BUDOVÁNÍ POJMŮ V MATEMATICE

Pojmy a jejich vlastnosti

Pojem je obecná představa (osob, předmětů, jevů, dějů), jejíž obsah je určen souhrnem podstatných vlastností.

Matematický pojem budeme chápat jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží v myšlení podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.

Každý pojem má určitý obsah a rozsah.
Obsah pojmu – souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické.
Rozsah pojmu – množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem.
Obsah je určen pomocí **definic**, rozsah určujeme pomocí **klasifikace**.

Příklad: rovnoběžník
Obsah pojmu: je to čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné.
Rozsah pojmu: tvoří všechny rovnoběžníky (čtverec, kosočtverec, obdélník, kosodélník).
Jestliže rozšíříme obsah tohoto pojmu, např. připojíme shodnost sousedních stran, do rozsahu pojmu patří jen čtverce a kosočtverce.
Jestliže se rozšíří obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak.

Třídění pojmů
Podle charakteru můžeme rozlišovat pojmy:
Individuální pojem je tvořen pouze jedním objektem, např. prázdná množina, euklidovský prostor.
Obecný pojem obsahuje více než jeden objekt, např. trojúhelník, kružnice, krychle aj.
Dále rozlišujeme pojmy konkrétní a abstraktní.
Konkrétní pojmy odrážejí konkrétní objekty, např. krychle, kvádr, koule.
Abstraktní pojmy vznikají jako objekty myšlení, např. přímka, množina, číslo aj.

Klasifikace pojmů
Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:
- Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
- Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
- Třídění musí být provedeno tak, aby jednotliví třídy byly disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

Úkoly:

Proveďte klasifikaci trojúhelníků podle velikosti jejich stran.

Proveďte klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v prostoru.

Zavádění pojmů v matematice

Logická (axiomatická) výstavba matematiky je založena na čtyřech kategoriích logických pojmů, kterými jsou

axiomy – matematické definice – matematické věty – důkazy matematických vět.

AXIOMY

jsou věty, jejichž kritériem pravdivosti je praxe (tvrzení, které se předem považuje za platné). Nedokazují se, protože tvoří základ dané disciplíny a není čím jejich pravdivost dokázat.

Axiomatická soustava musí být:
úplná (aby ze soustavy bylo možné odvodit a dokázat všechny další potřebné věty dané disciplíny),
bezesporná (na základě axiomů dané soustavy nelze dokázat větu a současně její negaci),
nezávislost axiómů (žádný z axiómů dané soustavy není možné z ostatních axiómů odvodit).

MATEMATICKÁ DEFINICE

je gramatická věta, která přesně vymezujeme význam matematického pojmu. Další, odvozené pojmy, se zavádí pomocí definic.

Definice nominální - zavádí se název definovaného pojmu
Např. Čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné, se nazývá rovnoběžník.
Definice konstruktivní – zavádí se způsob konstrukce nového pojmu
Např. Je dán bod S a nezáporné reálné číslo r. Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost r.

Je pochopitelné, že některé pojmy lze definovat různými způsoby.
Např. pojem trojúhelník můžeme definovat takto:
D 1. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je průnik (společná část) polorovin ABC, ACB, BCA.
D 2. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je množina všech bodů X v rovině, které náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží úsečce BC.
D 3. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je uzavřená lomená čára ABC sjednocená se svojí vnitřní oblastí.

Chybné definice

1. **Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné a shodné.**
2. **Kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost.**
3. **Čtverec je pravoúhlý čtyřúhelník, jehož každá strana má délku 4 cm.**
4. **Číslo je dělitelné dvěma, je-li sudé. Sudé číslo je číslo, které je dělitelné dvěma.**
5. **Dva geometrické útvary jsou podobné, když se podobají.**

Klasifikace chybných definic

1. **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
2. **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je obsažnější, než je množina objektů, které přísluší definici přesné.
3. **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu je užší, než množina objektů příslušejících definici přesné.
4. **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
5. **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

MATEMATICKÁ VĚTA

uvádí vlastnosti pojmů. Pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem.

Příklady

Jestliže je přirozené číslo n dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi.
Jestliže v trojúhelníku platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami a, b a přeponou c.

Matematické věty mají zpravidla tvar implikace výrokových forem o jedné nebo více proměnných. Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky:

$$(\forall x \in D)[A(x) \Rightarrow B(x)],$$

kde D je definiční obor výrokových forem, $A(x)$ se nazývá předpoklad, $B(x)$ tvrzení.

Druhy vět: a) základní $(\forall x \in D)[A(x) \Rightarrow B(x)]$
b) obrácená $(\forall x \in D)[B(x) \Rightarrow A(x)]$ (zaměníme předpoklad a tvrzení)
c) obměněná $(\forall x \in D)[B'(x) \Rightarrow A'(x)]$

DŮKAZY MATEMATICKÝCH VĚT

V matematice požíváme základní typy důkazů: důkaz přímý,
důkaz nepřímý,
důkaz sporem,
důkaz matematickou indukcí.

Tyto důkazy uvádíme zejména pro práci učitele, mají největší význam.

- **Důkaz přímý**

Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.

$A(x)$ platí

$A(x) \Rightarrow A_1(x), \quad A_1(x) \Rightarrow A_2(x) \quad \ldots. \quad A_n(x) \Rightarrow B(x)$

Příklad:
Dokažte, že pro $\forall a \in \boldsymbol{R}$ platí:

$$3 \cdot 2^{a+3} - 2 \cdot 2^{a+2} + 2^{a+4} = 2^{a+5}$$

- **Důkaz nepřímý**

Nepřímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že nejprve vytvoříme obměněnou implikaci $B'(x) \Rightarrow A'(x)$ a tu pak dokážeme důkazem přímým.

Příklad:
Dokažte, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $5/n^2 => 5/n$.

- **Důkaz sporem**

Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$.

Příklad:
Dokažte, že pro každé $x, y \in R^+$ platí: $\frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} \geq 1 + \frac{y}{x}$.

- **Důkaz matematickou indukcí**

Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel. Princip důkazu spočívá ve dvou krocích:

1. Dokážeme, že věta platí pro první prvek.
2. Předpokládáme, že věta platí pro nějaké k, a dokážeme, že věta platí pro $k + 1$.

Příklad:

Dokažte, že pro každé $n \in N$ platí $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.