MAs04: Vybrané partie ...

I. Symetrie
II. Stereometrie
III. **Kuželosečky**
IV. ... a kvadriky

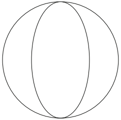
Doporučené čtení:

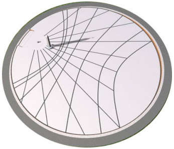
[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

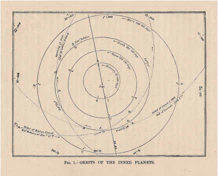
4. června 2019, Vojtěch Žádník

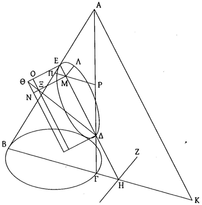
http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs04/

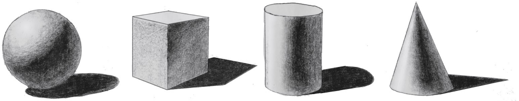
Kuželosečky

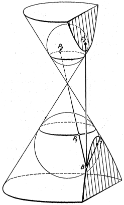












$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0$$

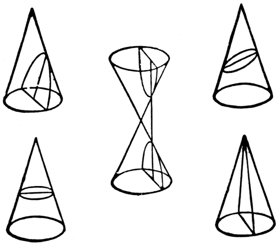
. . . . . .

Upřesnění

Kuželo-sečky jsou rovinné řezy kuželové, příp. válcové plochy.[1]

Nedegenerované (*regulární*) kuželosečky jsou vyseknuty rovinou, která neprochází vrcholem kužele:

- *elipsa* (spec. *kružnice*) — žádný nevlastní bod,
- *parabola* — jeden nevlastní bod,
- *hyperbola* — dva nevlastní body.



Degenerované (*singulární*) kuželosečky jsou určeny rovinou, která obsahuje vrchol kužele.

[1] Válec je kužel s nevlastním vrcholem. Uvažovaný kužel/válec nemusí být nutně rotační.

Plán

- Rozličné pohledy a vymezení.
- Vlastnosti, konstrukce, počítání.
- Počítání vulgární vs. počítání chytré.
- Příklady, obecné úvahy, vybrané aplikace.

Elipsa: ekvivalentní definice

Elipsa je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky;

(B) množina bodů v rovině, jež mají konstantní součet vzdáleností od dvou bodů E a F:
$$|EX| + |XF| = \text{konst.};$$

(C) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu F a přímky d, přičemž
$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} < 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

(E) afinní obraz kružnice.

Související pojmy

- Body E a F jsou *ohniska*, přímka d je *řídící přímka* elipsy,
- elipsa je souměrná podle dvou navzájem kolmých *os*,
  $a =$ délka *hlavní poloosy*, $b =$ délka *vedlejší poloosy* ($a > b$),
- elipsa je souměrná podle *středu* = průsečíku jejích os,
- konstanta v (B) je rovna $2a$,
- konstanta v (C) je rovna $\frac{e}{a}$ = *(numerická) výstřednost*,
  kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ = *(lineární) výstřednost*,
- kvadratická rovnice v (D) je tzv. *vrcholová*, resp. *středová rovnice* elipsy,[2] kde
  $p = \frac{b^2}{a}$ = *parametr*.

Poznámky

Ekvivalenci (A) $\iff$ (E) rozumíme.[3]
Ostatní ekvivalence a podrobnosti k uvedeným číselným charakteristikám ukážeme za chvíli…

[2] Pojmenováno podle umístění počátku odpovídající souřadné soustavy.

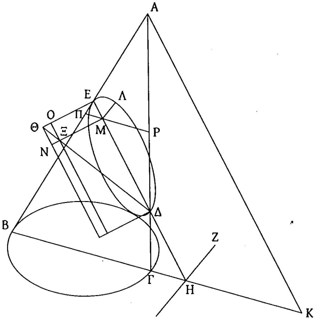
[3] Elipsa řezu je středovým průmětem kružnice podstavy (z vrcholu kužele), při kterém se žádný její bod nezobrazil do nekonečna…

Věta Apollóniova

Uvažme kužel s kruhovou podstavou a jeho eliptický řez s hlavní osou ΔE jako na obrázku. Potom pro libovolný bod Λ na elipse platí

$$\Lambda M^2 = \Xi M \cdot ME, \tag{1}$$

kde M je pata kolmice z Λ na osu ΔE a Ξ je bod na úhlopříčce pevně přiloženého obdélníku se stranami ΔE a $E\Theta$, kde $E\Theta$ je určená vztahem $\Delta E : E\Theta = AK^2 : (BK \cdot K\Gamma)$, kde bod K leží na rovnoběžce s ΔE jdoucí vrcholem kužele.[4]



[4] Za chvíli bude patrné, že velikost $E\Theta$ je rovna právě dvojnásobku parametru p.

