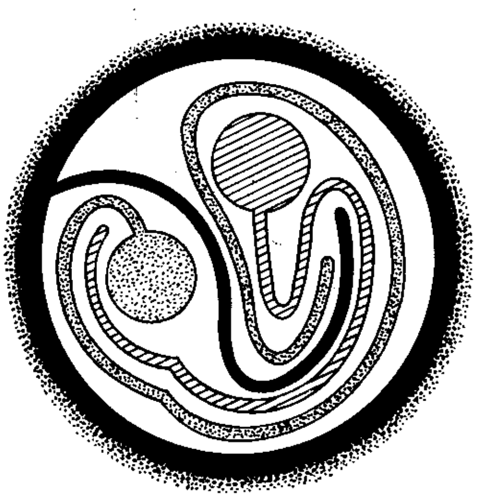
Obr. 68




stát dva pohraničníci — jeden z této země a druhý ze sousední. Na mapě je také několik bodů, kde se setkávají hranice tří států (obr. 68). V těchto bodech již stojí tři pohraničníci. Takových bodů je však na mapě pouze konečně mnoho. A zdá se být zcela zřejmým, že takové body nemohou zaplnit celou hranici státu, tj., že nemohou existovat tři oblasti (tři státy) mající tutéž společnou hranici. Jinými slovy, zdá se zřejmým, že nemohou v každém bodě hranice stát tři pohraničníci ze třech různých států.

Ale Brouwer takové tři oblasti sestrojil. Abychom pochopili jeho příklad, představme si, že v oceánu je ostrov, na němž jsou dvě sladkovodní jezera, přičemž v jednom jezeře je voda studená a ve druhém teplá. Provedeme nyní následující zavlažovací práce. Během prvních 24 hodin vykopeme kanály vycházející jak z oceánu, tak i z obou jezer, ale tak aby zůstaly „slepé" (tj. tak, aby to byly pouze zálivy příslušných zdrojů vody), aby se nikde vzájemně nedotýkaly a aby vzdálenost každého bodu souše jak od mořské vody, tak i od vody každého z obou jezer byla menší než jeden kilometr (obr. 69).

Během dalších dvanácti hodin prodloužíme tyto kanály tak, aby zůstaly jako dříve slepými, aby se vzájemně nedotýkaly a aby vzdálenost každého bodu souše od každého ze tří kanálů byla menší než půl kilometru. Kanály se ovšem



Obr. 69

budou muset zužovat. V dalších šesti hodinách prodloužíme kanály tak, aby každý bod souše byl od každého z kanálů vzdálen o méně než čtvrt kilometru atd. S každým novým krokem budou kanály stále klikatější a užší. Po dvou dnech takové práce bude celý ostrov protkán těmito třemi kanály a stane se z něho Cantorova křivka. V libovolném bodě této křivky si lze podle přání nabrat jak slanou vodu, tak teplou sladkou nebo studenou sladkou vodu. A tyto tři druhy vody se přitom nemohou smísit. Kdybychom místo oceánu a jezer vzali tři státy, dostali bychom onen podivuhodný obrázek, o němž jsme hovořili na počátku — v každém bodě hranice lze postavit tři pohraničníky — po jednom z každého státu.



## „Nezpracovatelné" téma

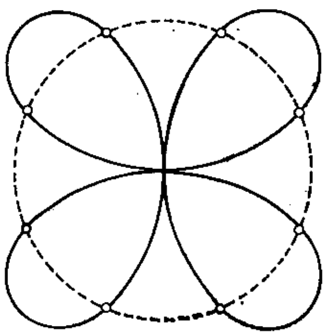
Již jsme hovořili o tom, že Cantorova definice měla jeden nedostatek — vůbec se nehodila pro prostorové křivky. A co je to plocha v prostoru — to už vůbec nikdo nevěděl. Tuto úlohu — objasnit, co je to prostorová křivka a co je to plocha v prostoru — předložil v létě roku 1921 svému třiadvacetiletému žáku Pavlu Samuilovi Urysonovi důstojný profesor Moskevské university Dmitrij Fjodorovič Jegorov (jak je vidět, myslel více na matematickou důležitost problému než na jeho vhodnost pro disertační práci — úloha byla jednou z nejobtížnějších).

