MAs04: Vybrané partie . . .

I. Symetrie
II. **Stereometrie**
III. Kuželosečky
IV. . . . a kvadriky

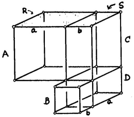
Doporučené čtení:

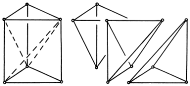
[H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

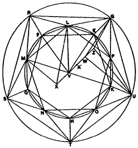
3. června 2019, Vojtěch Žádník

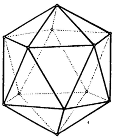
http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs04/

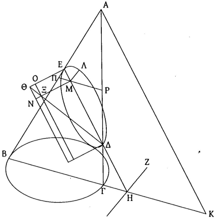
Stereometrie

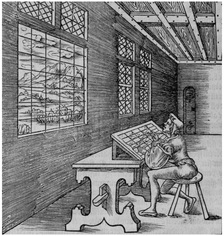


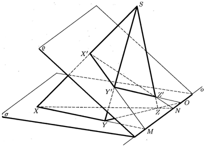


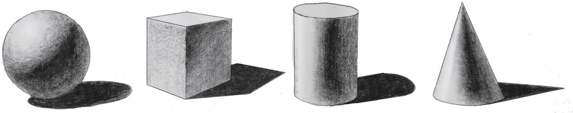












$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

. . . .

$$[x, y, z] \mapsto \left[0, \frac{6y}{6-x}, \frac{-5x+6z}{6-x}\right]$$

Upřesnění a plán

Stereo- . . . objekty a vztahy v trojrozměrném eukleidovském prostoru

-metrie . . . měření, tzn. především (avšak ne pouze) vztahy metrické.

- Základní polohové a metrické vztahy.
- Zobrazování trojrozměrných útvarů do roviny.
- Elementární vs. infinitezimální úvahy.
- Geometrie vs. algebra, konstrukční vs. počítací přístup.
- Příklady, obecné úvahy, vybrané aplikace.

Základy

... základy eukleidovské geometrie,
... geometrie Eukleidových Základů[1] (ovšem s Hilbertovými upřesněními[2]).

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina.*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, shodnost, spojitost, rovnoběžnost.*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel (resp. kolmost), rovnoběžnost, trojúhelník, čtverec, kružnice, jehlan, kužel, koule, ...*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů...*

---

[1] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Základy
[2] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Vzájemné polohy přímek v rovině

- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud nemají žádný společný bod.
- Přímky jsou *různoběžné*, pokud mají jeden společný bod.
- Pokud jsou vedlejší úhly vymezené dvěma různoběžkami shodné, pak každý z těchto úhlů se nazývá *pravý* a přímky se nazývají *kolmé*.

OBR

Vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru

- Přímky jsou *rovnoběžné*, pokud leží v téže rovině a nemají žádný společný bod.
- Přímka a rovina, resp. dvě roviny jsou *rovnoběžné*, pokud nemají žádný společný bod.
- Dvě roviny jsou *různoběžné*, pokud mají přímku společných bodů.
- Atd.
- Neprotínající se přímky jsou *kolmé*, pokud rovnoběžka k jedné přímce protínající přímku druhou je k ní kolmá.
- Přímka je *kolmá* k rovině, pokud je kolmá ke všem přímkám, které v ní leží.
- Dvě roviny jsou *kolmé*, pokud jedna z rovin obsahuje přímku, která je kolmá ke druhé rovině.
- Atp.

OBR

Vzájemné polohy obecně

Jednotně a obecně lze všechno vyjádřit pomocí vektorů:

- Přímky a roviny ... jedno- a dvourozměrné podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$.
- Afinní struktura nad V ... „dvěma bodům ($A, B \in \mathcal{A}$) $\mapsto$ vektor ($\overrightarrow{AB} \in V$)“.
- Vektorový prostor V ... tzv. zaměření $\mathcal{A}$, ozn. $V = \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Všemožné vzájemné polohy obecných af. podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ vymezíme pomocí jejich zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}}, \overrightarrow{\mathcal{C}} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ takto:

- *incidentní* ... $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ nebo $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}$,
- *různoběžné* ... $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ale ne incidentní,
- *rovnoběžné (různé)* ... $\overrightarrow{\mathcal{B}} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$ nebo $\overrightarrow{\mathcal{B}} \supseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$ (ale ne incidentní),
- *mimoběžné* ... jinak.

Vzájemné polohy obecně

Kolmost (a další věci) kontrolujeme pomocí skalárního součinu:

- Skalární součin . . . „dvěma vektorům ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$) $\mapsto$ číslo ($\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$)“.
- Kolmost vektorů $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ . . . $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0$.
- Kolmý doplněk podprostoru U ve V . . .