Důkaz věty Apollóniovy

Z definující rovnosti pro úsečku $E\Theta$ a podobností několika trojúhelníků plyne:

$$\frac{\Delta M}{M\Xi} = \frac{\Delta E}{E\Theta} = \frac{AK}{BK}\frac{AK}{K\Gamma} = \frac{EM}{M\Pi}\frac{\Delta M}{MP}.$$

Levou stranu rozšíříme ME, aby poměry na obou stranách měly stejný čitatel.

Odkud plyne rovnost jmenovatelů

$$M\Xi \cdot ME = M\Pi \cdot MP.$$

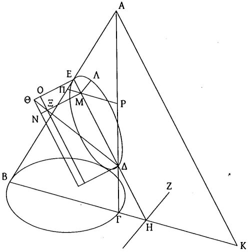
Rovina $\Lambda\Pi P$ je rovnoběžná s podstavou, tudíž řezem kuželové plochy touto rovinou je kružnice a ΠP je její průměr.

Podle Thaletovy věty je úhel $\Pi\Lambda P$ pravý.

Podle Eukleidovy věty o výšce platí

$$M\Pi \cdot MP = M\Lambda^2.$$

Dosazením do předchozí rovnice dostáváme (1). $\square$



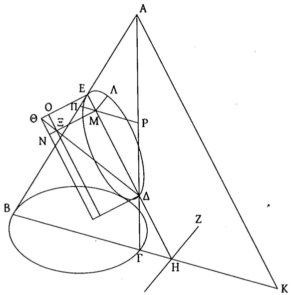
Důsledek: ekvivalence (A) a (D)

Přímo z věty Apollóniovy:

Označíme $|E\Theta| =: 2p$, $|E\Delta| =: 2a$, $|EM| := x$ a $|M\Lambda| =: y$.

Z podobnosti trojúhelníků $\Xi M\Delta$ a $\Theta E\Delta$ plyne $\Xi M : M\Delta = \Theta E : E\Delta$, tedy

$$|\Xi M| = \frac{p}{a}(2a - x).$$



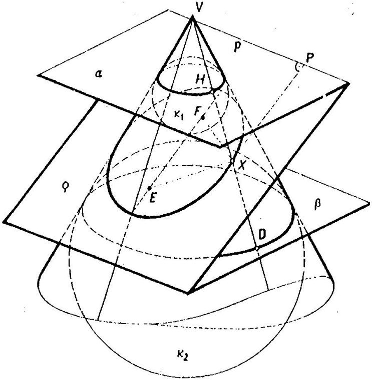
Rovnici (1) pak můžeme přepsat jako

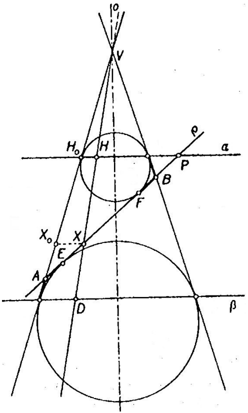
$$y^2 = \left(2p - \frac{p}{a}x\right)x,$$

což je právě *vrcholová rovnice* elipsy v (D).

Odtud se snadno vyvodí *středová rovnice*... □

Uvažme rotační kužel a jeho eliptický řez jako na obrázku. Potom ohniska této elipsy jsou právě body dotyku kulových ploch, které se dotýkají jak kužele, tak roviny řezu.





Důkaz věty Dandelinovy–Queteletovy

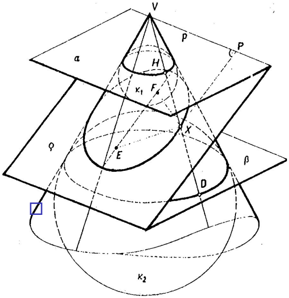
Dotykové body ozn. E a F. Chceme ukázat, že platí $|EX| + |XF| = \text{konst.}$, tedy že E a F jsou právě *ohniska* elipsy:

Všechny tečny z daného bodu k dané kulové ploše jsou stejně dlouhé.

Proto $|EX| = |DX|$ a $|XF| = |XH|$, a tudíž

$$|EX| + |XF| = |DX| + |XH| = |DH|.$$

Kužel je rotační, tedy vzdálenost $|DH|$ je stále stejná pro všechny povrchové přímky.

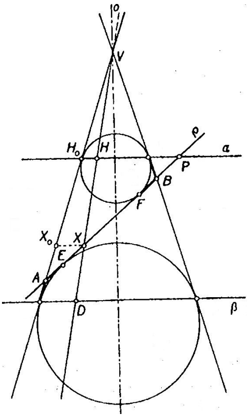


□

Důsledky: ekvivalence (A), (B) a (C)

Z věty Dandelinovy–Queteletovy přímo plyne (A) $\iff$ (B).

Ke zdůvodnění (A) $\iff$ (C) stačí ukázat, že průsečnice $p = \rho \cap \alpha$ je právě *řídící přímkou* elipsy, tedy že pro ohnisko F a pro libovolný bod X na elipse platí $|XF| : |Xp| = \text{konst.} < 1$:



$|XP| = |Xp|$, kde P je pata kolmice z X na p (v bočním průmětu nezkreslené).

