Binární relace

Tematický okruh „Závislosti, vztahy a práce s daty“ **nově** zařazuje do kurikula primární školy základní seznámení s pojmy *binární relace, funkce a základy statistiky.*

V primárním vzdělávání se navazuje na zkušenosti dětí předškolního věku systematickým seznamováním s pojmy – **relacemi**:

- **rovnost a nerovnost** přirozených čísel v postupně se rozšiřujícím oboru numerace (viz přednáška o porovnávání čísel), včetně příslušné terminologie a symboliky: = „rovná se“, < „je menší než“, > „je větší než“,

- („přirozené“), lineární **uspořádání** přirozených čísel - **číselná řada** (viz přednáška o číselné ose). Již v číselném oboru do 5 se zavádí relace *x před y* (relace uspořádání) a k ní inverzní relace *y za x*, ale také relace *x hned před y, y hned za x.* Z kurzu aritmetiky ovšem víte, že poslední dvě uvedené relace nejsou relacemi uspořádání (nesplňují vlastnost tranzitivnosti).

Úloha „Doplň do rámečku číslo, které tam patří**:** □ **< 5**“ znamená, že hledáme (nejprve aspoň jedno číslo, potom všechna čísla menší než 5, tj. čísla, která jsou v číselné řadě *před* číslem 5.

Binární relace

- **dělitelnost** (ve smyslu relace reflexívní, antisymetrické a tranzitivní) není sice explicitně učivem primární školy, ale žáci se v souvislosti s operací násobení a propedeutikou přímé úměrnosti seznamují s *násobky* daného čísla (tabulky násobků dvou, tří,…). Například 12 je násobkem 4, číslo 4 je dělitelem 12. Přitom se seznamují se skutečností, že číslo 1 je dělitelem každého přirozeného čísla a každé přirozené číslo je násobkem čísla 1, číslo 0 je násobkem každého přirozeného čísla a každé přirozené číslo je dělitelem čísla 0.

Poznámka: Pozor na terminologické nedorozumění! Termín „dělitel" se používá v matematice primární školy k označení „čísla, kterým dělíme". Tak v **zápisu úlohy 12:7** (dělení se zbytkem) označujeme číslo 12 jako *dělence* a číslo 7 jako *dělitele*, ale přitom **neplatí, že 7 $|$12** (7 není dělitelem 12).

Binární relace v geometrii

- **shodnost** úseček a rovinných útvarů (trojúhelníků, čtverců,…). Opět připomeňme z kurzu geometrie, že relace shodnosti je relací ekvivalence (s vlastnostmi reflexivnosti, symetričnosti a tranzitivnosti). Z didaktického hlediska je třeba dát dítěti k dispozici prostředek, který mu umožní poznat, které útvary jsou (nejsou) shodné. Tímto prostředkem je shodné zobrazení - *dva útvary jsou shodné, když lze přemístěním jednoho dosáhnout toho, že se kryjí.* Např. úsečku nebo trojúhelník „přemístí" některým shodným zobrazením - např. je vhodně posune nebo otočí. Využíváme přitom přemístění pomocí proužku papíru, průsvitky, později kružítka. V souvislosti s určováním velikostí - měřením délek je třeba, aby si žák uvědomil, že úsečky či rovinné útvary navzájem *shodné* mají délky/velikosti, které se navzájem *rovnají:* $AB \approx CD \rightarrow |AB| = |CD|$. Nelze ovšem zaměňovat relaci shodnosti (rovinných útvarů) a relaci rovnosti (velikosti rovinných útvarů, tedy čísel),

- **různoběžnost, rovnoběžnost a kolmost** přímek. S uvedenými vztahy mezi přímkami (relacemi na množině přímek v rovině) se žáci setkávají na modelech ve svém okolí, rýsují různoběžné, rovnoběžné a kolmé přímky pomocí pravítka s ryskou, resp. pravítka a kružítka. Osa úsečky je kolmice, procházející středem úsečky, svírá s úsečkou pravé úhly.

-

Funkce

- **Připomeňme si**

Zobrazení v číselné množině, resp. libovolné množiny A do číselné množiny R, je reálná funkce (funkce jedné reálné proměnné).

