MAs04: Vybrané partie ...

I. Symetrie
II. Stereometrie
III. Kuželosečky
IV. **... a kvadriky**

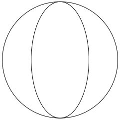
Doporučené čtení:

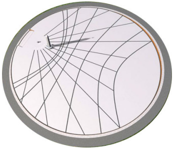
[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

22. června 2019, Vojtěch Žádník

http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs04/

Kvadriky





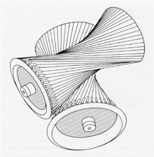
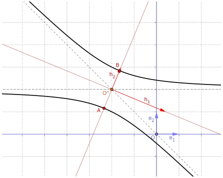
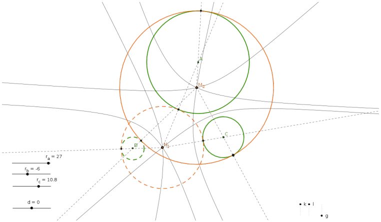


Figure 102 Hyperboloidal gears transmit motion to a skew shaft

$$f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y - 1$$



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\det \mathbf{F} = \frac{1}{4} \neq 0$$

...

Upřesnění

Každá kuželosečka v rovině je dána kvadratickou rovnicí,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Pomocí matic předchozí rovnici píšeme takto

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Levá strana je vyčíslením kvadratické formy $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na vektoru $\mathbf{x} = (x, y, 1)$.

Vektor $\mathbf{x} = (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ představuje homogenní souřadnice bodu v rovině s (afinními) souřadnicemi $X = [x, y]\ldots$

... a nic nám nebrání rozšířit naše úvahy do celé projektivní roviny.

Každá kuželosečka v projektivní rovině je dána kvadratickou formou na zastupujícím vektorovém prostoru...

... a nic nám nebrání rozšířit naše úvahy do lib. dimenze.

Plán

- Algebra kvadratických forem a symetrických matic.
- Geometrie kuželoseček a kvadrik, chytré počítání.
- Obecné úvahy, příklady, vybrané aplikace.

Nejdřív ovšem jeden ukázkový příklad, na kterém konfrontujeme předchozí představy a výpočty s pokročilejším algebraickým přístupem. . .

Příklad: opakování

V příkladu 2 v souboru III jsme uvažovali kuželosečku určenou rovnicí

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0, \tag{3}$$

kterou jsme uměli upravit do kanonického tvaru ve dvou krocích:

$$y'^2 - \tfrac{1}{4}x'^2 - x' - 2 = 0,$$

$$y''^2 - \tfrac{1}{4}x''^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

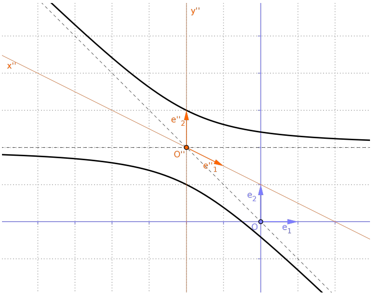
Přitom výsledná transformace souřadnic byla

$$x'' = x + 2, \quad y'' = \tfrac{1}{2}x + y - 1,$$

neboli

$$x = x'' - 2, \quad y = -\tfrac{1}{2}x'' + y'' + 2. \tag{5}$$

Příklad: opakování



Z (4) umíme rozpoznat, že se jedná o hyperbolu.

Z (5) umíme určit souřadnice nového počátku (tj. středu hyperboly),

$$O'' = [-2, 2], \tag{6}$$

a nových bázových vektorů (tj. směrů sdružených průměrů),

$$\mathbf{e}_1'' = (1, -\tfrac{1}{2}), \quad \mathbf{e}_2'' = (0, 1). \tag{7}$$

Odtud a z koeficientů v (4) umíme vydedukovat, že směry asymptot jsou

$$\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{e}_1'' + \mathbf{e}_2'' = (2, 0), \quad \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{e}_1'' - \mathbf{e}_2'' = (2, -2). \tag{8}$$

Odtud dále umíme určit směry hlavních průměrů, a to pomocí os úhlů určených asymptotami,

$$\mathbf{h}_1 = \sqrt{2}\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = (\sqrt{2} - 1, 1), \quad \mathbf{h}_2 = \sqrt{2}\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = (\sqrt{2} + 1, -1). \tag{9}$$

Příklad: reformulace

Vzhledem k předchozím konvencím zapisujeme rovnici (3),

$$y^2 + xy - 2x - 2y - 1 = 0, \tag{3}$$

pomocí matic takto

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{10}$$

Ve stejném stylu píšeme předchozí transformaci souřadnic (5) jako

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}''.$$

Pro kontrolu:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'')^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}''^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}'' = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix},$$

což krásně souhlasí s (4).

Příklad: reformulace

Vektor $\mathbf{x} \in V$ představuje homogenní souřadnice $X = (x : y : \underline{1})$ bodu v afinní rovině $\mathcal{A}$ s afinními souřadnicemi $X = [x, y]$; $\mathbf{F}$ je matice kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$ na trojrozměrném vektorovém prostoru $V \supset \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Obecný bod v projektivní rovině $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(V)$ má homogenní souřadnice $X = (x : y : \underline{x_0})$; dosazením do (10) máme vyjádření kvadratické formy F, tj. homogenní verzi rovnice (3):

$$y^2 + xy - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0. \tag{11}$$

Příklad: regulárnost/singulárnost

(i) Hyperbola je regulární kuželosečka; to souhlasí s poznatkem, že odpovídající kvadratická forma s maticí (10) je regulární:[1]

$$\det \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

[1] obecnosti na s. 20 a 22

Příklad: nevlastní body, asymptoty

(ii) Asymptoty hyperboly ukazují právě na její nevlastní body; ty lze určit jako průnik kuželosečky (11) s <u>nevlastní přímkou $x_0 = 0$</u>:[2]

$$y^2 + xy = y(y + x) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení,

$$N_1 = (1 : 0 : \underline{0}), \quad N_2 = (1 : -1 : \underline{0}),$$

což jsou právě homogenní souřadnice směrů z (8).

Řešení rovnice souvisí se znaménkem determinantu submatice

$$\det \underline{\mathbf{F}} = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Asymptoty jsou určeny těmito směry a středem hyperboly.