$|XF| = |XH|$ (v bočním průmětu vidíme jako $|X_0H_0|$).

Odtud plyne

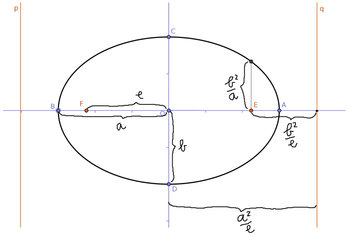
$$|XF| : |Xp| = |X_0H_0| : |XP|.$$

Trojúhelníky AH_0P a AX_0X jsou podobné, takže

$$|X_0H_0| : |XP| = |AH_0| : |AP| = \text{konst.} < 1. \quad \square$$

Upřesnění (s. 7)

- Dosazením souřadnic vedlejšího vrcholu do vrcholové rovnice (D) snadno ověříme, že $p = \frac{b^2}{a}$.
- Obdobným způsobem z téže rovnice plyne, že $\frac{b^2}{a}$ je délka poloviny tětivy, která prochází ohniskem a je kolmá k hlavní ose.
- Rozepsáním vlastnosti (C) pro dva specifické body zjišťujeme, že vzdálenost řídící přímky d od vedlejší osy je $\frac{a^2}{e}$.
- Vzdálenost řídící přímky d od ohniska F je $\frac{b^2}{e}$.
- Z uvedeného zejména plyne, že konstanta v (C) je skutečně rovna $\frac{e}{a}$.



Cvičení A

(1) Připravte se na to, že kromě vymezení na s. 6 existují mnohá další.

(2) Dokažte, že algebraická vyjádření v (D) jsou skutečně dvojím vyjádřením téže kuželosečky, napište odpovídající transformaci souřadnic a vše ilustrujte výmluvným obrázkem.

(3) Odvoďte některé z vyjádření v (D) bez Apollóniovy věty, tzn. přímo z (B), (C) nebo (E).

(4) Dovysvětlete některá upřesnění na s. 14.

(5) Dokažte, že numerická výstřednost kuželosečky je rovna

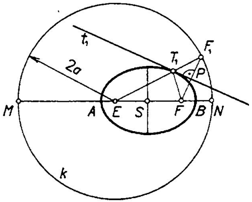
$$|XF| : |Xd| = \sin\alpha : \sin\beta,$$

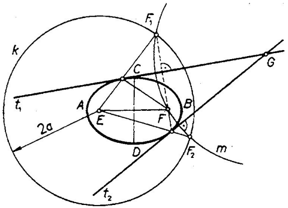
kde $\alpha =$ odchylka podstavy kužele od roviny řezu a $\beta =$ odchylka podstavy kužele od jeho tvořicích přímek.

Ohniskové vlastnosti

Z ohniskových vlastností elipsy mj. plyne:

- *Tečna elipsy (v bodě T_1) je osou vnějšího úhlu odpovídajících průvodičů (přímek ET_1 a FT_1).*
- *Body souměrné s jedním ohniskem elipsy (F_1) vzhledem ke všem jejím tečnám tvoří kružnici se středem v druhém ohnisku (E) a poloměrem rovným délce hlavní osy.*
- *Paty kolmic ohnisek elipsy (P) na všechny její tečny tvoří kružnici se středem ve středu elipsy (S) a poloměrem rovným délce hlavní poloosy.*





Tyto poznatky jsou užitečné např. při (eukleidovských) konstrukcích tečen. . .

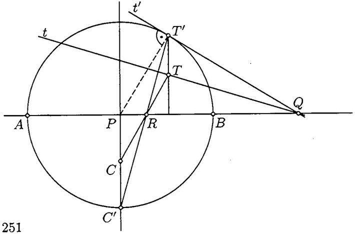
Osová afinita

Každou elipsu lze vidět jako obraz kružnice vzhledem k nějaké <u>osové afinitě</u>.

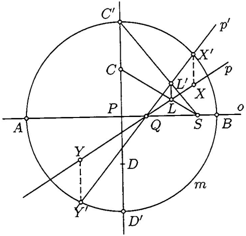
Takových afinit je mnoho, obzvlášť jednoduché jsou ty vztažené k hlavním osám elipsy.

Pomocí nich lze vysvětlit některé (bodové) konstrukce elipsy, příp. redukovat mnohé úlohy na jednodušší úlohy s kružnicí. . .

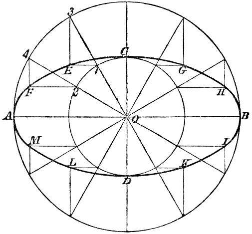
. . . viz např. tečny nebo průsečíky s přímkou:



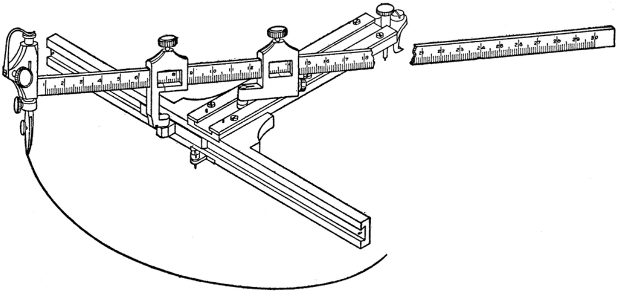
. 251



Složením osových afinit elipsy s kružnicí opsanou, resp. vepsanou je <u>stejnolehlost</u> mezi těmito kružnicemi. . .