Uryson brzy pochopil, že Jegorovova úloha je pouze zvláštním případem mnohem obecnějšího problému: co je to dimenze geometrického útvaru, proč je třeba říkat, že úsečka nebo kružnice jsou jednorozměrné (mají dimenzi 1), že čtverec je dvourozměrný (má dimenzi 2) a že krychle nebo koule jsou trojrozměrné (mají dimenzi 3)? Na toto období Urysonova života vzpomíná jeho nejbližší přítel, tehdy rovněž mladý aspirant, nyní akademik a čestný předseda Moskevské matematické společnosti Pavel Sergejevič Alexandrov, těmito slovy:

„... Celé léto roku 1921 proběhlo v usilovných pokusech najít „skutečnou" definici (dimenze), přičemž Pavel Samuilovič přecházel od jedné varianty ke druhé a neustále konstruoval příklady ukazující, proč je třeba tu či onu definici zavrhnout. Byly to dva měsíce skutečně plného soustředění. Konečně se jednoho srpnového rána Pavel Samuilovič probudil s hotovou, definitivní a dnes všem dobře známou induktivní definicí dimenze... Téhož jitra mi P. S. Uryson při koupání v Kljazmě vyložil svou definici dimenze a zároveň během tohoto rozhovoru, který se protáhl na několik hodin, nastínil plán celé teorie dimenze s řadou vět, které tehdy byly pouhými domněnkami, o nichž se nevědělo ani jak se do nich pustit a které pak byly dokázány jedna za druhou během následujících měsíců. Nikdy jsem už nebyl účastníkem nebo svědkem matematického rozhovoru, který by se skládal z takového neustálého toku nových myšlenek jako onoho srpnového rána. Celý tehdy nastíněný program se plně uskutečnil během zimy 1921/22; na jaře roku 1922 byla celá teorie dimenze hotova..."

Základní myšlenka Urysonovy definice dimenze spočívá v tomto: K oddělení části křivky od její zbývající části stačí obvykle dva body nebo několik bodů (na obr. 70 je část čtyřlisté růže obsahující střed oddělena od zbývající části osmi body). Avšak část plochy již nelze od zbývající části oddělit několika body — k tomu je nutně zapotřebí celá křivka — ať zvolíme na ploše body jakkoli, vždy je můžeme obejít. Analogicky i část trojrozměrného prostoru lze oddělit od zbývající části prostoru plochou.

To vše se muselo ještě zpřesnit: u některých křivek je k oddělení jejich částí zapotřebí nekonečně mnoha bodů; tyto body však nevytvářejí žádnou křivku. Urysonovi se podařilo přesně zformulovat všechny potřebné definice. V jistém smyslu jeho definice připomínaly definice Euklidovy (hranice křivky jsou body, hranice plochy jsou křivky). Ale tato podobnost je asi taková jako podobnost mezi řeckou trojveslicí a moderním křižníkem.



Obr. 70



## Induktivní definice dimenze

Řekneme si nyní přesněji, jak Uryson definuje dimenzi geometrického útvaru. Nejprve objasníme, co je množina nulové dimenze. Typickou množinou nulové dimenze je množina, skládající se z jediného bodu nebo z konečně mnoha bodů. Každý bod takové množiny má relativní okolí s prázdnou hranicí (vzpomeňme si na obr. 67). Právě tuto vlastnost přijal Uryson za definici množiny nulové dimenze.

Přesněji zní tato definice takto:

*Množina* F *má nulovou dimenzi, jestliže její libovolný bod má libovolně malé relativní (vzhledem k* F*) okolí s prázdnou hranicí.*

Má-li množina F nulovou dimenzi, dá se to ve většině případů zjistit tím, že se pro každý bod sestrojí libovolně malé obyčejné okolí, jehož hranice neobsahuje žádný bod množiny F (v takovém případě je jistě hranice relativního okolí prázdná). V trojrozměrném prostoru však existují množiny nulové dimenze, pro jejichž body taková obyčejná okolí sestrojit nelze.