---

[2] obecnosti na s. 41

Příklad: střed

(iii) Střed hyperboly (6) má homogenní souřadnice $O'' = (-2 : 2 : \underline{1})$; odtud je patrné, že zastupující vektor $\mathbf{o}''$ je <u>polárně sdružen</u> s vektory zastupujícími <u>všechny nevlastní body</u>:[3]

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{o}'' = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Tedy střed $O'' = (x : y : \underline{x_0})$ je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y - x_0 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}x + y - x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení soustavy souvisí s hodností submatice

$$\det \underline{\mathbf{F}} = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{4} \neq 0.$$

[3] obecnosti na s. 27 a 39

(iv) Rovnice (4) je v diagonálním tvaru; to znamená, že příslušné vektory (7) tvoří polární bázi podprostoru $\overrightarrow{\mathcal{A}} \subset V$:[4]

$$\mathbf{e}_1''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2'' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & * \\ \frac{1}{2} & 1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ * \end{pmatrix} = 0.$$

Přitom koeficienty u x'', resp. y'' v rovnici (4) jsou rovny

$$\mathbf{e}_1''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1'' = \cdots = -\tfrac{1}{4}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{e}_2''^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2'' = \cdots = 1.$$

Směry $\mathbf{e}_1''$ a $\mathbf{e}_2''$ jsou směry polárně sdružených průměrů hyperboly.

Pro $\mathbf{e}_2''$ jsou všechny polárně sdružené vektory řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + y &= 0, \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

[4] obecnosti na s. 28, 30 a dál

Příklad: hlavní směry, osy

(v) Směry os jsou tzv. hlavní směry; to znamená, že příslušné vektory (9) tvoří ortogonální polární bázi podprostoru $\overrightarrow{\mathcal{A}} \subset V$:[5]

$$\mathbf{h}_1{}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & * \\ \frac{1}{2} & 1 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots = 0,$$

$$\mathbf{h}_1{}^T \cdot \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vektory $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$ jsou charakteristickými vektory matice formy F zúžené na $\overrightarrow{\mathcal{A}} \subset V$: Charakteristický polynom,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0,$$

má kořeny $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

[5] obecnosti na s. 47 až 50

Odpovídající charakteristické vektory jsou řešením soustavy

$$-\lambda_i x + \tfrac{1}{2}y = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x + (1-\lambda_i)y = 0,$$

pro $i = 1$ a 2; po dosazení vskutku dostáváme

$$\mathbf{h}_1 = (\sqrt{2}-1, 1) \quad \text{a} \quad \mathbf{h}_2 = (\sqrt{2}+1, -1).$$

V odpovídající normované bázi má forma $F|_{\vec{\mathcal{A}}}$ matici $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, jejíž determinant je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \underline{\mathbf{F}} = -\frac{1}{4}$. Znaménka $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ a

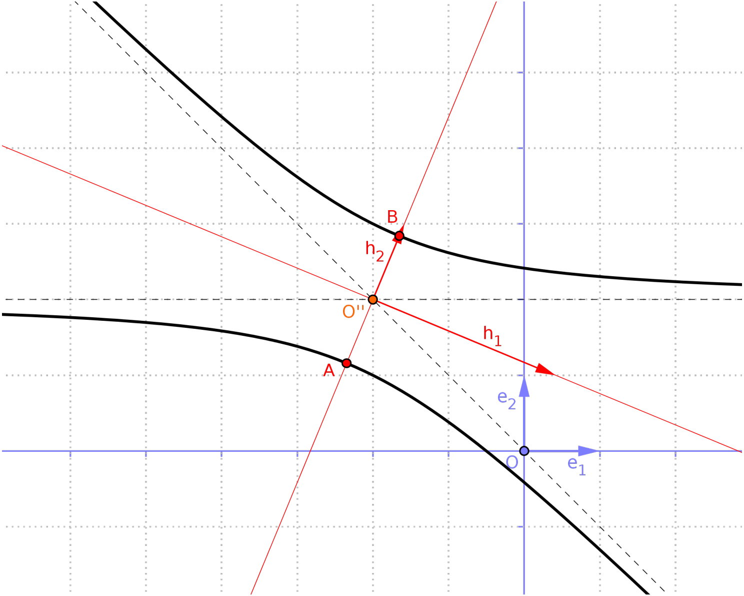
$$\ell = \frac{\det \mathbf{F}}{\det \underline{\mathbf{F}}} = -1 < 0$$

ukazují typ kuželosečky (hyperbola) a navíc pro velikosti jejích poloos platí[6]

$$a = \tfrac{|\ell|}{\sqrt{\lambda_1}} \doteq 0{,}910 \quad \text{a} \quad b = \tfrac{|\ell|}{\sqrt{-\lambda_2}} \doteq 2{,}197,$$

[6]podrobnosti a obecnosti na s. 59

Příklad: obrázek[7]



[7]POZOR: vektory $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{h}_2$ jsou omylem prohozeny

FAQ

Jak závisí předchozí úvahy na volbě násobku matice?

NIJAK: Pokud je $\mathbf{F}' = k \cdot \mathbf{F}$ jiná forma určující tutéž kuželosečku, potom

$$\det \mathbf{F}' = k^3 \cdot \det \mathbf{F}, \quad \det \underline{\mathbf{F}'} = k^2 \cdot \det \underline{\mathbf{F}}, \quad \lambda_1' = k \cdot \lambda_1 \quad \text{a} \quad \lambda_2' = k \cdot \lambda_2,$$

...

Jak závisí předchozí úvahy na volbě souřadnic, resp. na projektivních/afinních/shodných transformacích?

JAK KDY: viz dále...

*Bilineární a kvadratické formy

Definice

Zobrazení $F : V \to \mathbb{R}$ vektorového prostoru V do tělesa $\mathbb{R}$ se zove *kvadratickou formou*, pokud platí

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \text{pro lib. } \mathbf{x} \in V,$$

kde $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je nějaká symetrická bi-lineární forma.

Forma f je tzv. *polární forma* kvadratické formy F.

Poznámka

Forma f je jednoznačně určuje F a naopak:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\big).$$

*Bilineární a kvadratické formy

Z bilinearity f plyne souř. vyjádření (vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x_1 y_1 f_{11} + x_1 y_2 f_{12} + x_2 y_1 f_{21} + x_2 y_2 f_{22} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots \\ f_{21} & f_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

kde $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots$, $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \cdots$ a $f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Ze symetričnosti f plyne $f_{ij} = f_{ji}$ pro všechna i a j.

Rovnost (12) schematicky zapisujeme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}, \tag{13}$$

kde $\mathbf{F} = (f_{ij})$ značí matici formy f vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$.

*Regulární/singulární formy

Definice

Vektor $\mathbf{u} \in V$ je *singulárním vektorem* bilineární formy $f : V \times V \to \mathbb{R}$, pokud lineární forma $f(\mathbf{u}, -) : V \to \mathbb{R}$ je nulová.[8]

Bilineární forma f je *regulární*, pokud její jediný singulární vektor je nulový vektor; v opačném případě je forma f *singulární*.

Singulární vektory a regularita/sigularita kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$ jsou odvozeny od její polární formy f.

Poznámky

Všechny singulární vektory tvoří vektorový podprostor ve V.

Forma je regulární $\iff$ odpovídající matice (vzhledem k lib. bázi) je regulární.

Skalární součin je příkladem regulární bilineární formy; odpovídající kvadratická forma je norma vektoru.