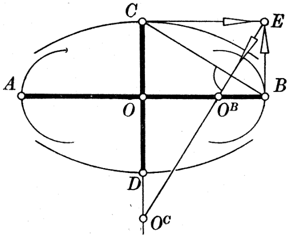


Na předchozím poznatku je založena např. *proužková* (neeukleidovská) konstrukce elipsy, resp. princip *elipsografu*:



Oskulační kružnice

Pokud nemáme elipsograf, můžeme si pomoct *oskulačními kružnicemi*,. . .



. . . což jsou kružnice, které mají s elipsou ve vrcholech dotyk druhého řádu.

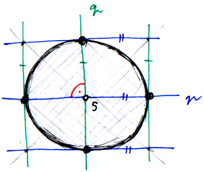
Vzhledem k předchozímu značení, poloměry těchto kružnic jsou $\frac{a^2}{b}$ a $\frac{b^2}{a}$ (což je náhodou zrovna p, viz s. 7 a 14).

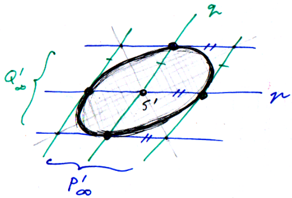
Sdružené a hlavní průměry

Elipsa je zcela určena svými hlavními průměry, což jsou průměry určené osami souměrnosti.

Hlavní průměry jsou navzájem kolmé sdružené průměry, . . .

. . . přičemž *sdružené průměry* jsou afinní obrazy kolmých průměrů kružnice, . . .





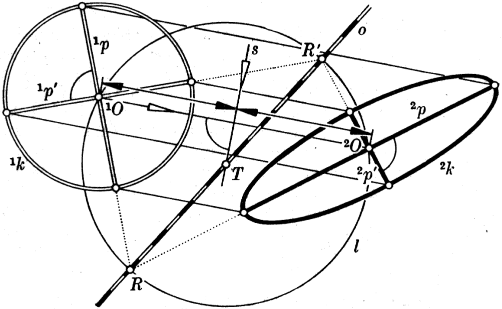
. . . neboli tečny v koncových bodech průměru *p* jsou rovnoběžné s průměrem *q* (a naopak), . . .

. . . neboli tečny v koncových bodech průměru *p* jsou incidentní s nevlastním bodem průměru *q* (a naopak), . . .

Sdružené a hlavní průměry

Často elipsa přichází na svět jako obraz kružnice vzhledem k <u>dané</u> osové afinitě.

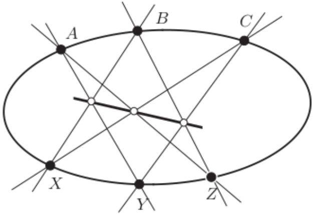
V takovém případě umíme hlavní průměry snadno najít:

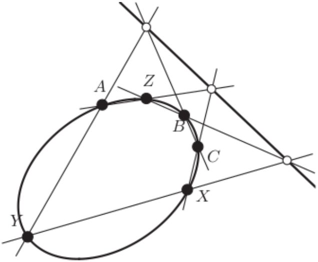


*Pascalova věta

Věta

Pro lib. šest bodů na elipse (či jiné kuželosečce) platí, že průsečíky protilehlých stran příslušného šestiúhelníku leží na jedné přímce.





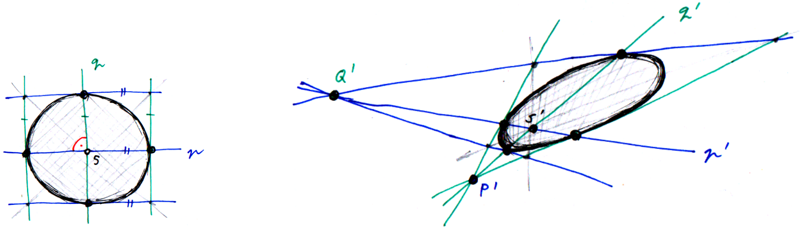
S tímto poznatkem lze sestrojovat body na elipse, aniž bychom znali hlavní osy. . .

Duální tvrzení se jmenuje Brianchonova věta; speciální, resp. degenerovaný případ je Pappova věta. . . [5]

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_theorem

Sdruženost průměrů na s. 22 je speciálním případem polární sdruženosti:

Obecný projektivní obraz kolmých průměrů kružnice může vypadat takto...



... kde P' a Q' jsou úběžníky nevlastních bodů průměrů p a q.