Slova „libovolně malé" jsou do této definice přidána z tohoto důvodu: Kdyby tam nebyla, mohli bychom například pro každý čtverec najít tak velký kruh, že by se celý čtverec nacházel uvnitř tohoto kruhu, takže ani jeden bod čtverce by se nedostal na hranici kruhu. A bez oněch slov v definici by měl čtverec dimenzi nula a nikoli dimenzi dvě, jak tomu ve skutečnosti má být.

Nejen konečné, ale i mnohé nekonečné množiny mají nulovou dimenzi. Vezměme například množinu F, skládající se z těch bodů reálné osy, které mají souřadnice $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Libovolný od nuly různý bod této množiny má zřejmě libovolně malé relativní okolí vzhledem k F, jehož hranice neobsahuje žádný bod této množiny. Jedině u bodu nula mohou vzniknout pochybnosti. Vezmeme-li však kružnici o poloměru $\alpha$ se středem v bodě 0, kde $\alpha$ je iracionální číslo, pak žádný z bodů naší množiny nebude ležet na této kružnici.

Nulovou dimenzi má i množina Q všech bodů přímky s racionálními souřadnicemi. Abychom se o tom přesvědčili, stačí za okolí bodu $a$ z množiny Q vzít otevřený interval se středem v tomto bodě a mající iracionální délku. Nulovou dimenzi má také Cantorova množina (viz str. 137), množina, která zbude ze čtverce po odstranění křížů (viz str. 164) a mnoho dalších množin. Analogicky lze konstruovat množiny nulové dimenze nejen v rovině, ale i v prostoru (přitom se ovšem okolí bodu chápe jako okolí v prostoru).

Poté, když Uryson definoval množiny nulové dimenze, přešel k jednorozměrným množinám, tj. ke křivkám. V tomto případě již neexistují malinká okolí s prázdnou hranicí (viz obr. 70). Avšak u běžných křivek protíná okolí jejího bodu samu křivku pouze v několika bodech. A množina skládající se z konečného počtu bodů má nulovou dimenzi. Uryson tuto poznámku zobecnil a jednorozměrné množiny definoval takto:

Množina F má *dimenzi jedna,* jestliže nemá nulovou dimenzi a jestliže každý její bod má libovolně malé relativní (vzhledem k F) okolí, jehož hranice má nulovou dimenzi.

Ukázalo se, že nejen běžné křivky (kružnice, úsečky, elipsy atd.) mají podle Urysonovy definice dimenzi jedna, ale že tutéž dimenzi mají i všechny Cantorovy křivky. Tím bylo umožněno definovat nejen pojem rovinné křivky, ale i prostorové křivky:

*Křivkou se nazývá kontinuum dimenze jedna.*

A nyní již bylo zřejmé, jak definovat plochy, trojrozměrná tělesa a obecně množiny libovolné dimenze. Protože Uryson definuje nejdříve dimenzi 0, potom pomocí této definice podává definici dimenze 1 a pak analogicky definici dimenze 2 atd., nazývá se obecná Urysonova definice dimenze definicí *induktivní.*



## Práci je třeba otisknout, a ne recenzovat!

Uryson dokázal velmi mnoho zajímavých vět souvisejících s jeho definicí dimenze. Avšak nejhlavnější větu ne a ne dokázat: stále se nedařilo dokázat, že ta nejobyčejnější krychle má dimenzi 3. Po dlouhém úsilí našel pozoruhodné východisko tím, že vymyslel novou definici dimenze. Nevyložíme tuto definici podrobně, ale objasníme ji na nejjednodušších útvarech.

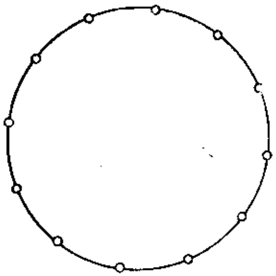
Vezmeme-li úsečku nebo kružnici, můžeme je rozdělit na libovolně malé části tak, že žádný jejich bod nepatří do více než dvou částí (obr. 71). Přitom je zapotřebí brát části i s jejich hranicemi (tj. s krajními body). Čtverec již tak rozdělit nejde. Na první pohled se zdá, že při dělení čtverce na části budou vždy existovat body patřící všem čtyřem částem (obr. 72a). Budeme-li však části čtverce skládat podobně jako cihly na stavbě, podaří se dosáhnout toho, že každý bod bude patřit nejvýše do tří různých částí (obr. 72b). Analogicky i krychli lze rozložit na malinké kvádry tak, že každý bod patří nejvýše do čtyř kvádrů.