---

[8]tzn. $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$ pro lib. $\mathbf{x} \in V$

Kvadriky

Definice

Kvadrika $\mathcal{K}$ (dim n) v projektivním prostoru $\mathcal{P}(V)$ (dim $n+1$) je množina všech bodů, jejichž zastupující vektory ve V (dim $n+1$) jsou nulovými vektory nějaké (nenulové) kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$, tzn.

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{P}(V) : F(\mathbf{x}) = 0\}. \tag{14}$$

Poznámky

Pokud se dvě kvadratické formy liší o nenulový násobek ($F' = k \cdot F$), zadávají tutéž kvadriku.
1-rozměrné kvadriky jsou kuželosečky, tedy elipsy, hyperboly, paraboly; dvojice přímek apod.
2-rozměrné kvadriky jsou sféry, elipsoidy, hyperboloidy, paraboloidy; kužele, válce; dvojice rovin apod.
Průnikem roviny s kteroukoli 2-rozměrnou kvadrikou je (zpravidla) nějaká kuželosečka.
...

Regulární/singulární kvadriky

Definice

Bod $B \in \mathcal{K}$ je *singulárním* bodem kvadriky $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$, pokud zastupující vektor $\mathbf{b} \in V$ je singulárním vektorem odpovídající kvadratické formy $F : V \to \mathbb{R}$; bod $B \in \mathcal{K}$, který není singulární se zove *regulární*.

Kvadrika $\mathcal{K}$ je *regulární*, pokud sestává pouze z regulárních bodů; v opačném případě je $\mathcal{K}$ *singulární*.

Poznámky

Kvadrika je regulární $\iff$ odpovídající kvadratická forma je regulární.
Všechny singulární body singulární kvadriky tvoří projektivní podprostor v $\mathcal{P}(V)$ (bod, přímku, ...).

V následujícím budeme většinu algebraických pozorování formulovat obecně, většinu geometrických pozorování hlavně pro kuželosečky ($n = 1$).

O určenosti kuželosečky

První ukázka užitečnosti současného přístupu:

Kvadratická forma F na vektorovém prostoru dimenze 3 je určena 6 koeficienty $f_{ij} \in \mathbb{R}$ (koeficienty symetrické matice 3×3) a kuželosečka je určena kvadratickou formou až na násobek, tedy:

Věta

Kuželosečka je jednoznačně určena 5 body v „dostatečně obecné poloze“.

Důkaz.

Dosazením 5 bodů do obecné rovnice kuželosečky dostáváme soustavu 5 lineárních rovnic a 6 neznámých.
Pokud jsou určující body navzájem různé a žádné 4 neleží na jedné přímce, potom je řešení této soustavy určeno jednoznačně až na násobek. . . $\square$

Příklad

Předpokládejme, že kuželosečka $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(V)$ obsahuje body

$$A_1 = (-2 : 1 : \underline{1}), \quad A_2 = (-2 : 3 : \underline{1}), \quad A_3 = (-1 : 0 : \underline{2}),$$
$$A_4 = (1 : -1 : \underline{0}), \quad A_5 = (1 : 0 : \underline{0})$$

a odpovídající kvadratická forma je tvaru

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxx_0 + 2eyx_0 + fx_0^2 = 0.$$

Po dosazení dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4a - 4b + c - 4d + 2e + f &= 0, \\ 4a - 12b + 9c - 4d + 6e + f &= 0, \\ a - 4d + 4f &= 0, \\ a - 2b + c &= 0, \\ a &= 0, \end{aligned}$$

jejíž všechna řešení jsou $a = 0,\ b = \text{lib.},\ c = 2b,\ d = e = f = -2b.$

Kuželosečka $\mathcal{K}$ je určena např. rovnicí (pro $b = \frac{1}{2}$):

$$xy + y^2 - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0.$$

Cvičení A

(1) Vyzkoušejte si, jak by vypadalo počítání v předchozím příkladě pro nějakou singulární kuželosečku.

(2) Pokud jste tak neučinili již dříve, uvědomte si, že kuželosečka je singulární, pokud příslušný kvadratický polynom lze vyjádřit jako součin dvou lineárních.

(3) Všechny výpočetní závěry doprovoďte obrázky.

(4) Všimněte si, že všechny stránky označené * v nadpise jsou čistě algebraické povahy a lze je číst nezávisle na ostatním textu.

*Polární sdruženost

Definice

Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ jsou *polárně sdružené* vzhledem k f, resp. F, pokud

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ prostoru V se jmenuje *polární bází* vzhledem k f, resp. F, pokud $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pro všechna $i \neq j$.

Poznámky

Matice f, resp. F vzhledem k polární bázi je diagonální.

Všechny vektory, které jsou polárně sdruženy s daným vektorem $\mathbf{u} \in V$, tvoří vektorový podprostor $U \subseteq V$:

- pokud $\mathbf{u}$ je singulární, potom $U = V$,
- pokud $\mathbf{u}$ není singulární, potom U je nadrovina ve V;
  rovnicové vyjádření této nadroviny je

$$U = \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0\}. \tag{15}$$

*O polární bázi

Věta

Každá kvadratická forma má polární bázi.

Důkaz.

Pro $F \equiv 0$ je každá báze je polární.
Pro $F \not\equiv 0$ uvažujeme induktivně:
pro lib. $\mathbf{u} \in V$ takový, že $F(\mathbf{u}) \neq 0$, vezměme polární doplněk (15), což je podprostor o dimenzi menší. . . $\square$

Polárních bází je nepřeberné množství.

Pokud je $f : V \times V \to \mathbb{R}$ skalární součin, potom F je norma vektoru a pro každé $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí $F(\mathbf{u}) > 0$.

Tedy podmínka $F(\mathbf{u}) \neq 0$ v důkazu je splněna automaticky, polární doplněk je právě kolmý doplněk $U = \mathbf{u}^{\perp}$ a polární báze není nic jiného než ortogonální báze.

*O signatuře a setrvačnosti

Matice kvadratické formy F v polární bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots)$ je diagonální, přičemž na diagonále jsou čísla $f_{ii} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = F(\mathbf{e}_i)$.

Ozn. $p :=$ počet kladných a $q :=$ počet záporných čísel na diagonále.

Uspořádaná dvojice (p, q) se nazývá *signaturou* kvadratické formy F.

Je zřejmé, že $p + q \leq \dim V$ a navíc tento součet nezávisí na zvolené polární bázi (neboť $p + q =$ hodnost matice formy F).

Navíc, samotná čísla p a q na polární bázi také nezávisí:

Věta

Signatura kvadratické formy nezávisí na zvolené polární bázi.

Důkaz.

