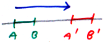
MAs04: Vybrané partie . . .

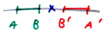
21. června 2019, O. Schneider, P. Vyhnálková, V. Žádník

http://is.muni.cz/el/1441/jaro2019/MAs04/

Symetrie přímky — cvičení (A2) (A4) (B4)

(a) SHODNÉ





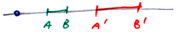
- dány obrazem úsečky (shodným)
- generátory ... posunutí (lib. vektor) & souměrnost

  přímé — nepřímé
- analyticky ... $G \cong \{x \mapsto ax+b \mid a = \pm 1,\ b \in \mathbb{R}\}$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; —''— \right\} \cong \mathbb{R} \ltimes \mathbb{Z}_2$$

viz konvence na s. 13:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ ax+b \end{pmatrix}$$

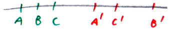
(b) AFINNÍ



- dány lib. obrazem úsečky, tj. dvou bodů
- generátory ... navíc stejnolehlost (lib. koef.)
- analyticky ... $G \cong \{x \mapsto ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; —''— \right\} \cong \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}$$

(c) PROJEKTIVNÍ



$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{2ax+2b}{2cx+2d} = \dots$$

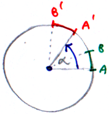
- dány lib. obrazem tří bodů
- generátory ... navíc "inverze"
- analyticky ... $G \cong \left\{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\} / \sim$

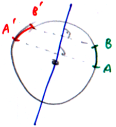
$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; —''— \right\} / \sim$$

Symetrie kružnice — cvičení (A2) (A4) (B4)

SHODNÉ = AFINNÍ = PROJEKTIVNÍ

[proj. zobr. zachovávající kružnici ⇒ shodné]





přímá   nepřímá

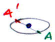
- dány obrazem dvou bodů
- generátoři ... otáčení (lib. úhel) & souměrnost
- analyticky ... $G \cong \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x \mp \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x \pm \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \langle 0, 2\pi) \right\}$

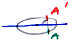
$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \;\middle|\; D^T \cdot D = E \right\} \cong \langle 0, 2\pi) \times \mathbb{Z}_2$$

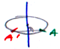
(viz s. 16–17)

Symetrie elipsy — cvičení (A2) (A4) (B4)

(a) SHODNÉ





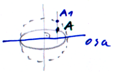


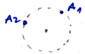
- generátoři … $\underbrace{\text{id, středová soum.}}_{\text{přímé}}$, $\underbrace{\text{osové soum.}}_{\text{nepřímé}}$
- analyticky … $G \cong \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = D_2$

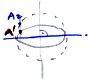
↖ DISKRÉTNÍ

(b) AFINNÍ = PROJEKTIVNÍ

- generátoři …. $(\text{osová afinita}) \circ (\text{symetrie kruž.}) \circ (\text{os. afinita})^{-1}$







- analyticky … $\begin{pmatrix}1&0\\0&a/b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\alpha & \mp\sin\alpha\\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&b/a\end{pmatrix} = \dots$

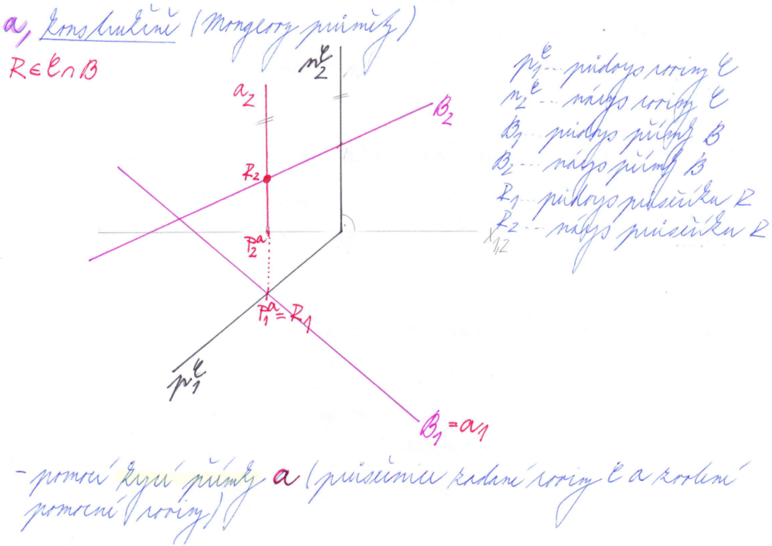
$$G \cong \left\{ \begin{pmatrix}\cos\alpha & \mp\frac{b}{a}\sin\alpha\\ \frac{a}{b}\sin\alpha & \pm\cos\alpha\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \langle 0, 2\pi) \right\}$$

$$\cong \langle 0, 2\pi) \times \mathbb{Z}_2$$

↖ SPOJITÁ

Průnik přímky a roviny — cvičení (A2)

Připomeňte si konstrukční a analytické řešení úlohy na s. 10.