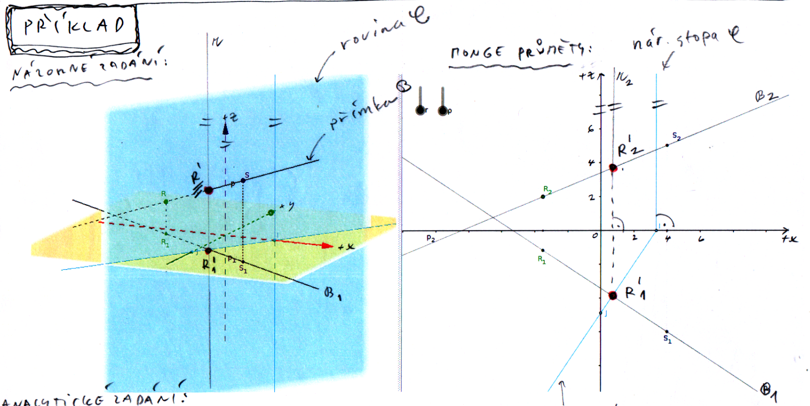
  . . . $U^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{u}$ pro všechny $\mathbf{u} \in U\}$.

Kolmost (jakožto speciální případ různoběžnosti) af. podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ můžeme pomocí jejich zaměření $\overrightarrow{\mathcal{B}}, \overrightarrow{\mathcal{C}} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ vymezit takto:

- $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ *kolmé* . . . $\overrightarrow{\mathcal{B}} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp}$ nebo $\overrightarrow{\mathcal{B}} \supseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}^{\perp}$.

Příklad[3]

33 PRŮNIK, resp. VZÁJEMNÁ POLOHA přímky $\mathcal{B}$ a roviny $\mathcal{E}$ v 3-dim afinním prostoru $\mathcal{A}$



půd. stopa $\mathcal{E}$

ANALYTICKÉ ZADÁNÍ:

- přímka $\mathcal{B}$ ... $(4,-6,5)+t(-8,5,3)$, $t \in \mathbb{R}$
- rovina $\mathcal{E}$ ... $-5x+3y=-16$

spec. poloha $\mathcal{E} \parallel$ osa z (tj. $\mathcal{E} \perp$ rovina xy)

- průnik $R' = \mathcal{B} \cap \mathcal{E}$ ... konstrukčně (pomocí přímky r)

[3] https://ggbm.at/JgQu6PVN

Cvičení A

(1) Připomeňte si důkladněji vše, co jsme jenom proletěli (např. pojmy jako rovinný/stěnový/prostorový úhel a jejich velikosti).

(2) Připomeňte si konstrukční a analytické řešení úlohy na s. 10.

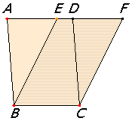
(3) Pozměňte zadání tak, abyste vyčerpali ostatní možné případy.

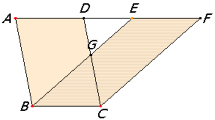
(4) Připomeňte si základní měřičské úlohy (např. vzdálenosti dvou bodů, bodu od přímky či bodu od roviny v předchozím příkladu).

O objemech rovnoběžnostěnů

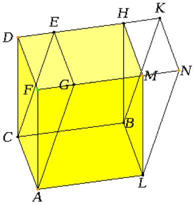
K základním tvrzením o obsazích rovnoběžníků máme následující 3D analogie:

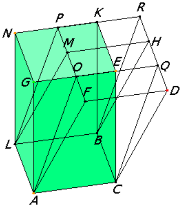
- *Rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah*.





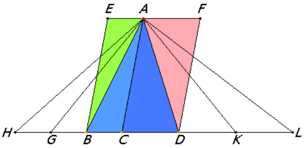
- *Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.*



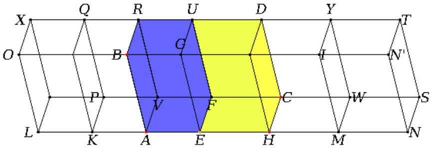


O objemech rovnoběžnostěnů

- *Poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.*



- *Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.*

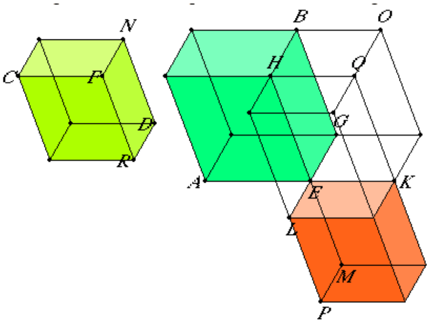


O objemech rovnoběžnostěnů

- *Poměr obsahů podobných rovnoběžníků je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.*

OBR

- *Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.*



Také 3D důkazy jsou naprosto analogické těm 2D:

Důkazy.