Předp. různé polární báze se signaturami (p, q) a (p', q').
S odkazem na větu o součtu a průniku vektorových podprostorů lze ukázat, že $p \leq p' \dots$
Obdobně taky $p \geq p'$.
Celkem tedy $p = p'$, a proto také $q = q'$ (neboť $p + q = p' + q'$). □

Polární sdruženost

Definice

Body $A, B \in \mathcal{P}(V)$ jsou *polárně sdružené* vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$, pokud jsou jejich zastupující vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ polárně sdružené vzhledem k odpovídající kvadratické formě $F : V \to \mathbb{R}$.

Všechny body, které jsou polárně sdruženy s daným bodem $B \in \mathcal{P}(V)$ vzhledem ke $\mathcal{K}$, tvoří projektivní podprostor $p \subseteq \mathcal{P}(V)$:

- pokud B je singulární, potom $p = \mathcal{P}(V)$,
- pokud B není singulární, potom p je přímka;
  rovnicové vyjádření této přímky je

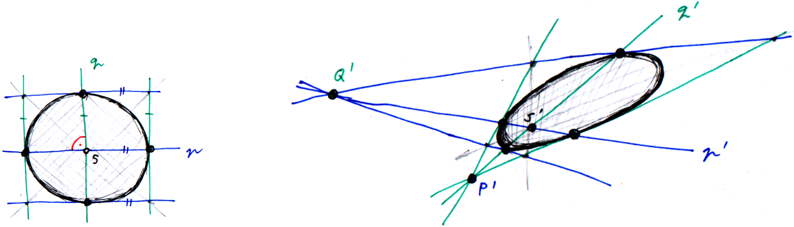
$$p = \{X \in \mathcal{P}(V) : f(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0\}, \tag{16}$$

  kde $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je polární bilineární forma kvadratické formy F.

Přímka p se nazývá *polárou* bodu B a bod B se nazývá *pólem* přímky p vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$.

Polární sdruženost

Jak souhlasí tyto definice s tím, co jsme prováděli v souboru III?



Polární sdruženost **je** projektivní invariant, . . .

. . . tedy pro regulární kuželosečky stačí ověřit soulad definicí pro obrázek vlevo:

Důkaz.

Velmi snadné! □

Poznámka

Obdobným trikem lze ukázat, že body na poláře p bodu P jsou právě takové body R, které spolu s průsečíky přímky PR s kuželosečkou $\mathcal{K}$ tvoří tzv. harmonickou čtveřici.[9]

---

[9] tzn. dvojpoměr této (správně uspořádané) čtveřice je -1

Polární sdruženost

Přímé ověření téhož lze založit na následujících pozorováních:

Z definice polární sdruženosti vyplývá, že

- bod A leží na poláře bodu B $\iff$ bod B leží na poláře bodu A.

Z definice polární sdruženosti a singulárního bodu vyplývá, že

- polára lib. bodu obsahuje všechny singulární body kuželosečky.

Z definice polární sdruženosti a regulárního bodu vyplývá, že

- polára regulárního bodu B regulární kuželosečky $\mathcal{K}$ je tečnou $\mathcal{K}$ v bodě B,
- polára regulárního bodu B singulární kuželosečky $\mathcal{K}$ je tvořící přímkou $\mathcal{K}$ obsahující bod $\mathcal{K}$.

Příklad

Určete tečnu kuželosečky

$$xy + y^2 - 2xx_0 - 2yx_0 - x_0^2 = 0.$$

procházející bodem $B = (2 : -1 : \underline{0})$.

Polára p bodu B je v homogenních souřadnicích určena rovnicí (16):

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x & y & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}x - x_0 = 0,$$

neboli $x = -2x_0$ (v afinních souřadnicích $x = -2$).

Průsečíkem této přímky s kuželosečkou jsou body dotyku tečen; ty obdržíme řešením rovnice

$$-2x_0y + y^2 + 4x_0^2 - 2yx_0 - x_0^2 = y^2 - 4x_0y + 3x_0^2 = 0.$$

Ta pro $x_0 = 0$ nemá vyhovující řešení; pro $x_0 \neq 0$ dostáváme

$$\frac{y}{x_0} = \frac{4 \pm 2}{2} = \text{buď } 3, \text{ nebo } 1.$$

Příklad: pokračování

Body dotyku tedy jsou

$$T_1 = (-2 : 3 : \underline{1}) \quad \text{a} \quad T_2 = (-2 : 1 : \underline{1}).$$

Tečna v bodě T_1 je polárou tohoto bodu:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} x & y & x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x + y - 2x_0 = 0.$$

Podobně určíme tečnu v bodě T_2...

Tečny kuželosečky procházející (nevlastním) bodem B jsou v afinních souřadnicích určeny rovnicemi[10]

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{a} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

[10] srovnejte závěry s obrázkem na s. 6

Projektivní klasifikace

Druhy kuželoseček podle seznamu na s. 41 v souboru III **nejsou** projektivně invariantní:

Při projektivních zobrazeních mohou být libovolně zaměňovány vlastní a nevlastní body, proto např. elipsa, hyperbola a parabola jsou projektivně nerozlišitelné, neboli ekvivalentní.

Věta

Každá kuželosečka v projektivní rovině je vzhledem k vhodně zvolené bázi vyjádřena některou z následujících rovnic:

$x^2 + y^2 + x_0^2 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární regulární kuželosečka)*
$x^2 + y^2 - x_0^2 = 0$	*regulární kuželosečka*
$y^2 - x^2 = 0$	*dvě přímky*
$y^2 + x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních přímek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

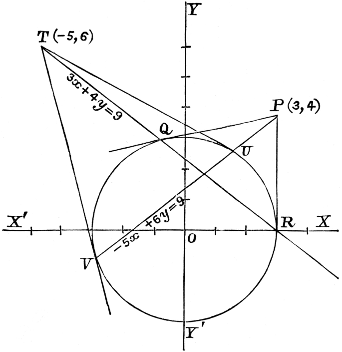
Zde jsou kuželosečky rozděleny podle míry degenerovanosti: regulární (hodnost 3), singulární hodnosti 2 a singulární hodnosti 1.

Cvičení B

(1) Potrénujte předchozí počítání s póly a polárami na nějakých jiných příkladech (viz např. následující obrázek nebo cvičení C na s. 45).

(2) Osahejte si na konkrétních příkladech projektivní ekvivalenci kuželoseček (viz např. s. 34 v souboru III), . . .

(3) . . . a to jak synteticky, tak analyticky.



O středu

Na s. 31 jsme operovali se středem kružnice a uvědomili jsme si, že to není projektivní invariant.

Střed kuželosečky ($=$ její střed souměrnosti) je však zachován při afinních zobrazeních a víme, že

- střed kuželosečky je pólem nevlastní přímky,
- průměr kuželosečky je polárou nějakého nevlastního bodu.

Poznámky

Regulární kuželosečka má právě jeden střed, singulární kuželosečky mohou mít středů víc.[11]
Středové kuželosečky mají (aspoň jeden) vlastní střed, nestředové nemají (žádný) vlastní střed.