Symbolicky zapíšeme

- ***y = f(x), x* D*(f),* nebo *x f(x), x* D*(f)***

Funkci obvykle ve školské matematice vyjadřujeme

analyticky (rovnicí), tabulkou, grafem a slovy (tj. v přirozeném jazyce).

Graficky vyjadřujeme funkci v **kartézském** souřadném systému (podle René Descartes, lat. Cartesius) - *pravoúhlá soustava souřadnic* s vodorovnou osou *x* a svislou osou *y.* Graf konstruujeme z jednotlivých bodů o **souřadnicích x, y,** tj. uspořádaných dvojic [x, ƒ(x)].

Z matematiky základní a střední školy znáte různé druhy/typy funkcí. Připomeňme si přímou a nepřímou úměrnost, lineární a kvadratickou funkci, funkci exponenciální a logaritmickou, goniometrické funkce. V matematice primární školy mají své místo **přímá úměrnost a lineární funkce, případně nepřímá úměrnost.**

Lineární funkce

Východiskem našeho didakticky zaměřeného výkladu učiníme pojem **lineární funkce**, kterou vyjádříme rovnicí: $\mathbf{y = k.x + q}$, kde x …(nezávisle) proměnná, y …hodnota funkce (závisle proměnná), $k \neq 0$, q…koeficienty, v prostředí primární školy přirozená čísla.

Již v 1. ročníku ZŠ je možné uvažovat případ, kdy k= 1 a rovnice nabývá tvaru $\mathbf{y = x + q}$**.** Vyjádříme-li funkci **tabulkou**, pak např. pro q=3 dostaneme tabulku, známou z didaktických materiálů ve tvaru

a	0	1	2	3	4	….
a + 3	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**….**

Přímá úměrnost

Jiný „zvláštní“ případ lineární funkce nastane, když $k \neq 1$, $q = 0$. Rovnice pak nabývá tvaru **y = k.x** a funkci označujeme jako **přímou úměrnost.** Tabulka přímé úměrnosti např. pro $k = 3$

a	0	1	2	3	4	5	…
3 . a	0	3	6	9	12	15	…

je vlastně tabulkou **násobků čísla 3**, kterou využíváme při nácviku základních spojů operace násobení - tzv. násobilky.

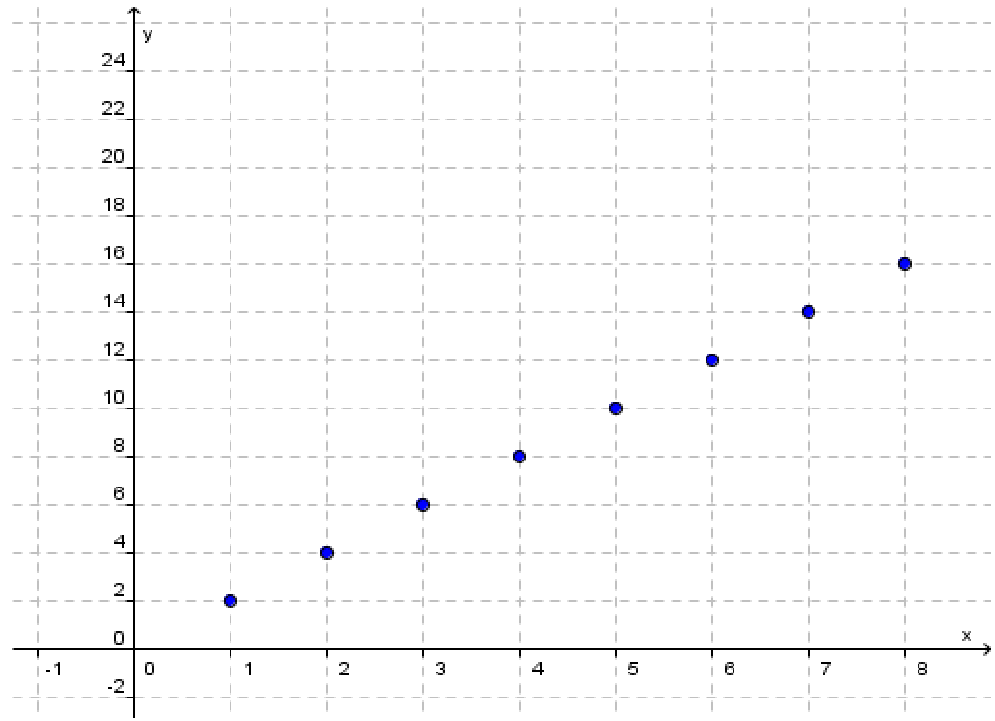
Přímou úměrnost obvykle vyjadřujeme **slovy: kolikrát více (méně) x, tolikrát více (méně) y.**