Tvrzení na s. 13 lze zdůvodnit rozpoznáním shodných částí, jejich odstřižením a přesouváním. . .
Tvrzení na s. 14 plynou z těch na s. 13 (a definice rovnosti poměrů). . .
Tvrzení na s. 15 plynou z těch na s. 14 (a definice podobnosti útvarů). . . □

Odtud máme známé vzorečky

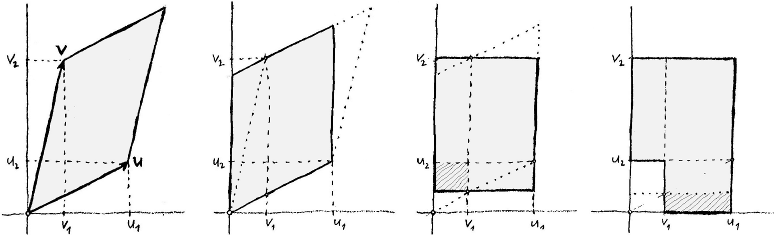
$$\text{„obsah (objem)} = \text{základna} \times \text{výška“.}$$

Rovnoběžník(-nostěn) je určen dvěma (třemi) vektory. . .

. . . a v této řeči si obsahy (objemy) krásně rozumí s determinanty. . .

Objemy a determinanty (naivně[4])

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...

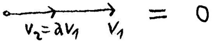


... je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

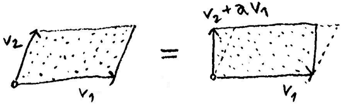
[4] problém se zobecněním do vyšší dimenze

Objemy a determinanty (koncepčně[5])

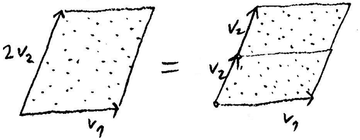
Vlastnosti <u>obsahu</u> jakožto zobrazení $V \times V \to \mathbb{R}_+ \ldots$



$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) =$$
$$= \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) =$$
$$= \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$



$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot \mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

[5] snadné zobecnění do lib. dimenze

Objemy a determinanty (koncepčně)

... se nápadně podobají vlastnostem determinantu jakožto zobrazení $V \times V \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) &= 0, \\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \det(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = \\ &= \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1), \\ \det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) &= b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

což jsou důsledky jeho anti-symetričnosti a multi-linearity.

Obecně pro n vektorů v n-rozměrném prostoru platí

$$\mathrm{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = |\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)|,$$

...

O obsazích trojúhelníků a mnohoúhelníků

Bezbolestné 2D modifikace:

- Každý rovnoběžník je úhlopříčkou rozdělen na dva shodné trojúhelníky, libovolný mnohoúhelník lze složit z trojúhelníků $\rightsquigarrow$ tvrzení na s. 13–15 platí pro lib. trojúhelníky, resp. mnohoúhelníky.

Odtud máme vzoreček

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde $S =$ obsah trojúhelníku, $a =$ velikost strany a $v =$ velikost odpovídající výšky.

O objemech hranolů

Bezbolestné 3D modifikace:

- Každý rovnoběžnostěn je úhlopříčnou rovinou rozdělen na dva shodné trojboké hranoly, libovolný hranol lze složit z trojbokých hranolů $\rightsquigarrow$ tvrzení na s. 13–15 platí pro lib. hranoly.

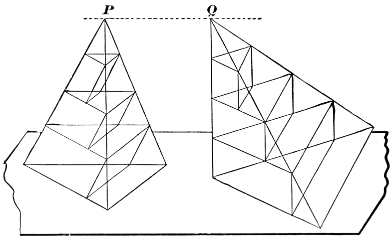
Obdobná tvrzení samozřejmě platí také pro jehlany, avšak jejich zdůvodnění je o poznání komplikovanější. . .

O objemech jehlanů

. . . zde je jedna analogie k tvrzení na s. 14 s naprosto **ne**analogickým důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



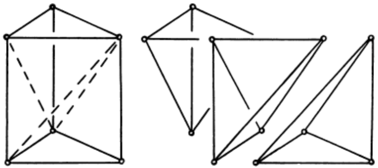
Idea důkazu.

- Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem (trojbokých) hranolů; zde hranoly se stejnými výškami.
- Poměrům objemů dvojic hranolů v jednotlivých vrstvách rozumíme (s. 14), . . . □

O objemech jehlanů

Z uvedeného mj. vyplývá, že

- *objem jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou.*



Odtud máme vzoreček

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde V = objem jehlanu, S = obsah podstavy a v = velikost odpovídající výšky.

Poznámky a znepokojivé otázky

Limitní verze úvahy na s. 22 je známá jako *Cavalieriho princip*[6] (pomocí něhož objevoval mnohé výsledky již Archimédés), viz dále.

Vše po s. 20 se obešlo bez infinitezimálních úvah.

Analogický závěr na s. 23 nikoli, . . .

. . . ale je to skutečně nutné?

Odpověď není vůbec samozřejmá, viz s. 32.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

Cvičení B

(1) Připomeňte si důkladněji vše, co jsme jenom proletěli (zejména všechny elementární poznatky na s. 13–16).

(2) Připomeňte si pokračování příběhu na s. 19 (zejména si uvědomte, že tutéž věc umíte řešit několika dalšími způsoby, viz Gramův determinant, vektorový součin apod.[7]).

(3) Připomeňte si detaily k dokončení důkazu na s. 22, a to
   (a) klasicky, tj. postaru (Eudoxos),
   (b) moderně, tj. s limitou (Riemann).

(4) Připomeňte si také měření základních oblých těles. . .