[11] zejména každý singulární bod je středem

O středu

Uvažme kuželosečku $\mathcal{K}$ určenou rovnicí

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxx_0 + 2eyx_0 + fx_0^2 = 0, \tag{17}$$

tzn. matice odpovídající kvadratické formy je

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad \text{ozn.} \quad \underline{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Bod $S = (x : y : \underline{x_0})$ je středem kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když platí

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = 0,$$

tedy, právě když je řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

O středu

Věta

Kuželosečka $\mathcal{K}$ má právě jeden vlastní střed $\iff$ $\det \underline{\mathbf{F}} \neq 0$.

Důkaz.

Střed S je vlastní $\iff$ $x_0 \neq 0$.
V takovém případě má soustava (19) jednoznačné řešení $\iff$ determinant matice soustavy je $\neq 0$. □

Poznámky

Pokud $\mathcal{K}$ nemá vlastní střed, potom nutně $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$.
Pokud $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$, potom $\mathcal{K}$ nemá vlastní střed (např. parabola) nebo má vlastních středů víc (např. dvojice rovnoběžek).

O nevlastních bodech

Nevlastní body kuželosečky jsou její průsečíky s nevl. přímkou $x_0 = 0$.

Tedy bod $N = (x : y : \underline{0})$ je nevlastním bodem kuželosečky (17), právě když platí

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0. \tag{20}$$

Věta

Kuželosečka $\mathcal{K}$ má

- *žádný nevlastní bod (dva komplexně sdružené)* $\iff \det \underline{\mathbf{F}} > 0$,
- *dva různé nevlastní body* $\iff \det \underline{\mathbf{F}} < 0$,
- *jeden nevlastní bod (dvojnásobný)* $\iff \det \underline{\mathbf{F}} = 0$.

Důkaz.

Nemůže být současně $x = 0$ a $y = 0$; po dělení x, resp. y je (20) kvadratickou rovnicí vzhledem k $\frac{y}{x}$, resp. $\frac{x}{y}$, jejíž diskriminant je

$$D = 4b^2 - 4ac = -4 \det \underline{\mathbf{F}}. \qquad \square$$

Poznámky

Pokud je $F' = k \cdot F$ jiná kvadratická forma určující tutéž kuželosečku, potom platí

$$\det \mathbf{F}' = k^3 \cdot \det \mathbf{F} \quad \text{a} \quad \det \underline{\mathbf{F}'} = k^2 \cdot \det \underline{\mathbf{F}}.$$

Zejména $\det \underline{\mathbf{F}'}$ a $\det \underline{\mathbf{F}}$ mají stejná znaménka, takže předchozí diskuze vskutku nezávisí na zastupující kvadratické formě!

Tečna v nevlastním bodě kuželosečky je její *asymptotou*.

Díky všem těmto vymezením se určování středů, průměrů a asymptot neliší od určování pólů, polár a tečen. . . [12]

---

[12] konkrétní ukázky jsou v úvodním příkladu na s. 9–12, viz též s. 33

Afinní klasifikace

Afinní klasifikace kuželoseček se neliší od seznamu na s. 41 v souboru III, akorát konstanty a, b, p a k nemají výše uvedený význam.

Věta

Každá kuželosečka v afinní rovině je vzhledem k vhodně zvolené afinní souřadné soustavě vyjádřena některou z následujících rovnic:

$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární elipsa)*
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	*elipsa*
$x^2 - y^2 - 1 = 0$	*hyperbola*
$y^2 - 2x = 0$	*parabola*
$y^2 - x^2 = 0$	*dvě různoběžné přímky*
$y^2 - 1 = 0$	*dvě rovnoběžné přímky*
$y^2 + x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních různoběžek)*
$y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$ *(průsečík dvou imaginárních rovnoběžek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

Afinní klasifikace

Vzhledem ke značení a pozorování na s. 39–41 můžeme předchozí klasifikaci zpřehlednit následovně:

	$\det \mathbf{F} \neq 0$	$\det \mathbf{F} = 0$
$\det \underline{\mathbf{F}} > 0$	elipsa (re, im)	bod
$\det \underline{\mathbf{F}} < 0$	hyperbola	různoběžky
$\det \underline{\mathbf{F}} = 0$	parabola	rovnoběžky (re, im, =)

Poznámka

Případy „re“ a „im“ značí existenci reálných bodů („im“ znamená $\emptyset$).
Případ „=“ značí jednu dvojnásobnou přímku; to je singulární kuželosečka hodnosti 1.
V klasifikaci neuvažujeme singulární kuželosečky, jejichž tvořící přímka je nevlastní; takové kuželosečky nelze vyjádřit v afinních souřadnicích.

Cvičení C

(1) Podle předchozích návodů rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0, \quad \text{resp.} \quad 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y = 28,$$

určete nevlastní body a střed.

(2) Všechny výpočetní závěry doprovoďte obrázky a porovnejte s cvičením D ze souboru III.

(3) Vyzkoušejte si, jak by vypadalo předchozí počítání pro nějakou singulární kuželosečku.

*O kolmé polární bázi

V eukleidovském vektorovém prostoru V, tj. ve vekt. prostoru se skalárním součinem $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, ...

... uvažme kvadratickou formu $F : V \to \mathbb{R}$ s polární formou $f : V \times V \to \mathbb{R}$ a maticí $\mathbf{F}$.

Ptáme se, zda existuje polární báze vzhledem k F, která by byla současně ortogonální, neboli kolmá?

Ptáme se, zda nás má předchozí otázka vůbec zajímat?

Odpověď na obě otázky zní ANO, viz větu na s. 53.

Nejdřív si však musíme uvědomit několik věcí...

*Hlavní vektory

Vektory tvořící ortogonální polární bázi jsou tzv. hlavní vektory:

Definice

Vektor se nazývá *hlavní*, pokud je polárně sdružen s každým vektorem, který je k němu kolmý.

Jinak řečeno, vektor $\mathbf{u} \in V$ je hlavní, pokud pro lib. $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} = 0 \Longrightarrow f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0. \tag{21}$$

*Symetrická zobrazení

Bilineární forma $f : V \times V \to \mathbb{R}$ jednoznačně určuje lineární zobrazení $\Phi : V \to V$, a to následujícím způsobem:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \,.\, \Phi(\mathbf{y}) \quad \text{pro lib. } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \tag{22}$$

Jak f, tak **.** jsou symetrické formy, proto pro lib. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:

$$\mathbf{x} \,.\, \Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) \,.\, \mathbf{y}. \tag{23}$$

Definice

Lineární zobrazení s vlastností (23) se nazývají *samoadjungovaná* nebo prostě *symetrická*.

