Úlohy ke zkoušce DIDAKTIKA MATEMATIKY 1

1. Individuální přístup k žákům, zájmová činnost v matematice.

Vyřešte úlohy z matematické olympiády. Zamyslete se nad tím, jak by je řešili žáci příslušných ročníků (příp. uveďte různé metody řešení):

1. Matematická olympiáda Z6 (67. ročník)

Z6–I–5

V plechovce byly červené a zelené bonbóny. Čeněk snědl $\frac{2}{5}$ všech červených bonbónů a Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ všech zelených bonbónů. Teď tvoří červené bonbóny $\frac{3}{8}$ všech bonbónů v plechovce.

Kolik nejméně bonbónů mohlo být původně v plechovce? (*L. Růžičková*)

2. Matematická olympiáda Z7 (67. ročník)

Z7–I–3

Zoologická zahrada nabízela školním skupinám výhodné vstupné: každý pátý žák dostává vstupenku zdarma. Pan učitel 6.A spočítal, že pokud koupí vstupné dětem ze své třídy, ušetří za čtyři vstupenky a zaplatí 1 995 Kč. Paní učitelka 6.B mu navrhla, ať koupí vstupenky dětem obou tříd naráz, a tak budou platit 4 410 Kč.

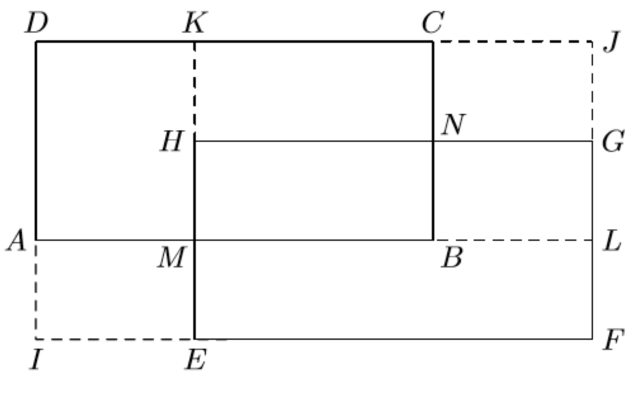
Kolik dětí z 6.A a kolik dětí z 6.B šlo do zoo? (Cena vstupenky v Kč je celočíselná.) (*L. Šimůnek*)

3. Matematická olympiáda Z8 (67. ročník)

Z8–I–5

Shodné obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou umístěny tak, že jejich shodné strany jsou rovnoběžné. Body I, J, K, L, M a N jsou průsečíky prodloužených stran jako na obrázku. Obsah obdélníku $BNHM$ je $12\,\text{cm}^2$, obsah obdélníku $MBCK$ je $63\,\text{cm}^2$ a obsah obdélníku $MLGH$ je $28\,\text{cm}^2$.

Určete obsah obdélníku $IFJD$. (*E. Semerádová*)



4. Matematická olympiáda Z9 (67. ročník)

Z9–I–4

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 se chystala na cestu vlakem se třemi vagóny. Chtěla se rozsadit tak, aby v každém vagóně seděla tři čísla a největší z každé trojice bylo rovno součtu zbylých dvou. Průvodčí tvrdil, že to není problém, a snažil se číslům pomoct. Naopak výpravčí tvrdil, že to není možné.

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. (*E. Novotná*)

2. Vytváření představ a pojmů v matematice.

5. Dokažte, že číslo $2^1+2^2+2^3+...+2^{100}$ je dělitelné třemi.

6. Dokažte, že pro $\forall n \in N$ platí $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

7. Dokažte, že $\sqrt{7}$ není racionální číslo.

8. Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný číslem 7.

Zamyslete se, jak by mohli věty „dokazovat“ žáci na základní škole.

3. Základní poznatky o výrocích a množinách na střední škole.

9. Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující složené výroky:

a) Číslo π lze napsat desetinným číslem 3,144159 nebo zlomkem $\frac{22}{7}$.

b) Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvanácti.

10. Jsou dány množiny:

$A=\{x\in R; |x-1|\le 4\}$, $B=\{x\in N; -5\le x<6\}$, $C=\{-5;-3;-1;2;4;6\}$.

Určete: $A\cup C; B\cap C; B'_C; A-B$.