[7] https://ggbm.at/qcwgzxhm

Válec, kužel, koule

S podobnými úvahami jako na s. 22 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

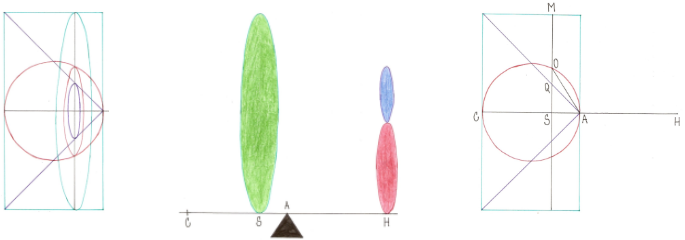
- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav*,
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů*,
- *objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu jemu opsaného válce*,
- apod.

Tyto poznatky doplňuje

Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.

Koule a válec



Idea důkazu.

Ke kouli doplňme válec a kužel s dvojnásobnými průměry a stejnou výškou. Uvažme řezy těchto tří těles rovinami kolmými ke společné ose rotace:

- Tyto řezy lze „vybalancovat“ tak, že (konstantní) řez válce v (proměnném) bodě S vyváží součet (proměnných) řezů koule a kužele v (konstantním) bodě H.
- Odtud po „zintegrování“ dostáváme rovnost

$$\tfrac{1}{2}\text{objemu válce} = \text{objem koule} + \text{objem kužele}.$$

- Odtud (a ze vztahů mezi válci a kuželi) plyne tvrzení. . . □

Cvičení C

(1) Odvoďte předchozí větu přímo pomocí Cavalieriho principu.

(2) Připomeňte si některé další pozoruhodné Archimédovy nápady (např. povrch koule a válce, kvadraturu parabolické úseče).

(3) Zformulujte některé předchozí myšlenky pomocí integrálů.

(4) Připomeňte si některé další obdobné nápady (viz např. Pappovy–Guldinovy věty[8]).

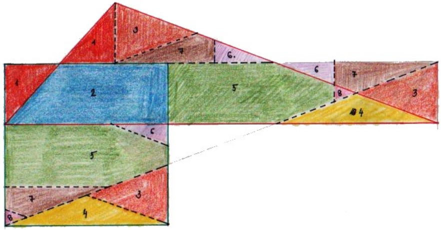
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_centroid_theorem

Stříhání v rovině

Nápady se stříháním a přemisťováním částí, které jsme pozorovali v důkazech tvrzení na s. 13, lze poměrně snadno domyslet až k následující větě:

Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\iff$ *jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*[9]



[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace%E2%80%93Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem

Obdobné nápady fungovaly pro rovnoběžnostěny, resp. hranoly se stejnými objemy, nikoli však pro jehlany.

Skutečně, 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty **neplatí**:

Věta (Dehnova–Sydlerova)

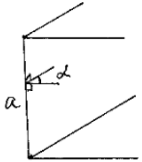
Pro dva mnohostěny se stejným objemem platí, že jeden lze rozřezat na části, z nichž lze složit ten druhý $\iff$ *tyto mnohostěny mají stejný tzv. Dehnův invariant.*[10]

Úplné zdůvodnění je značně komplikované, ukážeme si jenom několik nápadů (vedoucích k implikaci „$\Longrightarrow$“). . .

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

Dehnův invariant

Při řezání a přikládání sledujeme hrany a stěny, resp. stěnové úhly:



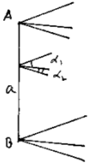
Dehnův invariant $\delta(M)$ mnohostěnu M je *nějak* určen všemi dvojicemi (a_i, α_i), kde i indexuje hrany M...

Aby to byl invariant vzhledem k řezání a přilepování, musí platit:

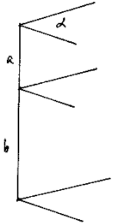
(1) M_1 a M_2 jsou shodné $\implies \delta(M_1) = \delta(M_2)$,

(2) M_1 a M_2 mají disjunktní vnitřky $\implies \delta(M_1 \cup M_2) = \delta(M_1) + \delta(M_2)$.

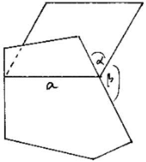
Aby platila vlastnost (2), musí pro „počítání“ δ platit *nějaké* vztahy:



$$(a, \alpha_1 + \alpha_2) = (a, \alpha_1) + (a, \alpha_2)$$



$$(a + b, \alpha) = (a, \alpha) + (b, \alpha)$$



$$(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \pi) = 0$$

Na faktorové množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podle předchozí relace ekvivalence (s. 34) máme operaci sčítání po složkách, a tato struktura tvoří grupu.

Dehnův invariant $\delta(M)$ mnohostěnu M je prvek této grupy určený součtem

$$\sum_{i \in \{\text{hrany } M\}} (a_i, \alpha_i).$$

Z konstrukce plyne, že dva mnohostěny, které lze rozřezat a přeskládat jeden na druhý, mají stejný Dehnův invariant.