Poznámka

Předchozí rovnosti lze vzhledem k lib. ortonormální bázi vyjádřit[13]

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Tedy, zobrazení Φ je symetrické $\iff$ jeho matice $\mathbf{F}$ vzhledem k lib. ortonormální bázi je symetrická.

[13] matice skalárního součinu vzhledem k ortonormální bázi je jednotková

Lemma

Vektor **u** *je hlavním vektorem formy* $f \iff$ **u** *je charakteristickým vektorem zobrazení* Φ.

Důkaz.

Obraz lib. vektoru **u** vzhledem k Φ můžeme vyjádřit jako $\Phi(\mathbf{u}) = c\mathbf{u} + \mathbf{x}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{u}^{\perp}$.
Pokud je **u** hlavním vektorem formy f, potom platí:

$$0 = f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{x} = (c\mathbf{u} + \mathbf{x}) \,.\, \mathbf{x} = c\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} + \mathbf{x} \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x} \,.\, \mathbf{x}.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, tedy $\Phi(\mathbf{u}) = c\mathbf{u}$; tzn. **u** je char. vektorem Φ.

Naopak, pokud je **u** char. vektorem zobrazení Φ, potom pro lib. **x** platí:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{x})$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Odtud plyne (21), tzn. vektor **u** je hlavní. $\square$

*O symetrických zobrazeních

Symetrická zobrazení mají několik zajímavých vlastností, které obecná lineární zobrazení nemají:

Lemma

Pro každé symetrické lineární zobrazení $\Phi : V \to V$ *platí:*

(a) *kolmý doplněk invariantního podprostoru je invariantní podprostor,*

(b) *všechna charakteristická čísla jsou reálná,*

(c) *char. vektory příslušné různým char. číslům jsou navzájem kolmé,*

(d) *char. vektory příslušné char. číslu s násobnosti* k *tvoří vektorový podprostor dimenze* k*.*

*Důkaz věty o symetrických zobrazeních

(a) Předp. $U \subseteq V$ je invariantní, tj. $\Phi(\mathbf{u}) \in U$ pro lib. $\mathbf{u} \in U$.
Pro lib. $\mathbf{v} \in U^\perp$ platí
$$0 = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{u} \,.\, \Phi(\mathbf{v}).$$
Tzn. $\Phi(\mathbf{v}) \in U^\perp$, tedy $U^\perp$ je taky invariantní.

(b) Předp. $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pro nějaké $\lambda \in \mathcal{C}$. Potom pro lib. $\mathbf{x}$ platí[14]
$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u} \,.\, \mathbf{x} \quad \text{a} \quad \overline{f(\mathbf{u}, \mathbf{x})} = f(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{x}}) = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{u}} \,.\, \bar{\mathbf{x}}.$$
Odtud dostáváme
$$\lambda \mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = f(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{u}} \,.\, \mathbf{u}, \quad \text{tedy} \quad (\lambda - \bar{\lambda}) \mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} = 0.$$
Pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ je $\mathbf{u} \,.\, \bar{\mathbf{u}} > 0$, proto $\lambda = \bar{\lambda}$, neboli $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Předp. $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ a $\Phi(\mathbf{v}) = \kappa \mathbf{v}$. Potom platí
$$\lambda \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \kappa \mathbf{v} \,.\, \mathbf{u}, \quad \text{tedy} \quad (\lambda - \kappa) \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0.$$
Z předpokladu $\lambda \neq \kappa$ plyne $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = 0$.

(d) Plyne z (a) a (b).

[14] zde uvažujeme komplexní rozšíření V, f, ...

*O kolmé polární bázi!

Nyní konečně odpovídáme na otázky ze s. 47:

Věta

Každá kvadratická forma F v eukleidovském vektorovém prostoru má ortogonální polární bázi, a ta je tvořena char. vektory matice $\mathbf{F}$*.*
Pokud je tato báze normovaná, potom matice formy F vzhledem k oné bázi je diagonální s char. čísly matice $\mathbf{F}$ *na diagonále.*

Důkaz.

První část je bezprostředním důsledkem tvrzení na s. 50 a 51.
V druhé části si stačí připomenout, že pokud je $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, potom platí

$$F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u}. \qquad \square$$

Pro obecnou kvadratickou formu je kolmá polární báze určena jednoznačně až na násobky hlavních vektorů.

Věta o kolmé polární bázi bude představovat nejúčinnější nástroj k hledání os kuželoseček (a kvadrik) včetně jejich velikostí...

Metrické vlastnosti

S metrickými záležitostmi jsme celý blok zahajovali, takže se nemusíme příliš opakovat.

Zejména osy, hlavní průměry a jejich velikosti, excentricita, ohniska, řídící přímky apod. jsou všechno pouze metrické invarianty.

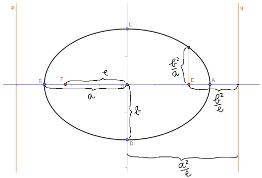
Pro zajímavost doplňujeme:

Věta

Ohnisko je pólem řídící přímky, řídící přímka je polárou ohniska.

Důkaz.

Plyne z předchozího popisu, viz též upřesnění na s. 14 v souboru III. . . □



Poznámky

Ohnisko a řídící přímka byly definovány pouze pro regulární kuželosečky, a to vztahem

$$|XF| : |Xd| = \text{konst.},$$

kde F je ohnisko, d řídící přímka a X lib. bod na kuželosečce.

Je zajímavé, že v tomto duchu lze charakterizovat také (některé) ostatní kuželosečky...

	$F \notin d$	$F \in d$
konst. < 1	elipsa (re)	bod
konst. > 1	hyperbola	různoběžky
konst. $= 1$	parabola	rovnoběžky (=)

Metrickou klasifikaci známe již ze s. 41 v souboru III; pro pořádek zopakujeme:

Věta

Každá kuželosečka v eukleidovské rovině je vzhledem k vhodně zvolené kartézské souřadné soustavě vyjádřena některou z následujících rovnic:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	$\emptyset$ *(imaginární elipsa)*
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*elipsa, příp. kružnice (pro $a = b$)*
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbola*
$y^2 - 2px = 0$	*parabola*
$y^2 - k^2x^2 = 0$	*dvě různoběžné přímky*
$y^2 - k^2 = 0$	*dvě rovnoběžné přímky*
$y^2 + k^2x^2 = 0$	*bod (průsečík dvou imaginárních různoběžek)*
$y^2 + k^2 = 0$	$\emptyset$ *(průsečík dvou imaginárních rovnoběžek)*
$y^2 = 0$	*jedna přímka (dvojnásobná)*

Upřesnění: charakteristická čísla

Hlavní vektory kuželosečky jsou charakteristickými vektory matice $\underline{\mathbf{F}}$, viz s. 50.

Charakteristický polynom lze vyjádřit takto[15]

$$\det(\underline{\mathbf{F}} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - \operatorname{tr} \underline{\mathbf{F}} \cdot \lambda + \det \underline{\mathbf{F}} = 0,$$

kde tr značí stopu matice, tj. součet čísel na diagonále.