… řešení velmi snadné, neboť rovina C je kolmá k půdorysně (čteme zdola: nejprve R_1, potom R_2). .

Průnik přímky a roviny — cvičení (A2)

b) analyticky

• přímka $\mathcal{B}$ určená body R, S $\quad R[-4;-1;2]$ $\quad S[4;-6;5]$ $\quad \vec{s}_{\mathcal{B}} = (-8;5;-3)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

• rovina $\mathcal{C}$ určená 3 body $\leadsto$ $\mathcal{C}: -5x + 3y + 16 = 0$

$$\boxed{R \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}}: \quad -5(4-8t) + 3(-6+5t) + 16 = 0$$

$$-20 + 40t - 18 + 15t + 16 = 0$$

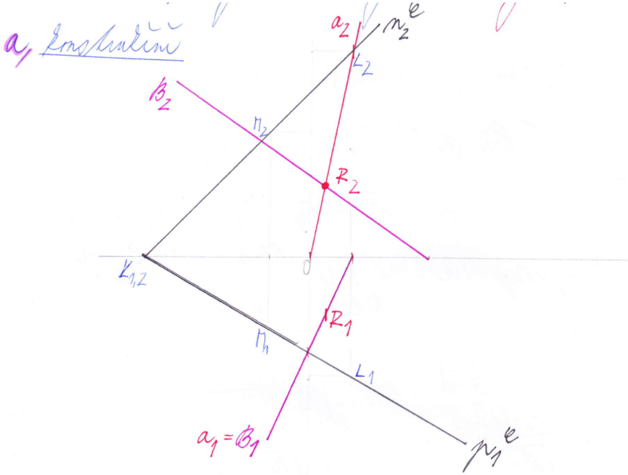
$$55t = 22 \quad /:55$$

$$t = \frac{22}{55} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$R[0{,}8;\ -4;\ 3{,}8]$$

… vskutku: v rovnici roviny C chybí z, tedy C je rovnoběžná s osou z, tedy C je kolmá k rovině určené osami x a y (půdorysna).

Připomeňte si konstrukční a analytické řešení úlohy na s. 10.



. . . řešení pro obecně postavenou rovinu $\mathcal{C}$ vzhledem k pomocným průmětnám (opět čteme zdola: nejprve R_1, potom R_2).

Průnik přímky a roviny — cvičení (A2)

b) analyticky

• přímka p určena body A, B $\quad A[0;-2,5;2] \quad \overrightarrow{AB}(1;2,5;-0,5)$

$B[1;0;1,5]$

$$p = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix};\ t \in R \right\}$$

• rovina ϱ určena K, L, M $\quad K[-4;0;0] \quad \overrightarrow{KL}(5;3;5)$

$L[1;3;5] \quad \overrightarrow{LM}(-2;-1;-2)$

$M[-1;2;3]$

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 5 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6\vec{e_1} - 5\vec{e_3} - 10\vec{e_2}) - (-6\vec{e_3} - 10\vec{e_2} - 5\vec{e_1}) = -\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$$

$(-1;0;1)$

$\varrho: -x + 0y + z + d = 0$

$K \in \varrho: \ 4 + 0 + 0 + d = 0$

$d = -4$

$\varrho: -x + z - 4 = 0$

$x - z + 4 = 0$

$\boxed{R \in p \cap \varrho}$ $\quad t - 2 + 0,5t + 4 = 0$

$1,5t = -2$

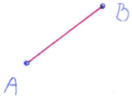
$t = -1,\overline{3}$

$\underline{\underline{R[-1,3;-5,45;2,65]}}$

… při analytickém řešení to vyjde skoro nastejno — jedna lineární rovnice a jedna neznámá (zde navíc nejprve hledáme rovnici roviny určené třemi body)

Připomeňte si základní měřičské úlohy. . .