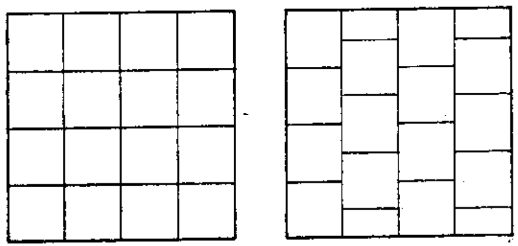
Právě tuto vlastnost přijal Uryson za novou definici dimenze: O útvaru řekneme, že má dimenzi $n$, jestliže je možné jej rozdělit na libovolně malé uzavřené části tak, že žádný bod nepatří do $n + 2$ různých částí, ale při libovolném dostatečně jemném rozdělení existují body patřící do $n + 1$ různých částí.

Použitím této definice dimenze Uryson dokázal, že čtverec má dimenzi 2, že krychle má dimenzi 3 atd. A pak dokázal, že tato nová definice je ekvivalentní původní definici.

Urysonova teorie dimenze udělala na celý matematický svět hluboký dojem. Výrazně o tom svědčí tato epizoda: Při svém zahraničním pobytu přednášel Uryson o svých výsledcích v Göttingen. Až do příchodu nacistů k moci byla göttingenská universita jedním ze základních matematických středisek. Po přednášce řekl vedoucí göttingenské matematické školy, slavný David Hilbert, že tyto výsledky

Obr. 71





Obr. 72ab

je třeba otisknout v časopise „Mathematische Annalen" — jednom z hlavních matematických časopisů té doby. Po několika měsících přednášel Uryson opět v Göttingen a Hilbert se zeptal redaktora časopisu „Mathematische Annalen" Richarda Couranta, zda je již Urysonova práce otištěna. Courant odpověděl, že práce je v recenzním řízení. „Ale vždyť jsem jasně řekl, že práci je třeba otisknout, a ne recenzovat!" zvolal Hilbert. Po tak nedvojsmyslném vyjádření byla práce neprodleně otištěna.

Po tři roky trvala Urysonova vědecká činnost, nemající co do hloubky a intenzity obdoby (během této doby uve-



řejnil Uryson několik desítek vědeckých prací). Tragická událost přervala jeho život — 17. srpna 1924, když se koupal za bouře v Biskajském zálivu, Uryson utonul.

Uryson zanechal velké množství konceptů a náčrtů neuveřejněných výsledků. Jeho nejbližší přítel (a spoluautor mnoha prací) Pavel Sergejevič Alexandrov přerušil na nějakou dobu své vlastní výzkumy, připravil Urysonovy práce k uveřejnění a učinil tím Urysonovy výsledky majetkem všech matematiků. Dnes je Urysonova teorie dimenze důležitým oddílem matematiky.

*Nekonečné množiny se vyznačují neobyčejnými vlastnostmi. V průběhu studia těchto vlastností museli matematici stále více a více vybrušovat své úvahy, stále podrobněji analyzovat své důkazy a během tohoto procesu vzniklo nové důležité odvětví matematiky — matematická logika. Po dlouhou dobu převládalo mínění, že teorie množin a matematická logika jsou abstraktní vědy nemající žádné praktické použití. Když však byly vytvořeny samočinné počítače, ukázalo se, že otázky programování na těchto počítačích úzce souvisí s metodami matematické logiky a mnohé výzkumy, zdánlivě odtržené od života, nabyly prvořadého praktického významu (tak tomu bývá v dějinách vědy často — ještě na počátku třicátých let našeho století bylo možné se dočíst: „Uran nemá praktického významu").*

*V současné době je teorie množin jedním ze základů, na nichž spočívají takové oblasti matematiky, jako je funkcionální analýza, topologie, obecná algebra atd. Také sama teorie množin se dále vyvíjí a její výsledky souvisí se samými základy matematiky. Ukázalo se například, že „naivní" přístup k pojmu množiny, o němž jsme v této knížce hovořili, v mnoha případech nestačí a že velmi plodný je axiomatický přístup. Tyto otázky však daleko překračují zamýšlený rámec této knihy.*



## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

**1.** Množina A se skládá z celých čísel dělitelných čtyřmi, množina B se skládá z celých čísel dělitelných deseti a množina C se skládá z celých čísel dělitelných 75. Z jakých čísel se skládá množina $A \cap B \cap C$?