Kořeny, tzn. charakteristická čísla, označíme λ_1 a λ_2; tedy

$$\det \underline{\mathbf{F}} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{tr} \underline{\mathbf{F}} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Zejména znaménko, příp. nulovost $\det \underline{\mathbf{F}}$ souvisí se znaménky, příp. nulovostí λ_1 a λ_2, viz dále.

[15] viz příklad na s. 13

Upřesnění: klasifikace

Vzhledem k dosavadním značením a pozorováním můžeme předchozí klasifikaci (s. 44) popsat následovně:

	$\det \mathbf{F} \neq 0$	$\det \mathbf{F} = 0$
$\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2$	elipsa (re, im)	bod
$\operatorname{sgn} \lambda_1 = -\operatorname{sgn} \lambda_2$	hyperbola	různoběžky
$\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_2 = 0$	parabola	rovnoběžky (re, im, =)

Poznámky

Speciálně, pokud platí $\lambda_1 = \lambda_2$, potom je každý směr hlavní, tzn. každý průměr určuje osu souměrnosti (např. u kružnice).
Pokud je $\lambda_1 = 0$ nebo $\lambda_2 = 0$, potom odpovídající směr ukazuje na nevlastní střed kuželosečky (např. u paraboly).

Upřesnění: středové

Jaký je vztah mezi charakteristickými čísly matice $\underline{\mathbf{F}}$ a číselnými charakteristikami kuželosečky $\mathcal{K}$?

Středová kuželosečka má ve vhodné kartézské souřadné soustavě (tvořené normovanými hlavními vektory) rovnici

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \ell = 0 \quad \text{pro nějaké } \ell \in \mathbb{R}.$$

Při přechodu mezi ortonormálními bázemi se $\det \mathbf{F}$ ani $\det \underline{\mathbf{F}}$ nezmění, tedy $\det \mathbf{F} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ell$ a $\det \underline{\mathbf{F}} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Odtud vidíme, že

$$\ell = \frac{\det \mathbf{F}}{\det \underline{\mathbf{F}}}.$$

Porovnáním s kanonickými tvary na s. 56 zjišťujeme, že

$$a^2 = \left|\frac{\ell}{\lambda_1}\right| \quad \text{a} \quad b^2 = \left|\frac{\ell}{\lambda_2}\right| \quad \text{resp.} \quad k^2 = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|. \tag{24}$$

Upřesnění: nestředové

Regulární nestředová kuželosečka má ve vhodné kartézské souřadné soustavě (tvořené normovanými hlavními vektory) rovnici

$$\lambda_2 y^2 + 2mx = 0, \quad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{R}.$$

Při přechodu mezi ortonormálními bázemi se $\det \mathbf{F}$ (ani $\det \underline{\mathbf{F}} = 0$) nezmění, tedy $\det \mathbf{F} = -\lambda_2 \cdot m^2$.

Odtud můžeme vyjádřit m; porovnáním s kanonickým tvarem na s. 56 zjišťujeme, že

$$p^2 = \left|\frac{\det \mathbf{F}}{\lambda_2^3}\right|. \tag{25}$$

Pro singulární nestředové kuželosečky je $\det \mathbf{F} = \det \underline{\mathbf{F}} = 0$, tedy vztah mezi λ_2 a k z kanonického tvaru není zřejmý...

Poznámky

Pokud je $F' = k \cdot F$ jiná kvadratická forma určující tutéž kuželosečku, potom platí

$$\det \mathbf{F}' = k^3 \cdot \det \mathbf{F}, \quad \det \underline{\mathbf{F}'} = k^2 \cdot \det \underline{\mathbf{F}}, \quad \lambda_1' = k \cdot \lambda_1 \quad \text{a} \quad \lambda_2' = k \cdot \lambda_2.$$

Tedy předchozí úvahy a zejména závěry v (24) a (25) vskutku nezávisí na zastupující kvadratické formě!

Cvičení D

(1) Podle předchozích návodů rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0, \quad \text{resp.} \quad 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y = 28,$$

určete hlavní směry (osy) a číselné charakteristiky kuželosečky.

(2) Všechny výpočetní závěry doprovoďte obrázky a porovnejte s cvičením D ze souboru III.

(3) Vyzkoušejte si, jak by vypadalo předchozí počítání pro nějakou singulární kuželosečku.

(4) Dokažte tvrzení na s. 54.

Analogie

Obecnou definici n-rozměrné kvadriky jsme uvedli na s. 21.

Většina poznatků, které jsme formulovali pro kuželosečky ($n = 1$), mají zřejmá zobecnění:

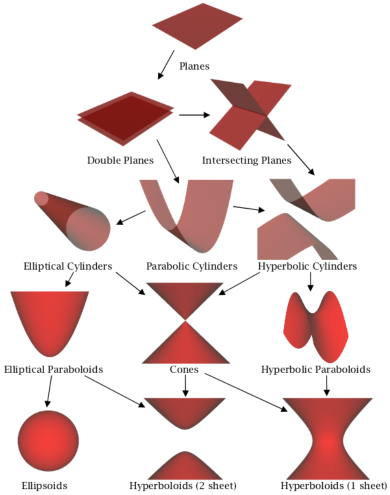
- *n-rozměrná kvadrika je jednoznačně určena $\frac{1}{2}(n+4)(n+1)$ body v dostatečně obecné poloze*; (s. 23)
- *regulární/singulární* body a kvadriky beze změny; (s. 22)
- *polární sdruženost* beze změny, akorát místo polár máme *polární nadroviny* a místo tečen *tečné nadroviny*; (s. 30)
- *středy* a *průměry* beze změny, akorát místo asymptot máme *asymptotické nadroviny*; (s. 38)
- *osy*, *hlavní průměry* a jejich velikosti beze změny. (s. 59)

Podstatnější rozdíly pozorujeme pouze při klasifikacích — myšlenky jsou stejné, akorát se musíme zorientovat ve více možnostech.

Podrobnosti a ostatní zajímavosti lze najít např. v [S, JS]. . .

$n = 2$: klasifikace

Náznak afinní klasifikace 2-rozměrných kvadrik je na následujícím obrázku:



Úkolem obecné Apollóniovy úlohy je sestrojit kružnici (resp. cyklus),[16] která se dotýká tří daných kružnic (resp. cyklů).