11. Při průzkumu životní úrovně bylo zjištěno, že ze 40 rodin v jednom domě má 40 % auto i chatu. Přitom auto vlastní o 16 rodin více než chatu a není rodina, která by neměla chatu nebo auto.

a) Vypočtěte, kolik rodin z domu má auto.

b) Kolik procent rodin z domu vlastní pouze auto?

c) Určete pravděpodobnost, že namátkou vybraná rodina z domu bude vlastnit jen chatu.

12. Rozhodněte, zda uvedená výroková formule je tautologie: $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

4. Číselné obory. Algebraické výrazy.

13. Vypočítejte $(\sqrt{3}-i)^8$.

14. Vypočítejte: $\dfrac{5^{-5}\cdot 0{,}1^{-4}+\left(\dfrac{1}{7}\right)^{0}-5^{-1}}{(-2)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}$

15. Zjednodušte algebraický výraz:

$$\left(\frac{x}{2x-y}+\frac{x}{2x+y}-\frac{y^2}{4x^2-y^2}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}+\frac{2x}{y}\right)$$

16. Dokažte: Jestliže $xyz=1$, pak $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+xz}=1$

5. Elementární teorie čísel, dělitelnost v oboru celých čísel.

17. Uveďte různé metody řešení této úlohy: Určete společného dělitele čísel 252 a 132.

18. Věk kapitána vynásobený šířkou lodi, počtem jeho dcer a počtem synů je 5406. Určete, kolik je kapitánovi roků, kolik má dětí a jak široká je jeho loď.

19. Zahradník má 72 bílých a 90 červených růží. Jaký největší počet kytic může svázat, má-li být v každé kytici stejný počet bílých růží a stejný počet červených růží? Kolik bude v kytici bílých a kolik červených růží? Růže musí použít všechny.

20. Podnikatel chtěl objednat výrobu kartónových krabic na balení krabiček čaje o rozměrech 13 cm, 7 cm, 5 cm. Jaké budou rozměry krabice, jestliže v ní má být umístěno minimálně 60 krabiček čaje. Bylo by reálné, aby krabice měla tvar krychle?

6. Základní pojmy finanční matematiky.

21. Vzorově vyřešte slovní úlohu, nezapomeňte na vhodné grafické znázornění. Zamyslete se, kde by mohl žák základní školy chybovat. Cena zboží byla zvýšena o 50%, během měsíce však došlo ke snížení o 20% a zboží se prodávalo za 480 Kč. Jaká byla původní cena zboží?

22. Vzorově vyřešte slovní úlohu, nezapomeňte na vhodné grafické znázornění. Čerstvé houby obsahují 90% vody, sušené houby obsahují 12% vody. Vypočítejte, kolik kilogramů čerstvých hub musíme nasbírat, abychom dostali 2 kg sušených hub.

23. Jakou částku musí splatit stavebník, který si vzal 12. února úvěr ve výši 280 000 Kč při 14 % úrokové míře a chce je splatit v den svých narozenin 9. 11. téhož roku?

24. Vkladatel si uložil částku 200000 Kč na termínovaný vklad na 18 měsíců. Vypočítejte, jakou částku bude mít v peněžním ústavu, jestliže nebude vybírat úroky ani vklad. Roční úrok je 0,8 %, daň z úroků je 15 %. Úrokovací období je čtvrtletní.

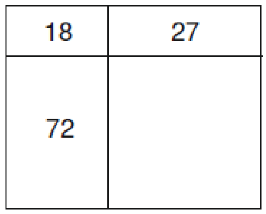
7. Matematická úloha a její řešení.

Slovní úlohy vyřešte vzorově aritmeticky a algebraicky:

25. Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?

26. Jirka a Pavel sbírají známky. Kdyby dal Jirka Pavlovi 8 známek, měli by oba stejně. Kdyby dal Pavel Jirkovi 8 známek, měl by Jirka dvakrát více než Pavel. Kolik má každý známek?

27. Obdélník na obrázku je rozdělen na tři obdélníky a čtverec. Určete obsah čtverce, jsou-li známy obsahy tří obdélníků (v centimetrech čtverečních).



28. Ze dvou přístavů vypluly současně stejným směrem dva parníky. První jel rychlostí 20 km za hodinu, druhý rychlostí 26 km za hodinu. Za 4 hodiny dohonil druhý parník první. Jaká je vzdálenost mezi přístavy?