- vzdálenost dvou bodů - velikost úsečky $|AB|$

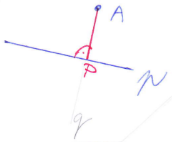


Př. $A[-2; 1]$ $B[1; 2]$

$\overrightarrow{AB}(3; 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

- vzdálenost bodu od přímky – velikost úsečky $|AP|$



Př. $p\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}\right\}$, $A[3;2]$

$q\perp p:\ \vec{s_p}(-1;3)\perp(3;1)=\vec{n_p}$ $\quad \vec{n_p}=\vec{s_q}$

$q:\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}\right\}$

$P\in p\cap q:$

$$\begin{aligned}1-t&=3+3s \quad /\cdot 3\\ 2+3t&=2+s\\ \hline 3-3t&=9+9s\\ 2+3t&=2+s\\ \hline 5&=11+10s\\ -6&=10s \quad /:10\\ -\tfrac{3}{5}&=s\end{aligned}$$

$P:\ x=3-\frac{3}{5}\cdot 3=\frac{15-9}{5}=\frac{6}{5}$

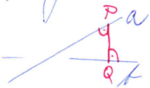
$y=2-\frac{3}{5}=\frac{10-3}{5}=\frac{7}{5}$

$P\left[\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right]$

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\left(\frac{6}{5}-3\right)^2+\left(\frac{7}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-9}{5}\right)^2+\left(\frac{-3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{81+9}{25}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$$

nebo vzorec: $|Ap|=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- **vzdálenost dvou mimoběžek** je rovna délce jejich nejkratší příčky (příčka kolmá k oběma mimoběžkám)



Př. $a = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\}$

$b = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \right\}$

vektor $\overrightarrow{QP}$ musí být kolmý k oběma mimoběžkám

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{QP} = \vec{b} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$ skalární součin

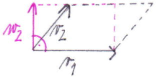
. . . tento nápad funguje obecně (pro lib. podprostory v lib. prostoru) a nikdy nezklame (soustava <u>lineárních</u> rovnic)

Objem rovnoběžnostěnu — cvičení (B2)

Připomeňte si pokračování příběhu na s. 19...

• rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.

$v_1, v_2, \ldots \in \vec{E}$ (eukl. prostor)



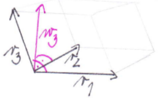
$V(v_1) = \|v_1\|$ velikost vektoru v_1 ⇝ velikost úsečky

$V(v_1, v_2) = \|v_1\| \cdot \|\text{výšky}\| = \|v_1\| \, \|w_2\|$

obsah

↳ kolmý průmět v_2 do $v_1^\perp$

• rovnoběžnostěny se stejnými základnami (tj. podstavami) a stejnými výškami mají stejný objem



$V(v_1, v_2, v_3) = V(v_1, v_2) \cdot \|\text{výšky}\| = V(v_1, v_2) \cdot \|w_3\| =$

objem

$= \|v_1\| \cdot \|w_2\| \cdot \|w_3\|$

... takto jsou předchozí postřehy a závěry vyjádřeny pomocí vektorů (vektory $\mathbf{w}_i$ lze určit pomocí Gramova–Schmidtova nakolmovacího procesu)

Věta: Pro lib. $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ platí:

$$\boxed{V(v_1, v_2, \dots, v_k) = \sqrt{\begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & \dots \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & v_k\cdot v_k \end{vmatrix}}}$$

tzv. Gramova matice / det

Př:

$$V(v_1,v_2,v_3)^2 = \begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & v_2\cdot v_3 \\ v_3\cdot v_1 & v_3\cdot v_2 & v_3\cdot v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 \\ w_2\cdot v_1 & w_2\cdot v_2 & w_2\cdot v_3 \\ w_3\cdot v_1 & w_3\cdot v_2 & w_3\cdot v_3 \end{vmatrix} =$$

ortogonalizační proces

$$= \begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot w_2 \overset{\nearrow}{0} & v_1\cdot w_3 \overset{\nearrow}{0} \\ w_2\cdot v_1 \overset{\nearrow}{0} & w_2\cdot w_2 & w_2\cdot w_3 \overset{\nearrow}{0} \\ w_3\cdot v_1 \overset{\nearrow}{0} & w_3\cdot w_2 \overset{\nearrow}{0} & w_3\cdot w_3 \end{vmatrix} = \|v_1\|^2\cdot\|w_2\|^2\cdot\|w_3\|^2 = G(v_1,v_2,v_3)$$