**2.** V knihovně se nacházejí knihy z různých oblastí vědy a umění. Označme písmenem A množinu všech knih v knihovně a písmenem B množinu všech matematických knih (nejen z dané knihovny). Charakterizujte množinu $A \setminus B$.

**3.** Užitím pravidel algebry množin zjednodušte výraz
$$[(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)] \setminus \{[A \cup (B \setminus C)] \cap A\}.$$

**4.** Množina A se skládá z bodů $M(x, y)$ roviny, pro které platí $|x| \leqq 4$, $|y| \leqq 4$, množina B se skládá z bodů roviny, pro něž platí $x^2 + y^2 \leqq 25$ a množina C z bodů roviny, pro něž platí $x > 0$. Znázorněte množinu $(A \cap B) \setminus C$.

**5.** Dokažte rovnosti

a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$,

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.

**6.** Dokažte, že platí

a) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$,

b) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$,

c) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

**7.** Plyne z $A \setminus B = C$, že $A = B \cup C$?

**8.** Plyne z $A = B \cup C$, že $A \setminus B = C$?

**9.** Která z množin je částí druhé

a) $A \setminus (B \cup C)$ a $(A \setminus B) \setminus C$,

b) $A \cup (B \setminus C)$ a $(A \cup B) \setminus C$,

c) $(A \setminus B) \cup C$ a $A \cup (C \setminus B)$?

**10.** Užitím vztahů 1) — 26) ze str. 52 a 53 zjednodušte výraz
$$[(X \setminus Y)' \cap (X' \cup Y')]'.$$

**11.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi intervalem $0 < x < 1$ a celou číselnou osou.

**12.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi číselnými množinami $0 \leqq x < 1$ a $0 \leqq x < \infty$.

**13*.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi intervalem $0 \leqq x \leqq 1$ a intervalem $0 < x < 1$.

**14.** Sestrojte vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ na celou číselnou osu.

**15*.** Sestrojte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech čísel intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ a množinou všech iracionálních čísel téhož intervalu.

**16*.** Zobrazte vzájemně jednoznačně polopřímku $0 \leqq \leqq x < \infty$ na celou číselnou osu.

**17.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body roviny a body kulové plochy, ze které je jeden bod odstraněn.

**18*.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body roviny a kulové plochy.

**19.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi body otevřeného čtverce $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ a body roviny.

**20.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech racionálních čísel intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ a množinou všech bodů roviny, jejichž dvě souřadnice jsou racionální.

**21.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech celých čísel a množinou všech kvadratických trojčlenů s celočíselnými koeficienty.

**22*.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech reálných čísel a množinou všech bodů roviny.

**23.** Nalezněte vzájemně jednoznačné přiřazení mezi množinou všech reálných čísel a množinou všech kvadratických trojčlenů s reálnými koeficienty.