Přímá úměrnost

- **V jedné lavici sedí 2 žáci. Kolik žáků sedí ve 2, 3, 4,…lavicích?**

Graf přímé úměrnosti sestrojíme v pravoúhlém (kartézském) souřadném systému, do kterého vyneseme body o souřadnicích [a,2a], tj. [0,0]; [1,2]; [2,4]; [3,6]; [4,8]; …

Grafem přímé úměrnosti $y = 2x$ **je (v oboru přirozených čísel) množina bodů, kterými lze proložit přímku, procházející počátkem soustavy souřadnic,** tj. bodem o souřadnicích [0,0].



- K prezentaci přímé úměrnosti můžeme využít matematizace řady **reálných situací z finanční matematiky** (nákup a spotřeba zboží v závislosti na ceně, počet výrobků za dané časové období, …), které žáci znají z denní zkušenosti nebo mezipředmětových souvislostí z různých oborů (prvouka, přírodověda, později fyzika, chemie), např. $s = v \cdot t$, $U = I \cdot R$.

Příklady:

- Jedna čokoláda stojí 25 Kč, kolik zaplatíme za 2, 3, 4…. čokolády?
- Chodec ujde za hodinu 5 km, kolik ujde za 2, 3, 4,… hodiny?
- Kolem jednoho stolu stojí 4 židle, kolik židlí bude v restauraci u 2, 3, 4,… takových stolů?

Funkce v reálných situacích

K prezentaci přímé úměrnosti můžeme využít matematizace řady **reálných situací z finanční matematiky** (nákup a spotřeba zboží v závislosti na ceně, počet výrobků za dané časové období, …), které žáci znají z denní zkušenosti nebo mezipředmětových souvislostí z různých oborů (prvouka, přírodověda, později fyzika, chemie), např. $s = v \cdot t$, $U = I \cdot R$.

Příklady:

- Jedna čokoláda stojí 15 Kč, kolik zaplatíme za 2, 3, 4…. čokolády?
- Chodec ujde za hodinu 5 km, kolik ujde za 2, 3, 4,… hodiny?
- Kolem jednoho stolu stojí 4 židle, kolik židlí bude v restauraci u 2, 3, 4,… takových stolů?

Ve školské matematice řešíme také úlohy, jejichž matematickým modelem je **lineární funkce ve tvaru $y = kx + q$.** Například:

- *Růže stojí 35 Kč, za stuhu a vazbu dáme 20 Kč. Kolik zaplatíme za kytici, ve které budou 2, 3, 4, 5,… růží?*

  V této úloze je $k = 35$, $q = 20$, x udává měnící se počet růží, $\mathbf{y = 35x + 20}$.

Funkční myšlení – schopnost uvědomovat si **závislosti** mezi jevy reálného světa, chápat souvislosti probíhajících změn, kauzální podmíněnost, tyto změny matematicky vyjadřovat a matematizovat reálné situace.

Základní statistické pojmy

Připomeňme si některé pojmy ze statistiky:

- *statistické šetření* **-** sběr statistických údajů (lze je získat různými způsoby - pozorováním, měřením, dotazováním…)
- *statistické jednotky*, např. osoby, zvířata, věci, rostliny, instituce,… které se budou během statistického šetření získávat,
- *statistický soubor,* který je vymezen věcně (co se bude šetřením získávat), prostorově (na kterém místě, území se bude šetření provádět) a časově (v jakém časovém intervalu),
- *statistické znaky,* které se u statistických jednotek v daném šetření sledují. Ty mohou být buď kvantitativní (jestliže statistický znak nabývá číselných hodnot) nebo kvalitativní (hodnoty jsou vyjádřeny slovně).