Nyní každý bod na přímce p' je *polárně sdružen* s bodem P' (a podobně pro dvojici q' a Q'), ...

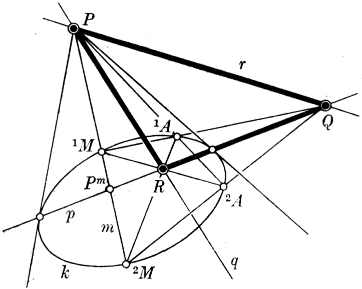
... neboli tečny v koncových bodech sečny p' jsou incidentní s bodem P' (a podobně pro dvojici q' a Q').[6]

[6]Terminologie: P' = *pól* přímky p' a p' = *polára* bodu P' vzhledem k elipse (či jiné kuželosečce)

Polární sdruženost je velmi užitečná relace a lze pomocí ní vidět/vymezit/řešit řadu věcí, ...

... prozatím si aspoň všimněme základního důsledku symetričnosti této relace:

- *bod Q leží na poláře bodu P $\iff$ bod P leží na poláře bodu Q.*



K tématu se ještě vrátíme v souboru IV...

Cvičení B

(1) Doplňte detaily k uvedeným tvrzením a konstrukcím, ...

(2) ... zejména si dobře uvědomte, do které skupiny poznatků patří (metrické/afinní/projektivní).

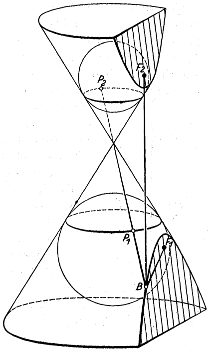
(3) Uvědomte si, že nyní konečně umíte sestrojit volný průmět kužele či válce.

Ostatní regulární kuželosečky

Většinu výše uvedených poznatků o elipse lze snadno modifikovat pro ostatní regulární kuželosečky, tj. pro *hyperbolu* a *parabolu*.

Nejprve uvádíme několik ekvivalentních vymezení v duchu s. 6.

Většinu zdůvodnění a upřesnění necháváme čtenáři jako doporučené cvičení. . . [7]



[7] K čemu se může hodit např. tento obrázek?

Hyperbola: ekvivalentní definice

Hyperbola je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky kromě dvou;

(B) množina bodů v rovině, jež mají konstantní rozdíl vzdáleností od dvou bodů E a F:
$$|EX| - |XF| = \text{konst.};$$

(C) množina bodů v rovině, jež mají konstantní poměr vzdáleností od bodu F a přímky d, přičemž
$$|XF| : |Xd| = \text{konst.} > 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

(E) projektivní obraz kružnice se dvěma nevlastními body.

Parabola: ekvivalentní definice

Parabola je

(A) řez kuželové plochy rovinou, která protíná všechny její povrchové přímky kromě jedné;

(B) —

(C) množina bodů v rovině, jež mají stejnou vzdálenost od bodu F a přímky d, tzn.

$$|XF| : |Xd| = 1;$$

(D) rovinná křivka určená kvadratickou rovnicí (vzhledem k vhodné souřadné soustavě)

$$y^2 = 2px;$$

(E) projektivní obraz kružnice s jedním nevlastním bodem.

Singulární kuželosečky

Singulární kuželosečky jsou sjednocením nebo průnikem dvou přímek.

Podle vzájemné polohy řezné roviny a kuželové/válcové plochy mohou nastat tyto případy:

- *dvě různé přímky* (různoběžné/rovnoběžné),
- *bod*,[8]
- *dvě splývající přímky*.

Každá z těchto kuželoseček je určena kvadratickou rovnicí (vhledem k vhodné souřadné soustavě):

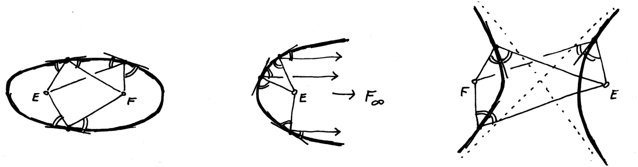
- $y^2 = k^2x^2$, resp. $y^2 = k^2$,
- $y^2 = -k^2x^2$,
- $y^2 = 0$.

kde k je nějaká nenulová konstanta.

[8] Tento případ budeme interpretovat jako průsečík dvou imaginárních (komplexně sdružených) přímek.

Vlastnosti a konstrukce

„Odrazová“ vlastnost elipsy popsaná na s. 17 platí pro všechny regulární kuželosečky:



Tato vlastnost je nejznámější asi u paraboly, což je mezní případ pro $F \to \infty$.

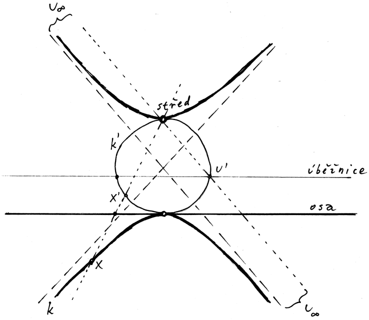
Jak je to s příslušnými kružnicemi?