Tedy, pokud dva mnohostěny mají různé Dehnovy invarianty, potom takové přeskládání není možné…

Cvičení D

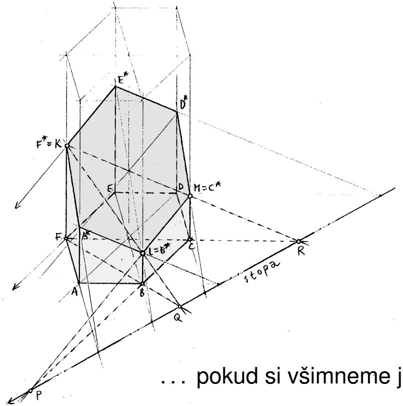
(1) Naučte se počítat v Dehnově grupě (s. 35).
(2) Určete Dehnovy invarianty několika pravidelných mnohostěnů.
(3) Ukažte, že Dehnův invariant lib. rovnoběžnostěnu, resp. hranolu je nulový.
(4) Vymyslete konkrétní řezání a přeskládání dvou těles, u kterých to je možné.
(5) Uvědomte si, že zdůvodnění nenulovosti Dehnova invariantu nemusí být jednoduché (a to ani u jednoduchých mnohostěnů).

Řezy jehlanu, reps. hranolu[11]

Dosud jsme přemítali, jak mnohostěny fyzicky řezat, něco jiného je takové řezy znázornit, resp. (ve vhodném průmětu) sestrojit.

Každá rovina — a tedy i rovina řezu — je určena třemi body.

Pro lib. jehlany, resp. hranoly může být vše velmi snadné...



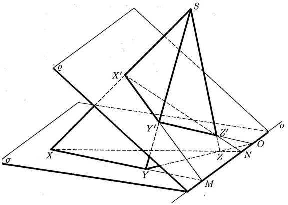
... pokud si všimneme jisté korespondence!

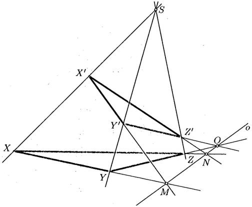
[11] https://ggbm.at/kvJL3iqr

Máme na mysli korespondenci mezi mnohoúhelníkem (některé) podstavy a mnohoúhelníkem řezu,[12] . . .

. . . což je v prostoru tzv. *perspektivní kolineace*, . . .

. . . v rovině průmětu tzv. *osová kolineace*:





Osová kolineace v rovině je zcela a naprosto určena

- osou (∼ průsečnice rovin),
- středem (∼ vrchol jehlanu),
- jednou další dvojicí odpovídajících si bodů.

[12]resp. mezi mnohoúhelníky dvou řezů nekonečné jehlanovité plochy

Poznámky

Osová kolineace není transformací celé eukleidovské (afinní) roviny:

některé body nemají vzor, některé nemají obraz, ...

... resp. jsou v nekonečnu.

Rovina rozšířená o „body v nekonečnu“ je tzv. projektivní rovina (viz dále)...

Osová kolineace v rovině je nejzákladnější projektivní transformací projektivní roviny; zobecňuje jiné základní a dobře známé transformace:

- osová afinita[13] ... základní afinní ... nevlastní střed,
- stejnolehlost[14] ... základní podobné ... nevlastní osa,
- posunutí ... „základní“ shodné ... nevlastní střed i osa,
-

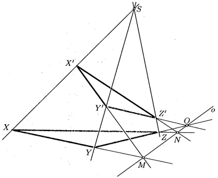
[13] tj. škálování v jednom směru

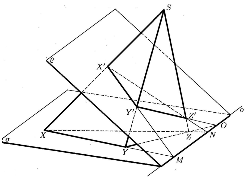
[14] tj. škálování ve všech směrech

Dříve použité ilustrace ještě zrecyklujeme k formulaci, resp. důkazu důležitého poznatku:

Věta (Desarguesova)

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



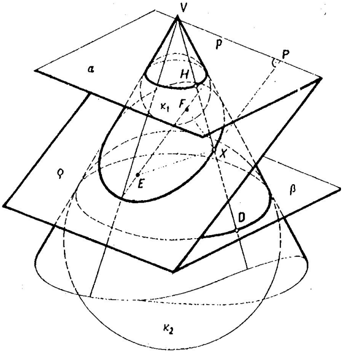


Vzhledem k předchozím interpretacím se tak dovídáme, že

- *projektivní transformace v rovině má osu* $\iff$ *má střed.*

Seky kužele, resp. válce

Stejné korespondence můžeme vidět mezi řezy kuželů, resp. válců, . . .



. . . tedy mezi rozličnými kuželosečkami.

Prozatím se spokojíme s konstatováním, že

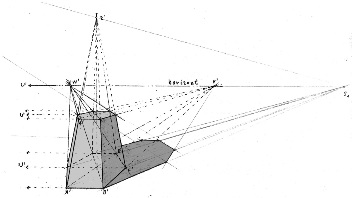
- *lib. kuželosečka je obrazem kružnice vzhledem k nějaké osové kolineaci.*

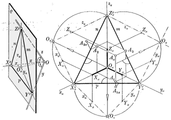
Cvičení E

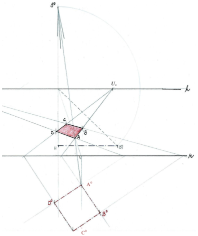
(1) Připomeňte si důkladněji vše, co jsme jenom proletěli.