Jaké znalosti ze statistiky potřebuje učitel ?

Práce s daty (propedeutika statistiky)

Uvažujme modelový případ.

Ve školní třídě 4. A psalo test 23 žáků (*n = 23*). Žáci této třídy tvoří *statistický soubor*. Výsledky testu shrnuje **frekvenční tabulka**:

Známka	1	2	3	4	5
Počet žáků	4	6	9	3	1

- ***Aritmetický*** *průměr vypočteme, dělíme-li součet hodnot jejich počtem n, tedy podle vzorce*

  $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n$ / n. V našem případě 4.1 + 6.2 + 9.3 + 5.1 /23 = 2,09.

- ***Modus souboru je znak (výsledek), který byl dosažen nejčastěji (nejfrekventovanější známka).***

  Z frekvenční tabulky je zřejmé, že modem našeho souboru je známka **3,** kterou bylo hodnoceno nejvíce (9) žáků.

- ***Medián souboru je znak, který je středním členem uspořádané (např. vzestupně) posloupnosti znaků:***

  1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, **3**, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5.

  V našem souboru známka **3**, stejně jako modus souboru.

Práce s daty (propedeutika statistiky)

Očekávané výstupy RVP ZV v tematickém okruhu „Závislosti, vztahy a práce s daty“.

Žák:

- popisuje jednoduché závislosti z praktického života, vyhledává data z reálných životních situací, používá čárkovací metodu při sběru a evidenci dat,
- na vhodných modelech matematických i reálných situací třídí data podle zvolených a stanovených kritérií,
- intuitivně se seznamuje s pojmem aritmetický průměr v situacích známých z denního života,
- čte údaje v různých typech diagramů (sloupcový, kruhový, figurální), interpretuje data v reálném kontextu,
- zpřehledňuje vyhledaná data v tabulkách a vhodným způsobem je vyjadřuje grafem nebo diagramem.

Práce s daty (propedeutika statistiky)

Uvedené očekávané výstupy budeme ilustrovat na další úloze:

- *Házej stokrát hrací kostkou a zapisuj výsledky do tabulky. Který počet hodů padl nejvícekrát?*

Padla	1	2	3	4	5	6
Čárky						
Počet						

- *Házej stokrát dvěma hracími kostkami současně a součty zapisuj do tabulky. Porovnej s předchozím výsledkem.*

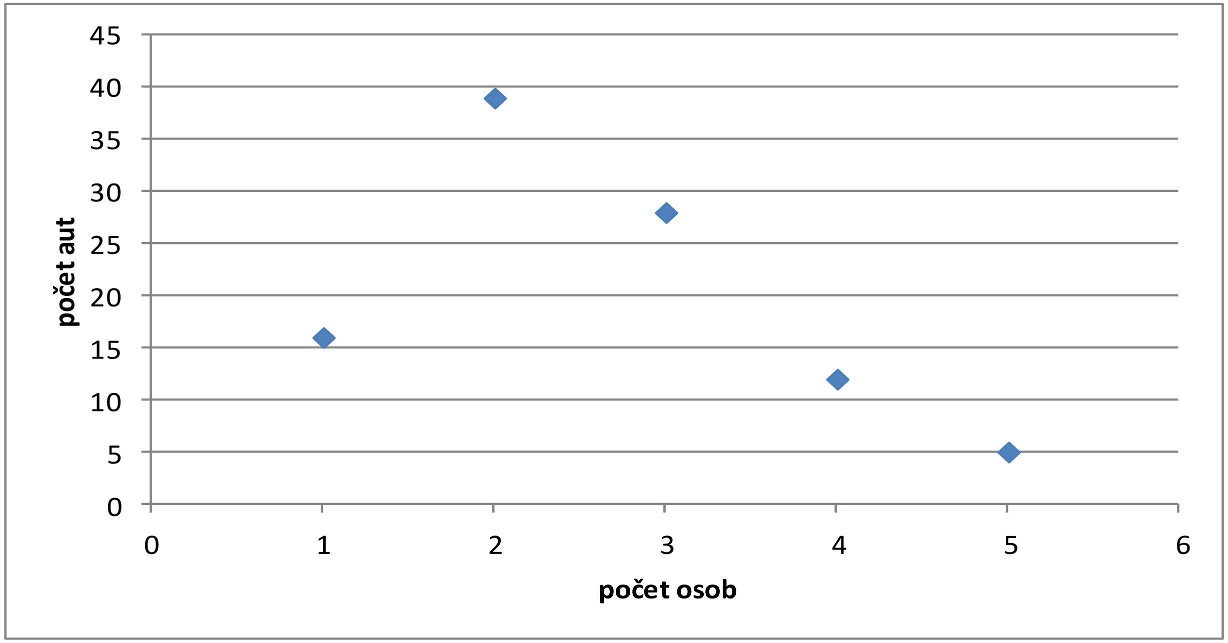
Padl součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Čárky											
Počet											