Vlastnosti a konstrukce

Každou kuželosečku lze vidět jako obraz kružnice vzhledem k nějaké osové kolineaci.

Takových kolineací je mnoho, některé jsou speciálnější (oblíbenější), ale všechno je o fous komplikovanější než s afinitami na s. 18–20...

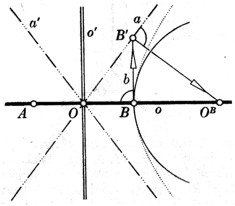
... viz např. následující osovou kolineaci mezi kružnicí a hyperbolou:



Jak byste tuto kolineaci modifikovali, abyste dostali elipsu, příp. parabolu?

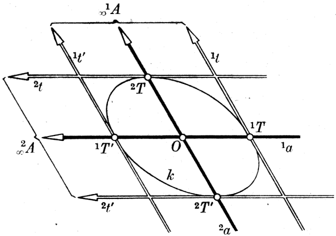
Také oskulační kružnice (s. 21) lze snadno vyjádřit a sestrojit, ...

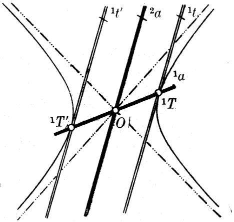
... např. pro hyperbolu (s vrcholy A, B a asymptotami a, a') vypadají takto:



Jaký je poloměr oskulační kružnice a jak by to vypadalo pro parabolu?

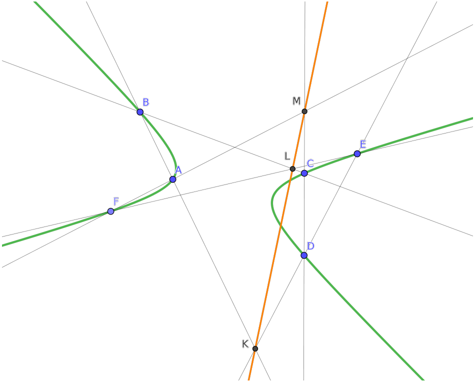
O sdružených průměrech (s. 22) má smysl mluvit jen u středových kuželoseček (tedy ne u paraboly)...



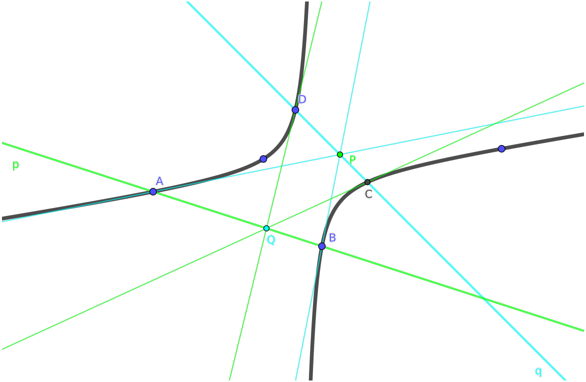


Všechny poznatky na s. 24–26 jsou platné pro lib. kuželosečky (jsou invariantní vzhledem k projektivním transformacím), ...

... viz např. Pascalovu větu:



Zejména se budeme ještě vracet k polárním vlastnostem...



Cvičení C

(1) Doplňte detaily k uvedeným tvrzením a konstrukcím, . . .

(2) . . . zejména si dobře uvědomte, do které skupiny poznatků patří (metrické/afinní/projektivní).

(3) Zamyslete se nad průběžně kladenými dotazy.

(4) Uvědomte si, že mnoho věcí umíte řešit analyticky (viz např. asymptoty hyperboly či ohnisko paraboly).

Kanonické tvary

Následující rovnicová vyjádření jsou tzv. *kanonické tvary*. Jedná se o vyjádření všech možných kuželoseček vhledem k vhodně zvoleným (kartézským) souřadným soustavám (viz s. 6, 30–32):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elipsa (příp. kružnice)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	hyperbola
$y^2 - 2px = 0$	parabola
$y^2 - k^2x^2 = 0$	dvě různoběžné přímky
$y^2 - k^2 = 0$	dvě rovnoběžné přímky
$y^2 + k^2x^2 = 0$	bod
$y^2 + k^2 = 0$	$\emptyset$
$y^2 = 0$	jedna (dvojnásobná) přímka

Obecná rovnice

Rovnicové vyjádření kuželosečky závisí na zvolené souřadné soustavě.

Každá z výše uvedených rovnic se vzhledem k obecné afinní transformaci

$$x' = kx + ly + o, \quad y' = mx + ny + q \tag{2}$$

změní na rovnici tvaru

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0, \tag{3}$$

kde koeficienty $A, B, \dots, F$ závisí na $k, l, \dots, q$ (a na koeficientech $a, b, p, \dots$).

Naopak, pokud rovnice tvaru (3) má (reálná) řešení, potom určuje nějakou kuželosečku.

Druh této kuželosečky lze nejlépe rozpoznat tak, že rovnici nějak upravíme do *kanonického tvaru*.