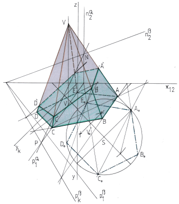
(2) Připomeňte si vše kolem osové kolineace a konstrukce řezu jehlanu/hranolu.

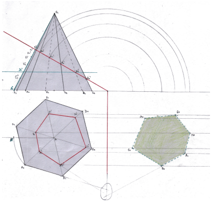
(3) Zavzpomínejte, příp. zalistujte učebnicemi, a uvědomte si, že osové kolineace jsou všudypřítomné a všudyužitečné:

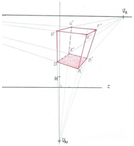












Úvodní přehled

Dosud jsme přemítali, jak mnohostěny fyzicky řezat, příp. ony řezy (ve vhodném průmětu) sestrojovat, ...

... něco jiného je umět průměty trojrozměrných objektů do dvojrozměrné roviny nějak rozumně dostat, příp. z oněch průmětů něco o skutečných vztazích v prostoru přečíst.

Podle způsobu promítání dělíme na:

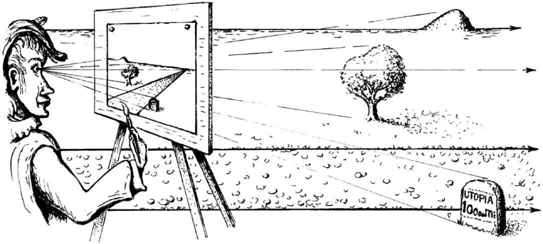
- středové (tj. projektivní),
- rovnoběžné (tj. afinní),
- exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- volné,
- vázané,
- vychytané,
- analytické,
- exotické.

Středové promítání

Středové promítání (projekce) je modelové projektivní zobrazení:



Středové promítání a každé *projektivní* zobrazení

(i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[15]

Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

[15]... kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé); viz **Pappovu větu**.

Rovnoběžné promítání

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání a každé *afinní* zobrazení navíc zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, jinými slovy

(iii) zachovává rovnoběžnost přímek,

(iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.[16]

OBR

[16]. . . kdykoli to dává smysl

Volné promítání

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

Věta

„Nepříliš degenerované“

(a) *afinní,*

(b) *projektivní*

zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy

(a) $n+1$ *bodů v obecné poloze,*

(b) $n+1$ *bodů v obecné poloze a n odpovídajícími úběžníky.*

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní:

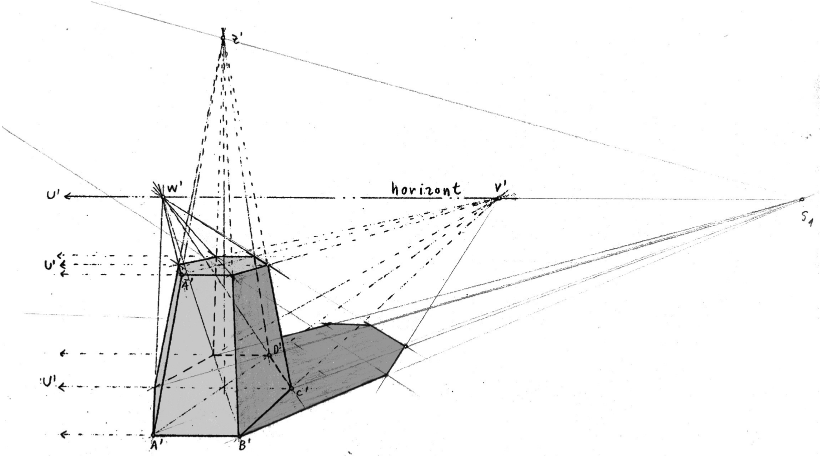
(a) pomocí rovnoběžek a přenášení poměrů,

(b) pomocí úběžníků a přenášení dvojpoměrů. . .[17] □

[17] http://ggbm.at/yWcCaQeA

Volný průmět pravidelného hranolu

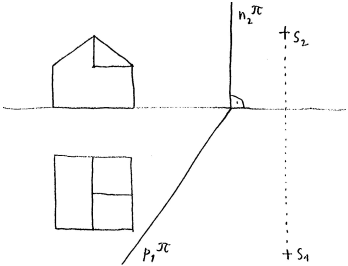
... určený obrazy vrcholů A', B', C', $\bar{A}'$ a úběžníky U', V', Z':

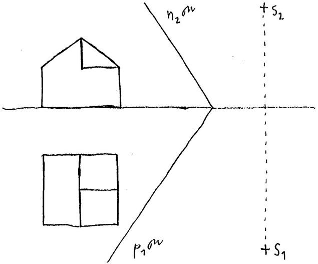


Vázané promítání

Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými sdruženými průměty (nárys, půdorys):