$w_2 \perp v_1$

$w_3 \perp v_1, v_2$

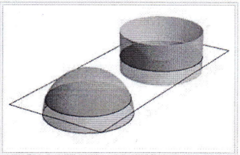
$$\Rightarrow V(v_1,v_2,v_3) = \sqrt{G(v_1,v_2,v_3)}$$

... náznak důkazu — odkazujeme na multilineárnost skalárního součinu a (správně chápaného) determinantu

Věta (Archimedova): Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.

C1. (1) Odvoďte předchozí větu přímo pomocí Cavalieriho principu.

(viz. česká wikipedie - animace) ☺



Cavalieriho princip použitý pro výpočet objemu koule

Cavalieriův princip lze použít například pro výpočet objemu koule elementárními prostředky, jak je znázorněno na animaci. Nejdříve ukážeme, že polokoule o poloměru R má stejný objem jako válec s podstavou o poloměru R a o výšce R, z něhož je vyříznut obrácený kužel tak, jak ukazuje vyobrazení. Podstavy i výšky obou těles se rovnají a rovnají se i obsahy řezů v kterékoli výšce v nad podstavou. U polokoule je řez kruhový, jehož poloměr je podle Pythagorovy věty $r = \sqrt{R^2 - v^2}$, a má tedy plochu $S_k = \pi r^2 = \pi(R^2 - v^2)$. Řez vyříznutého válce je mezikruží s plochou $S_v = \pi R^2 - \pi v^2 = \pi(R^2 - v^2)$, a to je stejné jako obsah řezu polokoule S_k. Platí tedy předpoklady Cavalieriho principu, a to znamená, že obě tělesa na obrázku mají stejný objem. Objem vyříznutého válce je rozdílem objemu válce a objemu kužele: $V_v = \pi R^3 - \frac{\pi}{3}R^3 = \frac{2\pi}{3}R^3$. Objem celé koule je tedy dvojnásobný: $V_{koule} = \frac{4\pi}{3}R^3$, což je správný vzorec pro objem koule.

Středové promítání analyticky — cvičení (F2)

Konfrontujte pečlivě vázané průměty několika konkrétních bodů a jejich analytická vyjádření (viz ilustrace na s. 51 a 53).

- f … středové promítání ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\varrho : \{x_1 = 0\}$
- obrazy několika bodů:

zastupující matice zobr. f · homog. souř. bodů = homog. souř. obrazů

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}}^{\text{zastupující matice zobr. } f} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & U_\infty & A_1 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ -6 & -4 & 2 & -6 & \dots \\ -4 & -3 & 1 & -4 & \dots \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A' & B' & U' & A_1' & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 10 & -2 & 12 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -24 & -18 & 6 & -24 & \dots \\ 42 & 32 & -10 & 30 & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1{,}8 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad \dots$$

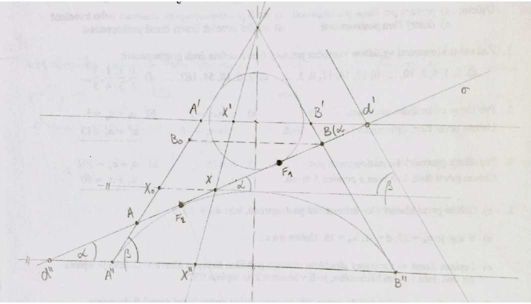
U_∞ … nevlastní bod přímky AB (určen směrem $\overrightarrow{AB}$)

Numerická výstřednost — cvičení (A5)

Dokažte, že numerická výstřednost kuželosečky je rovna

$$|XF| : |Xd| = \sin\alpha : \sin\beta,$$

kde $\alpha =$ odchylka podstavy kužele od roviny řezu a $\beta =$ odchylka podstavy kužele od jeho tvořicích přímek.



$$\frac{|XF_1|}{|Xd'|} = \frac{|XX'|}{|Xd'|} = \frac{|X_0A'|}{|Xd'|} = \frac{|AB_0|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \varepsilon = \text{konst.} \qquad \varepsilon < 1$$

$$\frac{|Xd'|}{\sin\beta} = \frac{|XX'|}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{|XX'|}{|Xd'|} = \frac{|XF_1|}{|Xd'|}$$

… zde odkazujeme na Dandelinovu–Queteletovu větu, vhodné planimetrické interpretace původně prostorových vztahů a (hlavně) na sinovou větu

Rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0,$$

vyjádřete celkovou transformaci souřadnic, ...