Přitom každá z provedených úprav představuje nějakou (afinní) transformaci souřadné soustavy (viz závěry na s. 51–52).

Obecná úmluva

Při manipulacích s danou kuželosečkou často končíme s obecnou souřadnou soustavou.

Vždy však předpokládáme, že…

… rovnice kuželosečky v zadání každé úlohy je vyjádřena vzhledem ke <u>kartézské</u> souřadné soustavě.

Příklad 1

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$4y^2 - x^2 - 4x - 8 = 0.$$

Levou stranu můžeme *doplněním do čtverce* upravit takto:

$$4y^2 \underline{-x^2 - 4x} - 8 = 4y^2 \underline{-(x+2)^2 + 4} - 8.$$

Nahrazením

$$x' = x + 2, \quad y' = y \tag{4}$$

dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$4y'^2 - x'^2 - 4 = 0.$$

Odtud již snadno rozpoznáváme hyperbolu.

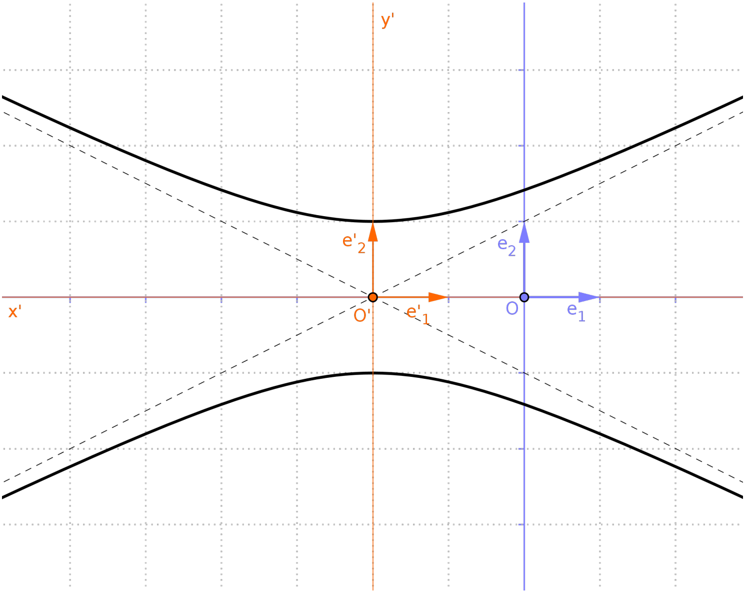
Souřadnice středu jsou zřejmé z (4)...

Použitá transformace je pouhým posunutím, tedy **shodností**. Proto po dodatečné úpravě

$$y'^2 - \frac{1}{4}x'^2 = 1$$

umíme určit velikosti hlavní a vedlejší osy, tedy všechno.

Příklad 1: obrázek



Příklad 2

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0.$$

Levou stranu můžeme *doplněním do čtverce* upravit takto:

$$\underline{y^2 + xy - 2y} - 2x - 1 = \underline{\left(y + \frac{1}{2}x - 1\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1} - 2x - 1.$$

Nahrazením

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{1}{2}x - 1 \tag{5}$$

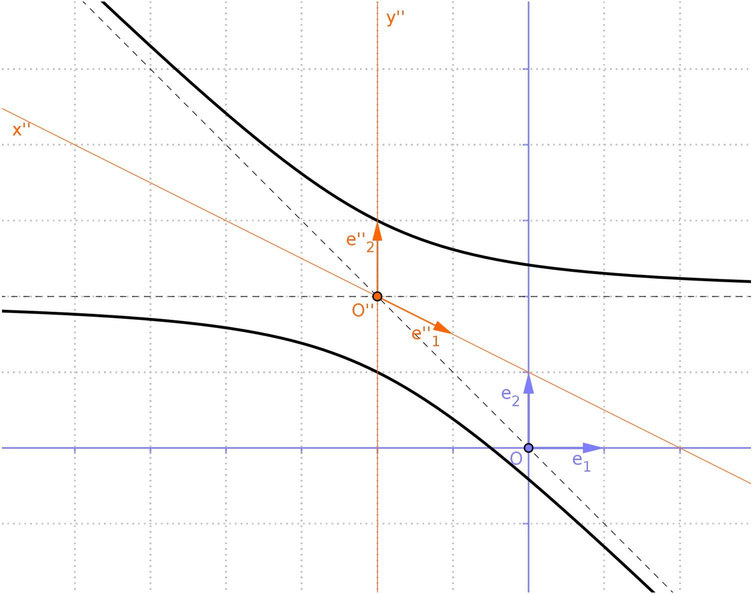
dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$y'^2 - \frac{1}{4}x'^2 - x' - 2 = 0.$$

To je právě zadání příkladu 1, odkud víme, že se jedná o hyperbolu.

Souřadnice středu je možné odvodit z příkladu 1 a transformace (5). Jak ale dál?