**24.** Jakou mohutnost má množina všech rovinných čtyřúhelníků, jejichž všechny vrcholy mají racionální souřadnice?



**25.** Jakou mohutnost má množina všech rovinných mnohoúhelníků, jejichž všechny vrcholy mají racionální souřadnice?

**26.** Jakou mohutnost má množina všech konvexních mnohostěnů, jejichž všechny vrcholy mají racionální souřadnice?

**27.** Jakou mohutnost má množina všech racionálních funkcí s celočíselnými koeficienty v čitateli i jmenovateli?

**28.** Jakou mohutnost má množina všech mnohočlenů s racionálními koeficienty?

**29.** Jakou mohutnost má množina všech posloupností přirozených čísel?

**30.** Jakou mohutnost má množina všech konečných posloupností přirozených čísel?

**31.** Jakou mohutnost má množina všech rostoucích posloupností přirozených čísel?

**32.** Jakou mohutnost má množina všech mnohočlenů třetího stupně s reálnými koeficienty?

**33.** Jakou mohutnost má množina všech mnohočlenů s reálnými koeficienty?

**34.** Je možné sestrojit v rovině množinu vzájemně se neprotínajících kružnic mohutnosti kontinua?

**35.** Je možné sestrojit v rovině množinu vzájemně se neprotínajících písmen $\Gamma$ mohutnosti kontinua? a písmen N?

**36.** Je možné sestrojit v rovině množinu mohutnosti kontinua, skládající se ze vzájemně se neprotínajících písmen A?

**37.** Jaká je mohutnost množiny všech reálných čísel, v jejichž desetinném rozvoji se vyskytuje číslice 7?

**38.** Jaká je mohutnost množiny všech reálných čísel, v jejichž desetinném rozvoji se nevyskytuje číslice 5?

**39.** Jaká je mohutnost množiny všech reálných čísel větších než nula a menších než 1, v jejichž desetinném rozvoji stojí na druhém desetinném místě číslice 6 a jinde se již tato číslice nevyskytuje?

**40.** Dokažte, že platí-li $A \setminus B \sim B \setminus A$, pak $A \sim B$ ($A \sim B$ znamená, že množiny $A$ a $B$ mají stejnou mohutnost).

**41.** Dokažte, že je-li $A \subset B$ a $A \sim A \cup C$, je také $B \sim B \cup C$.

**42.** Zjistěte, zda platí tvrzení: „Je-li $A \sim C$, $B \sim D$, přičemž $A \supset B$, $C \supset D$, pak $A \setminus B \sim C \setminus D$“.

**43.** Zjistěte, zda platí tvrzení: „Je-li $A \sim B$, $C \supset A$, $C \supset B$, pak $C \setminus A \sim C \setminus B$“.

**44.** Očíslujme všechna racionální čísla intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dostaneme tak posloupnost bodů $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Sestrojme okolí bodu $r_1$ o poloměru $\frac{1}{10}$, okolí bodu $r_2$ o poloměru $\frac{1}{20}$, okolí bodu $r_3$ o poloměru $\frac{1}{40}$ atd. Obsahuje sjednocení $M$ všech těchto okolí celý interval $\langle 0, 1\rangle$?

**45.** Odhadněte délku množiny $M$ z úlohy 44.

**46*.** Množinu všech posloupností reálných čísel $(x_1, \ldots \ldots x_n, \ldots)$, pro něž platí $0 \leqq x_n \leqq 1$, nazveme spočetněrozměrnou krychlí. Dokažte, že množina všech bodů spočetněrozměrné krychle má mohutnost kontinua.

**47*.** Sestrojte spojitou funkci, jež má na každém intervalu nekonečně mnoho maxim a minim.

**48*.** Množina $M$ se skládá z těch bodů intervalu $\langle 0, 1\rangle$, které lze vyjádřit ve tvaru desetinných zlomků, v nichž se nevyskytují číslice 3 a 8. Popište, jak lze tuto množinu získat z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ postupným odstraňováním otevřených intervalů.

**49.** Proveďte totéž s body, v jejichž desetinném rozvoji se nevyskytuje kombinace 38 (ve zde uvedeném pořadí).

**50*.** Bod $a$ se nazývá hromadným bodem množiny $M$, jestliže jeho libovolné okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $M$. Dokažte, že všechny hromadné body Cantorovy množiny (viz str. 137) do této množiny patří. Dokažte, že také obráceně, každý bod Cantorovy množiny je jejím hromadným bodem. Totéž dokažte i o množinách z úloh 48 a 49.

**51.** Dokažte, že každý bod intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je hromadným bodem množiny všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

**52.** Existují hromadné body množiny všech celých čísel?

**53.** Dokažte, že doplněk libovolné otevřené množiny v rovině obsahuje všechny své hromadné body.

**54.** Dokažte, že obsahuje-li množina všechny své hromadné body, je její doplněk otevřenou množinou.

**55.** Uveďte příklady takových množin v rovině, které
a) nemají hraniční body,
b) mají hraniční body, ale žádný z nich do množiny nepatří,
c) obsahují všechny své hraniční body,
d) se skládají pouze z hraničních bodů,
e) obsahují pouze část svých hraničních bodů.