Středy cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů tvoří vždy nějakou kuželosečku (k) — pro cykly a, b se středy A, B a poloměry r_a, r_b platí:

Věta

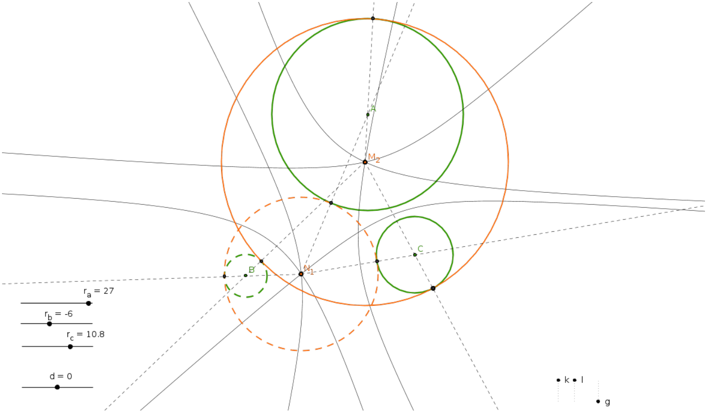
- *Je-li* $|r_a - r_b| > |AB|$*, pak* k *je elipsa s ohnisky* A, B *a délkou hlavní osy* $|r_a - r_b|$.
- *Je-li* $|r_a - r_b| < |AB|$*, pak* k *je hyperbola s ohnisky* A, B *a délkou hlavní osy* $|r_a - r_b|$.

Zde uvažujeme $r_a, r_b \in \mathbb{R}$ jako orientované poloměry, tzn. znaménko r_a odpovídá orientaci cyklu a.

Ve speciálních, resp. mezních případech může být kuželosečka k kružnicí nebo přímkou. . .

[16] cylkus = orientovaná kružnice

Řešení pomocí průniku kuželoseček



(1) Středy cyklů, které se dotýkají tří dvojic daných cyklů, tvoří tři kuželosečky;

(2) středy hledaných cyklů (M_1 a M_2) jsou společnými body těchto tří kuželoseček;

(3) dotykové body jsou na spojnicích středů.

Gergonovo řešení

Jiné řešení Apollóniovy úlohy je založeno na polární sdruženosti (vzhledem k daným kružnicím).

Zdůvodnění následující konstrukce plyne z těchto poznatků:

(a) *spojnice (l_i) dvojic dotykových bodů na každém cyklu prochází společným bodem (P), jež je potenčním středem daných tří kružnic;*

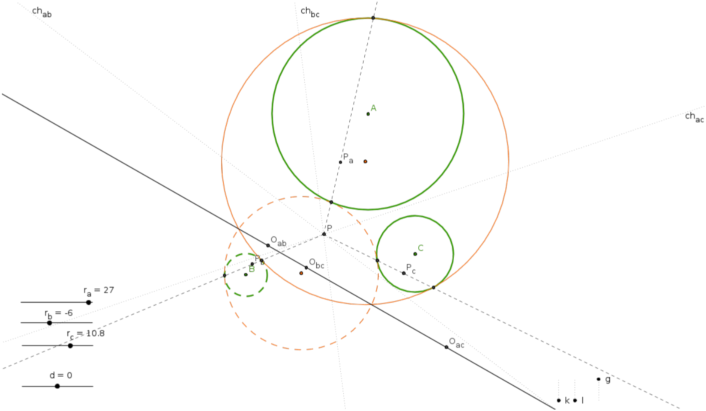
(b) *póly (L_i) těchto spojnic vzhledem k odpovídajícím kružnicím leží na jedné přímce (ch), jež je právě chodrálou dvou kružnic řešení;*

(c) *přímka ch je osou podobnosti tří daných cyklů;*[17]

(d) *protože $L_i \in ch$ a L_i je pól l_i, musí pól ch vzhledem ke každé z daných kružnic ležet na odpovídající přímce l_i.*

[17] tj. spojnice tří středů stejnolehlosti

Gergonovo řešení



(1) $ch_{ab}, ch_{bc}, ch_{ac}$ jsou chordály tří dvojic daných kružnic, jež prochází jejich potenčním středem P;

(2) O_{ab}, O_{bc}, O_{ac} jsou středy stejnolehlostí tří dvojic daných cyklů, jež leží na jejich ose podobnosti;

(3) P_a, P_b, P_c jsou póly této přímky vzhledem k daným kružnicím;

(4) dotykové body jsou na spojnicích PP_a, PP_b, PP_c.

Jiné řešení úlohy Apolloniovy je založeno na identifikaci cyklů v eukleidovské rovině s body na 3-rozměrné tzv. *Lieově kvadrice* a polární sdruženosti (vzhledem k této kvadrice):

Cyklus c se středem $(C_1 : C_2 : \underline{1})$ a poloměrem r_c určuje bod ve 4-rozměrném projektivním prostoru

$$\hat{C} := (C_1 : C_2 : r_c : C_1^2 + C_2^2 - r_c^2 : \underline{1}),$$

který navíc leží na 3-rozměrné kvadrice $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(V)$ určené kvadratickou formou $F : V \to \mathbb{R}$ s maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Přiřazení

$$\text{cyklus } c \text{ v eukleidovské rovině} \quad \mapsto \quad \text{bod } \hat{C} \text{ na Lieově kvadrice}$$

je injektivní;[18] přímým rozepsáním se přímo ověří, že

Věta

Cykly c a d se dotýkají $\iff$ body $\hat{C}$ a $\hat{D}$ jsou polárně sdružené.

Tedy algebraické řešení úlohy Apollóniovy vypadá takto:

(1) Pro tři dané cykly a, b, c[19] uvažme odpovídající body $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ na Lieově kvadrice $Q \subset \mathcal{P}(V)$;

(2) všechny body v $\mathcal{P}(V)$, které jsou polárně sdružené k $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ vzhledem ke Q, tvoří přímku (řešení soustavy 3 lineárních rovnic);

(3) tato přímka protíná kvadriku Q ve dvou bodech $\hat{M}, \hat{N}$ (řešení 1 kvadratické rovnice);

(4) tyto body odpovídají dvěma hledaným cyklům m, n.

[18] lze rozšířit také pro body ($r = 0$) a přímky ($r = \infty$), čímž se z tohoto přiřazení stane bijekce

[19] v dostatečně obecné poloze (ve spec. případech může být řešení víc nebo taky žádné)

Cvičení E

(1) S využitím poznatků tohoto kurzu zpracujte jakýkoli (váš oblíbený) příklad, a to nejlépe interaktivní formou.[20]

(2) Zapátrejte v literatuře, příp. ve vzpomínkách, a najděte další aplikace kuželoseček a kvadrik.

[20] viz např. http://geogebra.org

Literatura

[JS] J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, MU, 1996, http://www.math.muni.cz/~janyska/LAKUZ.pdf

[R] K. Rektorys a kol., *Přehled užité matematiky*, SNTL, 1968

[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988

[Š] Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, 2011

[Z] P. Zlatoš, *Lineárna algebra a geometria*, Bratislava, 2011, http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos/la/LAG_A4.pdf

Obrázky

[Š], 3

http://conicsectionjpg.blogspot.com/, 3

http://etc.usf.edu/clipart/, 3, 37

http://wikimedia.org/, 3, 66