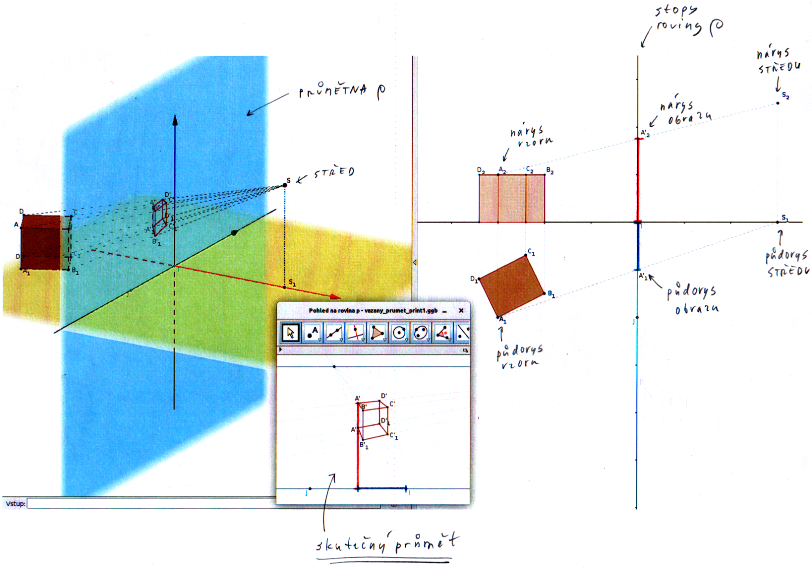
Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady.

Základní konstrukční dovednosti jsou:

- průnik přímky a roviny,
- odměřování a přenášení vzdáleností…

Vázaný průmět kvádru[18]

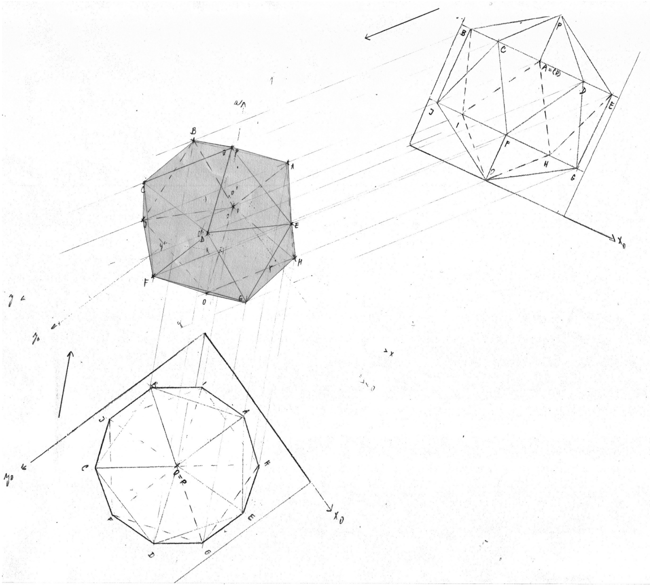
. . . do speciálně zvolené průmětny ρ:



18 http://ggbtu.be/mZvl063hi

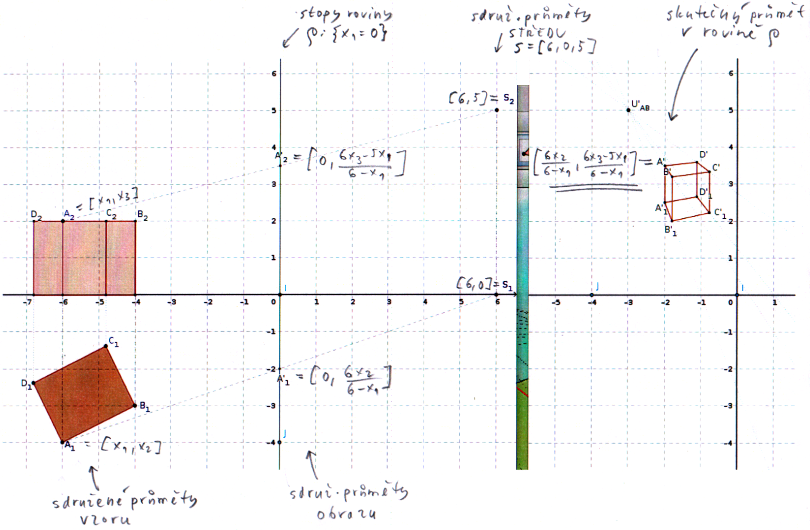
Vychytaný průmět pravidelného 20stěnu

... tzv. zářezovou metodou:



Analytické vyjádření

. . . vzhledem k nějaké souřadné soustavě:



Analytické vyjádření

Středové promítání ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$

- v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[0, \frac{6x_2}{6 - x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1}\right],$$

- v homogenních (rozšířených) souřadnicích:

$$(\underline{x_0} : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\underline{6x_0 - x_1} : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} \underline{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{\boxed{\text{Všechno v jedné matici!}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

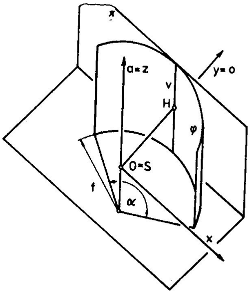
Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... za což vděčíme základní větě projektivní geometrie.