<u>8. Rovnice a nerovnice ve školské matematice. Lineární rovnice a nerovnice. Rovnice a nerovnice s neznámou ve jmenovateli. Kvadratické rovnice a nerovnice.</u>

29. Vzorově vyřešte následující lineární rovnici (včetně zkoušky) a pojmenujte všechny ekvivalentní úpravy, které byly během řešení použity:

$$\frac{x+2}{4} - 2 = \frac{4x-1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{x+4}{12}$$

30. Řešte algebraicky a graficky rovnici v **R**: $2|x-1| - 3|2-x| = |x|$.

31. Pomocí doplnění kvadratického trojčlenu na úplný čtverec řešte v oboru **R** kvadratickou rovnici: $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

32. Řešte rovnici s neznámou ve jmenovateli:

$$\frac{1}{3(x+2)} - \frac{1}{x-4} = \frac{x-10}{(x+2)(x-4)}$$

a) pouze ekvivalentními úpravami,

b) ekvivalentními i důsledkovými úpravami.

9. Rovnice s neznámou v odmocněnci. Rovnice exponenciální a logaritmické. Goniometrické rovnice.

33. Řešte v **R** rovnici: $\sqrt{x+\sqrt{x+4}} = 2\sqrt{x-\sqrt{x+4}}$

34. Řešte v **R** rovnici: $\frac{3\cdot 8^{4-x}\cdot 6^{x-7}}{2^{-x}\cdot 9^{x-2}} = \frac{1}{3^{x+2}}$

35. Řešte v **R** rovnici: $\frac{1}{1+logx} + \frac{5}{3-logx} = 3$

36. Řešte rovnici $\frac{\sin x}{1+cosx} = 2 - cotgx$ pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

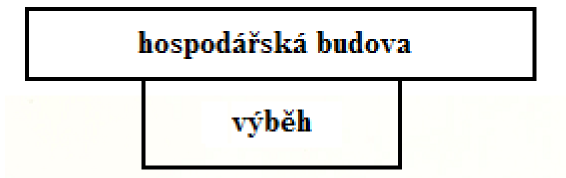
10. Elementární funkce v učivu matematiky základní a střední školy. Lineární funkce. Kvadratická funkce. Funkce absolutní hodnota. Lineární lomená funkce. Mocninné funkce.

37. Vzorově vyřešte úlohu: Letadlo mělo při startu v nádrži 3 000 litrů paliva. Po 400 km letu se spotřebovala jedna třetina zásoby paliva. Zapište rovnici, která vyjadřuje závislost množství paliva na počtu uletěných kilometrů. Narýsujte graf této funkce a určete, na kolik km letu zásoba paliva vystačí.

38. Vyjádřete, jak závisí obvod pravidelného šestiúhelníku na poloměru kružnice
a) šestiúhelníku opsané
b) šestiúhelníku vepsané.

39. Zemědělec chce vybudovat pro drůbež výběh pravoúhlého tvaru, přitom jedna strana bude částí stěny hospodářské budovy (obr. 1). K dispozici má 18 metrů pletiva. Máte určit rozměry výběhu, pro které by jeho obsah byl co největší.

Obrázek 1



40. Načrtněte graf funkce: $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Určete definiční obor, obor hodnot a vlastnosti funkce.

11. Funkce druhá odmocnina, exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce.

41. Určete všechny hodnoty reálného parametru q tak, aby daná funkce byla rostoucí:

$$y = \left(\frac{q+3}{q-1}\right)^x$$

42. Načrtněte graf funkce: $y = \log_2(x+4) - 1$. Určete definiční obor, obor hodnot a vlastnosti funkce.

43. Sestroj úhel α, jestliže: a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, b) $tg\alpha = \frac{3}{4}$.

44. Víme, že sin 98° je přibližně 0,99. Kolik je sin 82°?

Literatura

Běloun, F, a kol. (2010). *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* Praha: Prometheus.
Blažková, R. *Rozvíjení finanční gramotnosti na 2. stupni ZŠ*. Studijní text.
Blažková, R., & Budínová, I. (2017). *Matematika pro bystré a nadané žáky. Úlohy pro žáky 2. stupně ZŠ a víceletých gymnázií, jejich rodiče a učitele.* Brno: Edika.
Bušek, I. (1985). *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha: SPN.
Hejný, M., & Stehlíková, N. (2001). *Elementární matematika. Část II (algebraické výrazy, posloupnosti a řady, pravděpodobnost, stereometrie).* Praha: PdF UK.
Petáková, J. (1998*). Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké škole.* Praha: Prometheus.
Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně.* Plzeň: Fraus.

Edice: Matematika pro gymnázia.

Matematická olympiáda
http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/67-rocnik-17-18