$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=1,\ E=\frac{1}{2},\ F=0$

$\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{A-C}{2B} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$

otočení o 45°.

<u>Dosadím do transformačních rovnic:</u>

$$x = x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$$

$$y = x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

. . . hledáme <u>shodnou</u> transformaci souřadnic, která nás zbaví bilineárního členu (otočení o správný úhel tak, aby osa kuželosečky byla rovnoběžná se souřadnou osou).

Vysvětlení uvedeného kouzla, jak přijít na ten správný úhel lze najít např. v [S, str. 174], viz též [JS, str. 80].

Kanonické tvary — cvičení (D)

Dosadím do rovnice:

$$\frac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)+\sqrt{2}(x'-y')+\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=0$$

$$\frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2+x'^2-x'y'+x'y'-y'^2+\frac{1}{2}x'^2+x'y'+\frac{1}{2}y'^2+\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'=0$$

$$2x'^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'=0$$

... mezivýsledek bez bilineárního členu

Kanonické tvary — cvičení (D)

Doplněním na čtverec dostaneme:

$$2\left(x'^2+\frac{3\sqrt{2}}{4}x'+\frac{18}{64}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}y'-\frac{18}{32}=0$$

$$2\left(x'+\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}y'-\frac{9}{16}=0 \qquad x''=x'+\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$2\left(x'+\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y'+\frac{9\sqrt{2}}{16}\right)=0 \qquad y''=y'+\frac{9\sqrt{2}}{16}$$

$$2x''^2-\frac{\sqrt{2}}{2}y''=0$$

$$\underline{\underline{x''^2-\frac{\sqrt{2}}{4}y''=0}}$$

Kuželosečkou je parabola, jejíž parametr $p=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

. . . kanonický tvar.

Protože byly všechny transformace <u>shodné</u>, mají všechny koeficienty správný význam!

Transformační rovnice mezi původní kartézskou soustavou souřadnic a novou „dvoučárkovanou" soustavou souřadnic

$$x'' = x' + \frac{3\sqrt{2}}{8} \Rightarrow x' = x'' - \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$y'' = y' + \frac{9\sqrt{2}}{16} \Rightarrow y' = y'' - \frac{9\sqrt{2}}{16}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'' - \frac{3\sqrt{2}}{8} - y'' + \frac{9\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} x'' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'' + \frac{3}{16}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'' - \frac{3\sqrt{2}}{8} + y'' - \frac{9\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} x'' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'' - \frac{15}{16}$$

... výsledná transformace

$\Rightarrow$ Vrchol paraboly: $\underline{\underline{V\left[\frac{3}{16}; -\frac{15}{16}\right]}}$

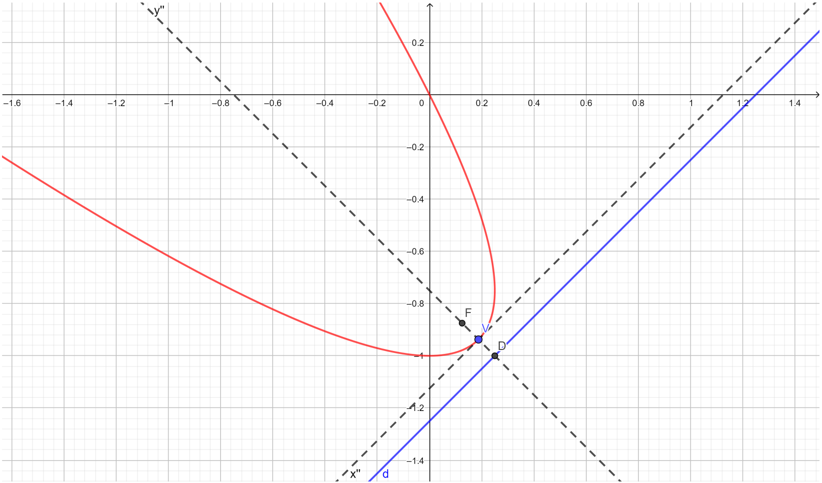
$\Rightarrow$ Rovnice osy paraboly y'': $\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{3\sqrt{2}}{8} = 0}}$