Další promítání

Dosud jsme uvažovali toliko projektivní zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

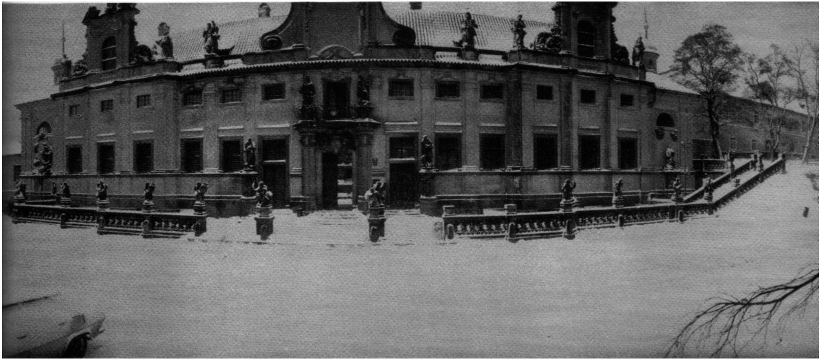
Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- středového promítání na válcovou plochu
- a rozvinutí této plochy do roviny.

Cylindrický průmět hradčanské Lorety



Další provedení

Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

- souřadnicemi $A = [x_1, x_2, x_3]$,[19]
- sdruženými průměty, tj. půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a nárysem $A_2 = [x_1, x_3]$,
- volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.[20]

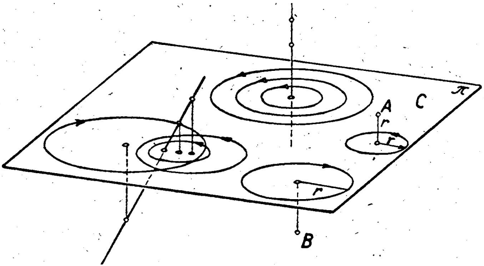
Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

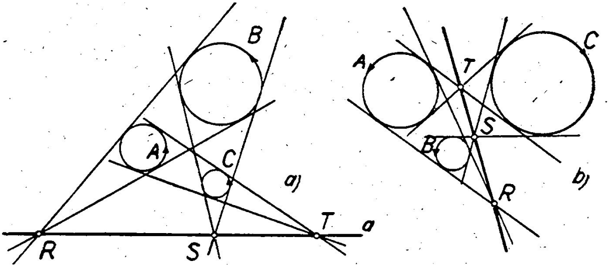
- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a kótou (= souřadnicí x_3) $\leadsto$ mapy,
- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|x_3|$ a orientací podle znaménka x_3) $\leadsto$ cyklografie...

[19] resp. homogenními souřadnicemi $A \approx (\underline{x_0} : x_1 : x_2 : x_3)$

[20] vrchol hranolu apod.

Cyklografický průmět bodu, přímky, roviny





Cvičení F

(1) Připomeňte si důkladněji vše, co jsme jenom proletěli.

(2) Konfrontujte pečlivě vázané průměty několika konkrétních bodů a jejich analytická vyjádření (viz ilustrace na s. 51 a 53).

(3) Zamyslete se nad cylindrickým průmětem přímky.

(4) Zamyslete se, k čemu se může hodit cyklografický způsob vyjadřování (viz např. Mongeovu větu nebo Apollóniovu úlohu).

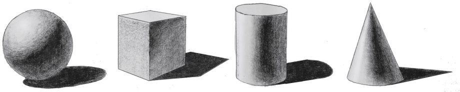
(5) Uvědomte si, co se navíc musí řešit při zobrazování oblých těles.

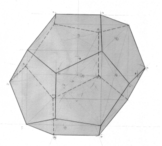
(6) Zavzpomínejte, příp. zalistujte učebnicemi, a uvědomte si, co by se do materiálu o stereometrii ještě hodilo:

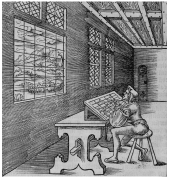
OBR

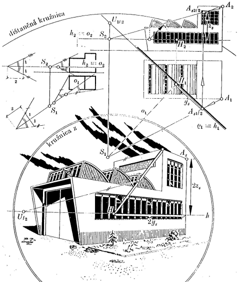
Cvičení F

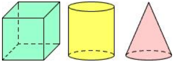
(7) Zavzpomínejte, příp. zalistujte učebnicemi, a uvědomte si, že se zobrazováním prostoru do roviny mohou — ale nemusí — být problémy:











Literatura

[A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999

[DV] L. Drs, J. Všetečka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981

[E] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heatha, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

[H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000

[K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996

[M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962

[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

[Š] Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, 2011

Obrázky