Grafy a diagramy

U statistického souboru osobních aut, která projedou v danou hodinu sledovaným místem, byl zjišťován počet cestujících v autě (statistický znak).

Počet osob	1	2	3	4	5
Počet aut	16	39	28	12	5

Bodový graf



Jednotlivé body kartézského bodového grafu jsou obrazem uspořádaných dvojic (x,y), tj. ((1,16), (2,39), (3,28), (4,12), (5,5), kde první složka uspořádané dvojice vyjadřuje souřadnici *x*, druhá složka souřadnici *y*.

Grafy a diagramy

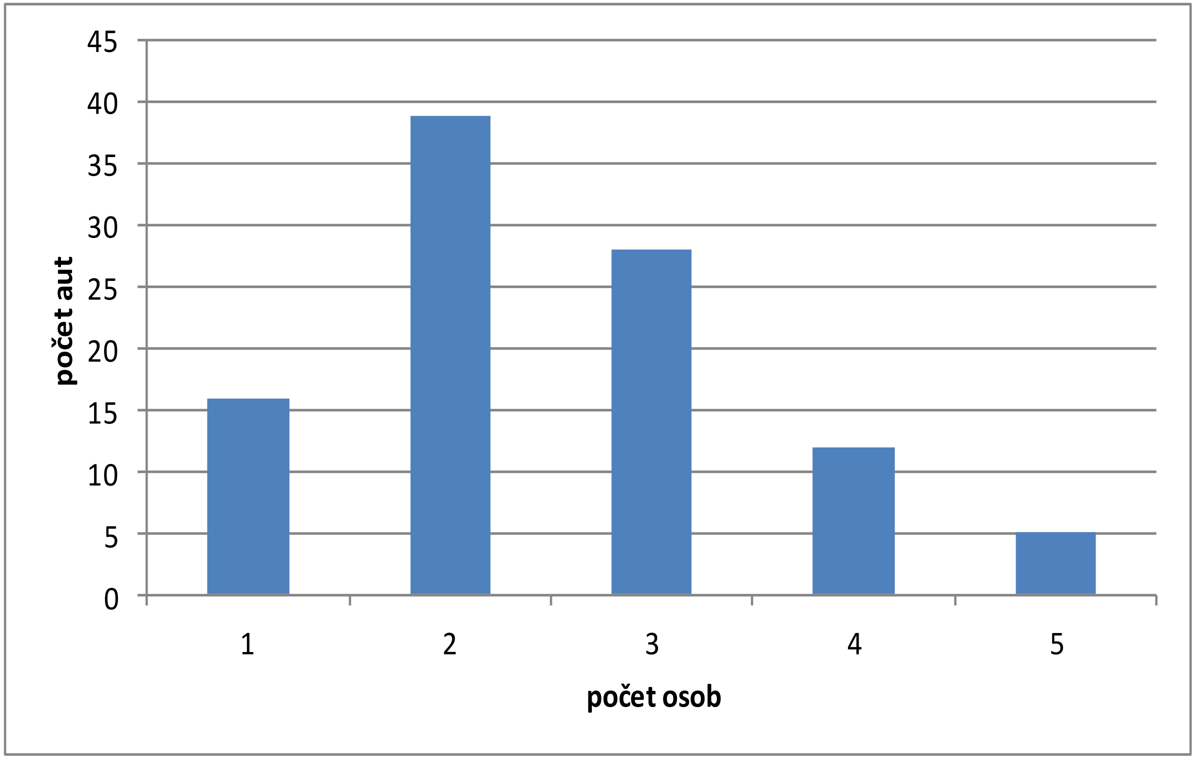
Spojnicový graf

Vzniká z bodového grafu spojením jednotlivých bodů úsečkami. Používá se pro vystižení průběhu časové řady, nebo také k vyjádření předpokladu o spojitosti vyšetřovaného znaku.