Příklad 2: obrázek



Příklad 3

Rozpoznejme kuželosečku určenou rovnicí

$$xy - 2x - 1 = 0.$$

Na levé straně postrádáme kvadratický člen (s kterým bychom začali doplňování do čtverce). K němu si lze dopomoci např. dosazením

$$x = x' + y', \quad y = y', \quad \text{neboli} \quad x' = x - y, \quad y' = y. \tag{6}$$

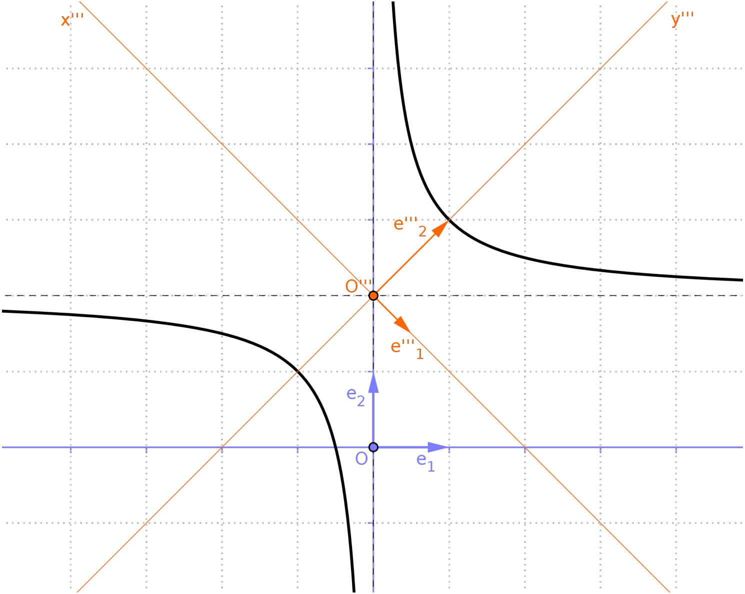
Takto dostáváme nové vyjádření téže kuželosečky

$$(x' + y')y' - 2(x' + y') - 1 = y'^2 + x'y' - 2x' - 2y' - 1 = 0.$$

To je právě zadání příkladu 2, odkud víme, že se jedná o hyperbolu.

Souřadnice středu je možné odvodit z příkladu 2 a transformace (6). Jak ale dál?

Příklad 3: obrázek



Zobecněním úvah z předchozích příkladů zjišťujeme, že...

...jakoukoli rovnici typu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{7}$$

lze vždy upravit do kanonického tvaru, a to opakováním úprav dvojího druhu:

(1) *doplnění do čtverce a následná substituce (předp. $A \neq 0$)*

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + \cdots &= \\ &= A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2}y^2 + \frac{2BD}{A^2}y + \frac{D^2}{A^2} + \cdots \\ &= Ax'^2 - \frac{B^2}{A^2}y'^2 + \frac{2BD}{A^2}y' + \frac{D^2}{A^2} + \cdots \end{aligned}$$

(2) *substituce $x = x' + y'$, $y = y'$ (pokud $A = C = 0$)*

$$Bxy + \cdots = B(x' + y')y' + \cdots = By'^2 + Bx'y' + \cdots$$

Transformace a dál?

Postupným skládáním použitých substitucí lze vždy určit výslednou transformaci souřadnic.

V případě, že kuželosečka je středová, lze odtud vyjádřit střed kuželosečky.

Pokud je transformace shodností, potom lze z kanonického tvaru zjistit také směry os a číselné charakteristiky kuželosečky.

Příklady 1–3

Na rozdíl od transformace (4) **není** transformace (5), resp. (6) shodností. Proto určení hlavní a vedlejší osy hyperboly v příkladu 2, resp. 3 není tak bezprostřední jako v příkladu 1…

Výhled

Předchozí typ uvažování je poměrně pracný, což nás motivuje k dalšímu zevrubnému studiu.

Od nynějška směřujeme k důkazu hlavní věty celého tohoto bloku:

Věta

S trochou algebry je všechno velmi snadné.

Nástroje

Obecnou rovnici (7),

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

budeme zapisovat pomocí matic takto

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

Levá strana je vyčíslením kvadratické formy $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na vektoru $\mathbf{x} = (x, y, 1)$.

Vektor $\mathbf{x} = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ představuje homogenní souřadnice bodu v rovině s (afinními) souřadnicemi $X = [x, y] \in \mathbb{R}^2$.

Matice v (8) je maticí polární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ příslušné F vzhledem k odpovídající souřadné soustavě.

...

Cvičení D

(1) Podle předchozích návodů rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0 \quad \text{nebo} \quad 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y = 28,$$

(2) ... vyjádřete celkovou transformaci souřadnic, ...

(3) ... pokuste se identifikovat střed a číselné charakteristiky kuželosečky a ...

(4) ... doplňte obrázek.

Literatura

[K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

[M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962

[R] K. Rektorys a kol., *Přehled užité matematiky*, SNTL, 1968

[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

[Š] Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, 2011

Obrázky