$\Rightarrow$ Rovnice řídící přímky d: $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{9\sqrt{2}}{16} - \frac{p}{2} = 0$

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{5\sqrt{2}}{8} = 0}}$$

… vrchol paraboly má ve „dvoučárkované“ soustavě souřadnice $[0, 0]$; osa paraboly má směr souřadné osy y'' a prochází vrcholem; řídící přímku by to chtělo ještě dovysvětlit…

Kanonické tvary — cvičení (D)



Přímo — cvičení (C1) (D1)

Podle předchozích návodů rozpoznejte kuželosečku určenou rovnicí

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0,$$

určete nevlastní body, střed, hlavní směry, . . .

- $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det F = -1/4$, $\det \underline{F} = 0$ . . . PARABOLA

- nevlastní bod = střed = jeden z vrcholů = směr osy . . .

  $x_0 = 0$: $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 0 \rightsquigarrow N_1 = (1 : -1 : 0)$

  resp. pól nevlastní přímky (střed):

  $(\ast \;\ast\; 0) \cdot \big(\; F \; \big) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$

- hlavní směry = char. vektory $\underline{F}$:

  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)$

  $\lambda_1 = 0$ . . . . $v_1 = (1, -1)$ . . . souhlasí s N_1

  $\lambda_2 = 2$ . . . $v_2 = (1, 1)$ . . . vskutku $\perp$

Přímo — cvičení (C1) (D1)

Hlavní směry $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$, resp. odpovídající nevlastní body N_1 a N_2 jsou polárně sdružené vzhledem k parabole. Přitom N_1 odpovídá směru osy, proto:

- osa = polára nevl. bodu $N_2 = (1:1:0)$:

$$(x \;\; y \;\; x_0) \cdot \underbrace{\left(F \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}} = 2x + 2y + \frac{3}{2} x_0 = 0 \qquad (\text{af. souř. } x_0 = 1)$$

t.j. $x + y + \frac{3}{4} = 0$

resp. $y = -x - \frac{3}{4}$

- (vlastní) vrchol = parabola $\cap$ osa :

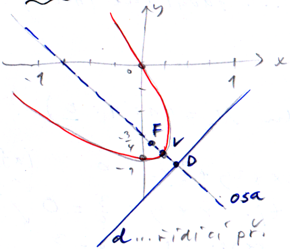
$$x^2 + 2x\left(-x - \frac{3}{4}\right) + \left(-x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2x + \left(-x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\ldots + x - \frac{3}{16} = 0 \rightsquigarrow V = \left[\frac{3}{16}, -\frac{15}{16}\right]$$

(v homogenních souřadnicích bychom dostali jako druhé řešení nevlastní bod N_1)

Přímo — cvičení (C1) (D1)

Se zbylými detaily je to zpravidla trochu ošidné (viz s. 60 v souboru IV):



• parametr ... $p^2 = \left|\dfrac{\det F}{\lambda_2^{3}}\right| = \dfrac{1/4}{8} \rightsquigarrow p = \dfrac{1}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

• ohnisko $F = V - \dfrac{p}{2\|v_1\|}\cdot \overset{(1,-1)}{v_1} = V - \dfrac{1}{16} v_1 = \left[\tfrac{1}{8}, -\tfrac{7}{8}\right]$

• D ∈ řídící př.:

$D = V + \dfrac{1}{16} v_1 = \left[\tfrac{1}{4}, -1\right]$

• řídící přímka

„$d = D + \text{směr } \overset{(1,1)}{v_2}$" ... $x - y - \frac{5}{4} = 0$

$\Updownarrow$

resp. polára ohniska F:

$$(x\ y\ x_0)\cdot\underbrace{\big(\ F\ \big)\cdot\begin{pmatrix}1/8\\-7/8\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1/4\\-1/4\\-5/16\end{pmatrix}} = \frac{1}{4}\left(x - y - \frac{5}{4}x_0\right) = 0$$

✓

Literatura

[JS] J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, MU, 1996, http://www.math.muni.cz/~janyska/kuakv_2017.pdf

[S] M. Sekanina a kol., *Geometrie I a II*, SPN, 1988