**BUDOVÁNÍ POJMŮ V MATEMATICE**

**Pojmy a jejich vlastnosti**

Pojem je obecná představa (osob, předmětů, jevů, dějů), jejíž obsah je určen souhrnem podstatných vlastností.

**Matematický pojem** budeme chápat jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží v myšlení podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.

**Každý pojem má určitý obsah a rozsah.**

**Obsah pojmu** – souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické.

**Rozsah pojmu** – množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem.

Obsah je určen pomocí **definic**, rozsah určujeme pomocí **klasifikace**.

**Příklad: rovnoběžník**

Obsah pojmu: je to čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné.

Rozsah pojmu: tvoří všechny rovnoběžníky (čtverec, kosočtverec, obdélník, kosodélník).

Jestliže rozšíříme obsah tohoto pojmu, např. připojíme shodnost sousedních stran, do rozsahu pojmu patří jen čtverce a kosočtverce.

Jestliže se rozšíří obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak.

**Třídění pojmů**

Podle charakteru můžeme rozlišovat pojmy:

**Individuální pojem** je tvořen pouze jedním objektem, např. prázdná množina, euklidovský prostor.

**Obecný pojem** obsahuje více než jeden objekt, např. trojúhelník, kružnice, krychle aj.

Dále rozlišujeme pojmy konkrétní a abstraktní.

**Konkrétní pojmy** odrážejí konkrétní objekty, např. krychle, kvádr, koule.

**Abstraktní pojmy** vznikají jako objekty myšlení, např. přímka, množina, číslo aj.

**Klasifikace pojmů**

Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:

* Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
* Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
* Třídění musí být provedeno tak, aby jednotliví třídy byly disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

*Úkoly:*

Proveďte klasifikaci trojúhelníků podle velikosti jejich stran.

Proveďte klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v prostoru.

**Zavádění pojmů v matematice**

Logická (axiomatická) výstavba matematiky je založena na čtyřech kategoriích logických pojmů, kterými jsou

**axiomy – matematické definice – matematické věty – důkazy matematických vět**.

**AXIOMY**

jsou věty, jejichž kritériem pravdivosti je praxe (tvrzení, které se předem považuje za platné). Nedokazují se, protože tvoří základ dané disciplíny a není čím jejich pravdivost dokázat.

Axiomatická soustava musí být:

**úplná** (aby ze soustavy bylo možné odvodit a dokázat všechny další potřebné věty dané disciplíny),

**bezesporná** (na základě axiomů dané soustavy nelze dokázat větu a současně její negaci),

**nezávislost axiómů** (žádný z axiómů dané soustavy není možné z ostatních axiómů odvodit).

**MATEMATICKÁ DEFINICE**

je gramatická věta, která přesně vymezujeme význam matematického pojmu. Další, odvozené pojmy, se zavádí pomocí definic.

**Definice nominální** - zavádí se název definovaného pojmu

Např. Čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné, se nazývá rovnoběžník.

**Definice konstruktivní** – zavádí se způsob konstrukce nového pojmu

Např. Je dán bod *S* a nezáporné reálné číslo *r*. Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od bodu *S* vzdálenost *r*.

Je pochopitelné, že některé pojmy lze definovat různými způsoby.

Např. pojem trojúhelník můžeme definovat takto:

**D 1.** Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je průnik (společná část) polorovin ABC, ACB, BCA.

**D 2.** Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je množina všech bodů X v rovině, které náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží úsečce BC.

**D 3.** Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je uzavřená lomená čára ABC sjednocená se svojí vnitřní oblastí.

**Chybné definice**

1. **Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné a shodné.**
2. **Kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost.**
3. **Čtverec je pravoúhlý čtyřúhelník, jehož každá strana má délku 4 cm.**
4. **Číslo je dělitelné dvěma, je-li sudé. Sudé číslo je číslo, které je dělitelné dvěma.**
5. **Dva geometrické útvary jsou podobné, když se podobají.**

**Klasifikace chybných definic**

1. **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
2. **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je obsažnější, než je množina objektů, které přísluší definici přesné.
3. **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je užší, než množina objektů příslušejících definici přesné.
4. **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
5. **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

**MATEMATICKÁ VĚTA**

uvádí vlastnosti pojmů. Pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem.

*Příklady*

Jestliže je přirozené číslo *n* dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Jestliže v trojúhelníku platí *a2 + b2 = c2,* pak tento trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami *a, b* a přeponou *c*.

Matematické věty mají zpravidla tvar implikace výrokových forem o jedné nebo více proměnných. Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky:

(*xD)*[*A(x)B(x)*],

kde *D* je definiční obor výrokových forem, *A(x)* se nazývá předpoklad, *B(x)* tvrzení.

**Druhy vět:** a) základní (*xD)*[*A(x)B(x)*]

 b) obrácená (*xD)*[*B(x)A(x)*] (zaměníme předpoklad a tvrzení)

 c) obměněná (*xD)*[*B´(x)A´(x)*]

**DŮKAZY MATEMATICKÝCH VĚT**

V matematice požíváme základní typy důkazů: důkaz přímý,

 důkaz nepřímý,

 důkaz sporem,

 důkaz matematickou indukcí.

Tyto důkazy uvádíme zejména pro práci učitele, mají největší význam.

* **Důkaz přímý**

Přímý důkaz věty *A(x)  B(x)* spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.

*A(x)* platí

*A(x) A1(x), A1(x) A2(x) …. An(x) B(x)*

*Příklad:*

Dokažte, že pro $∀a\in R$platí:

$$3∙2^{a+3}-2∙2^{a+2}+2^{a+4}=2^{a+5}$$

* **Důkaz nepřímý**

Nepřímý důkaz věty *A(x)  B(x)* spočívá v tom, že nejprve vytvoříme obměněnou implikaci *B´(x)A´(x)* a tu pak dokážeme důkazem přímým.

*Příklad:*

Dokažte, že pro každé $n\in N$ platí: $5/n^{2}=>5/n$.

* **Důkaz sporem**

Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta *A(x)  B(x)* neplatí, že platí její negace (*A(x)  B(x)*)´.

*Příklad:*

Dokažte, že pro každé platí: .

* **Důkaz matematickou indukcí**

Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel. Princip důkazu spočívá ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že věta platí pro první prvek.

2. Předpokládáme, že věta platí pro nějaké *k,* a dokážeme, že věta platí pro *k + 1.*

*Příklad:*

Dokažte, že pro každé  platí 1 + 3 + … + (2*n* – 1) = *n2.*