**56.** Uveďte příklady množin v prostoru, které mají vlastnosti a) – d) z úlohy 55.

# Obsah

**Předmluva** 5

KAPITOLA 1

**Množiny a operace s množinami** 9
Co je množina 9
Jak se určují množiny 11
Holit se či neholit? 16
Prázdná množina 20
Teorie množin a školská matematika 22
Podmnožiny 27
Teorie množin a kombinatorika 30
Univerzální množina 32
Průnik množin 33
Sjednocení množin 38
Rozklady množin 43
Aritmetika zbytkových tříd 44
Rozdíl množin 46
Algebra množin 48
Planeta bájí 54
Booleovy algebry 59

KAPITOLA 2

**Ve světě zázraků nekonečna** 65
Tajemství nekonečna 65
Neobyčejný hotel aneb tisícíprvá cesta Ijona Tichého 68
Autorova poznámka 76
Jak porovnávat množiny 76
Na tanečním parketu 78
Ke každému přílivu jeden odliv 79
Je část rovna celku? 80
Spočetné množiny 83
Algebraická čísla 86
Osmičky v rovině 89
Různě velké množiny 92
Spočetné množiny jsou nejmenší z nekonečných množin 94
Nespočetné množiny 95
Nesepsaný seznam 96



Nespočetnost kontinua 99
Existence transcendentních čísel 100
Na dlouhé i na krátké úsečce je stejně mnoho bodů 102
Úsečka a čtverec 103
Jedna úloha nějak nevychází 107
Existuje množina největší mohutnosti? 108
Aritmetika nekonečna 110
Mocniny s nekonečným mocnitelem 113
Po pořádku . . . 115
Dobře uspořádané množiny 116
Nepochopitelný axióm 119
Z jednoho jablka dvě 121
Konečné rozklady 121

KAPITOLA 3

**Podivuhodné funkce a křivky aneb procházky sbírkou matematických kuriozit** 127
Jak se rozvíjel pojem funkce 127
Džin prchá z láhve 131
Mokré body 133
Čertovo schodiště 137
Ostnatá čára 140
Uzavřená křivka nekonečné délky 144
Matematický koberec 147
Euklides nepomáhá 150
Jsou zapotřebí přesné definice? 151
Křivka je stopa pohybujícího se bodu 153
Věta je zřejmá, důkaz nikoli 156
Křivka prochází všemi body čtverce 158
Vše bylo v troskách 160
Jak se dělají sochy 162
Kontinua 164
Cantorovy křivky 166
Je obsah křivky vždy nulový? 167
Oblasti bez plošného obsahu 171
Nečekané příklady 173
Oblasti a hranice 174
Velké zavlažovací práce 176
„Nezpracovatelné“ téma 179

Induktivní definice dimenze 181
Práci je třeba otisknout, a ne recenzovat! 183

**Závěr** 186

**Příklady a cvičení** 187



KNIŽNICE VŠEOBECNÉHO VZDĚLÁNÍ ● ŘADA MAJÁK

# Vyprávění o množinách

NAUM JAKOVLEVIČ VILENKIN

Z 2. upraveného a doplněného ruského vydání Rasskazy o množestvach, vydaného nakladatelstvím Nauka v Moskvě roku 1969, přeložil dr. Milan Vlach
Obálku navrhl a graficky upravil Jaroslav Šváb. Vydání 1. – Praha 1973 – Počet stran 196. Odpovědný redaktor: Pavel Vít. Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová. Technická redaktorka: Hana Převrátilová. Vytiskl TISK, knižní výroba, n. p., Brno, závod 3 - Český Těšín. 8,22 AA (7,58 AA textu, 0,64 AA grafiky) – 8,74 VA. Náklad 3 000 výtisků. Tematická skupina a podskupina 03/2. Cena vázaného výtisku Kčs 12,50.
510/21,855
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 35-19-11.

14-604-73 Kčs 12,50