Grafy a diagramy

Sloupcový diagram

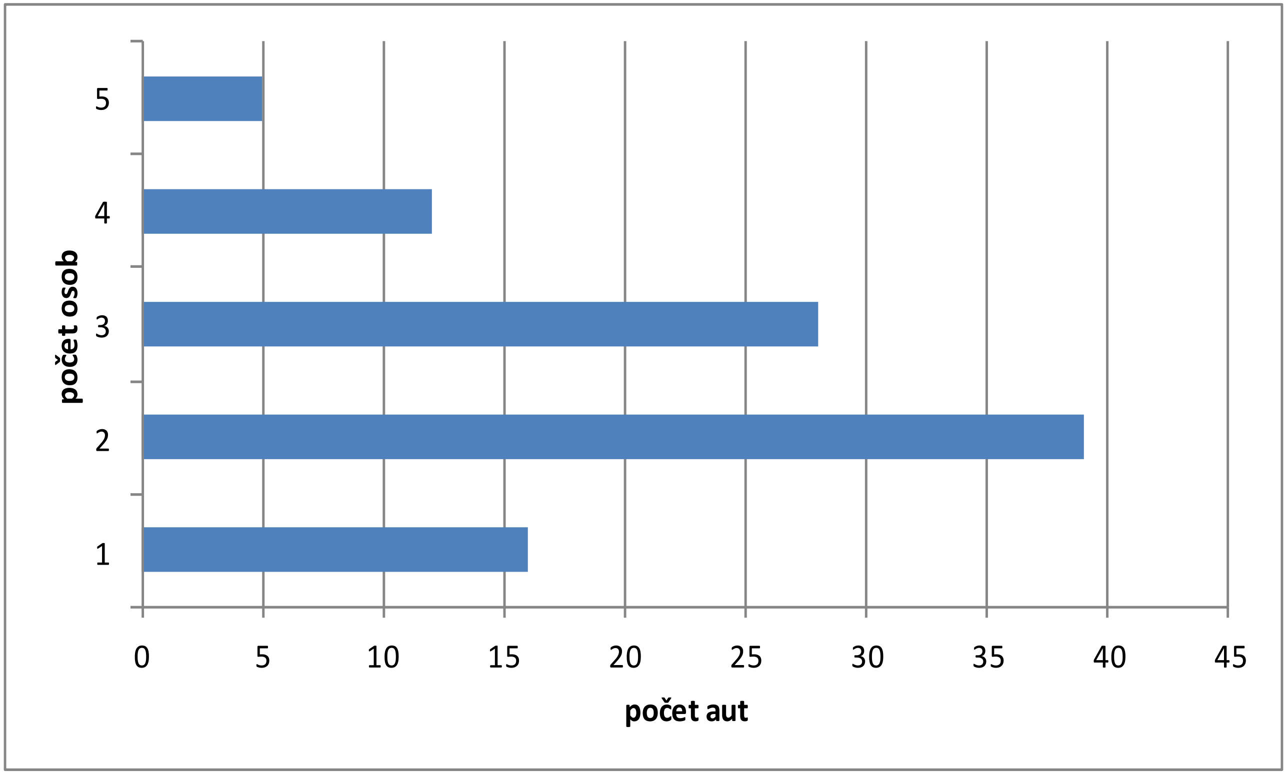
Znázorňuje rozdělení hodnot statistického znaku pomocí sloupců, které mají stejnou šířku, a jejich výška je přímo úměrná hodnotám znaku. Výhodou je, že v grafu mohou být současně znázorněny dva i více statistických znaků.



Grafy a diagramy

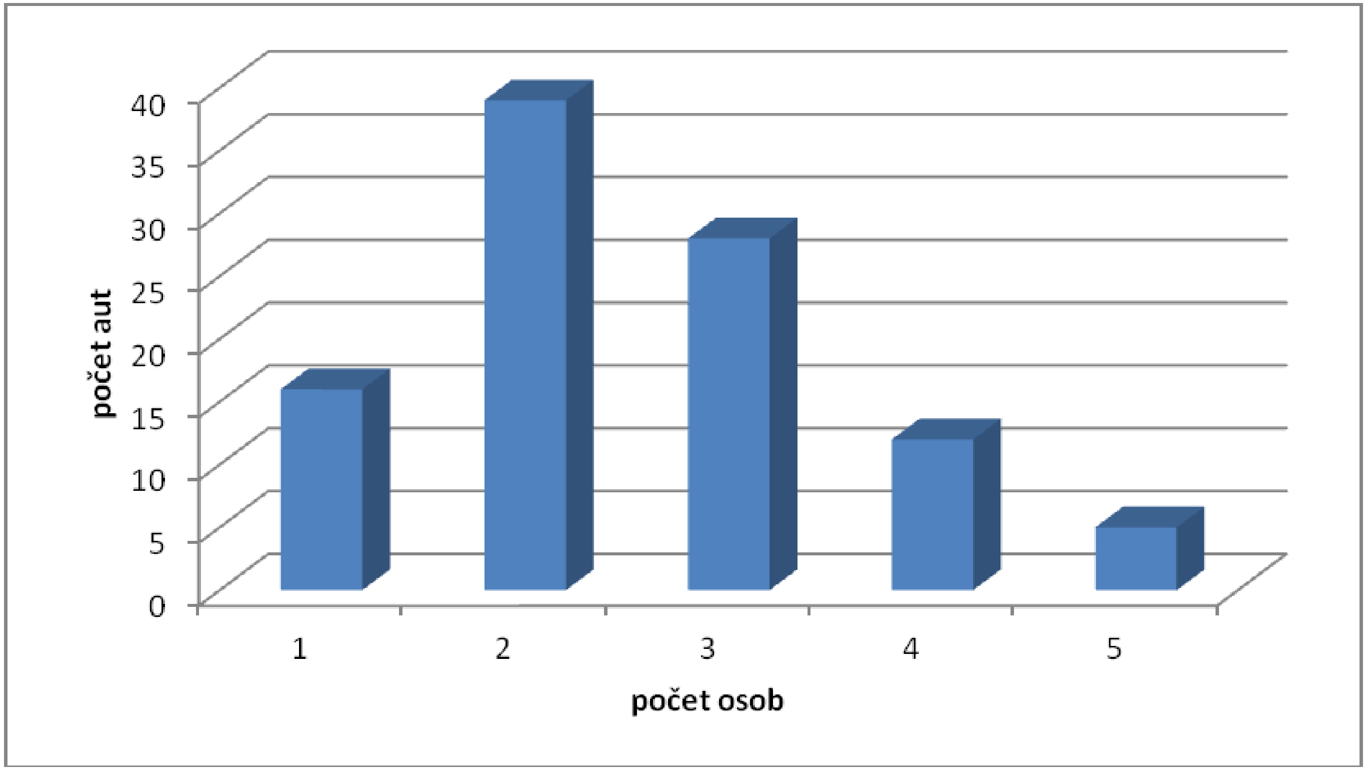
Sloupcový diagram

Sloupce, tedy obdélníky, mohou být také ve vodorovné poloze.



Grafy a diagramy

- Dalším typem sloupcového diagramu je trojrozměrný graf. Skutečný trojrozměrný graf musí splňovat jednu důležitou vlastnost, musí mít tři osy. Za trojrozměrný graf se ale může považovat i dvojrozměrný graf, ve kterém jsou sloupce zobrazeny s trojrozměrným efektem, jako je to znázorněno na dalším obrázku.



Grafy a diagramy

Kruhový diagram

U tohoto typu grafu různým hodnotám znaku odpovídají kruhové výseče, jejichž obsahy jsou úměrné četnostem znaku. Pro velikost úhlu kruhové výseče platí, že poměr velikosti středového úhlu této výseče k velikosti plného úhlu je stejný jako poměr četnosti hodnoty uvažovaného znaku k rozsahu celého souboru.