Bayesovské metody

Jan Kracík
jan.kracik@vsb.cz

Úvod

Rozhodování za neurčitosti:

- rozhodování: volíme jednu z alespoň dvou možností
- neurčitost: nelze přesně určit důsledky rozhodnutí
- rozhodování sleduje zadané cíle
- snaha minimalizovat neurčitost

Úvod

Rozhodování za neurčitosti:

- rozhodování: volíme jednu z alespoň dvou možností
- neurčitost: nelze přesně určit důsledky rozhodnutí
- rozhodování sleduje zadané cíle
- snaha minimalizovat neurčitost

Reprezentace neurčitosti:

- pravděpodobnost
- fuzzy modely
- nepřesné pravděpodobnosti

Úvod

Bayesovská teorie

- normativní teorie rozhodování za neurčitosti
- axiomatické základy
- racionální v jasně definovaném smyslu

Úvod

Bayesovská teorie

- normativní teorie rozhodování za neurčitosti
- axiomatické základy
- racionální v jasně definovaném smyslu

Základní principy:

- neznámé veličiny považovány za náhodné
- neurčitost reprezentována pomocí pravděpodobnosti
- cíle popsány ztrátovou funkcí
- minimalizace střední hodnoty ztrátové funkce

Úvod

Výchozí myšlenka: **NEZNÁMÉ = NÁHODNÉ**

Úvod

Výchozí myšlenka: **NEZNÁMÉ = NÁHODNÉ**

Počátky:

- Thomas Bayes
- Pierre-Simon Laplace
- konec 18. století

Úvod

Výchozí myšlenka: **NEZNÁMÉ = NÁHODNÉ**

Počátky:

- Thomas Bayes
- Pierre-Simon Laplace
- konec 18. století

Příklad: hod mincí

- deterministický proces
- neznáme poč. podmínky, parametry, neumíme dost přesně počítat
- dokonalý náhodný pokus
- náhoda v běžném smyslu je důsledek nedostatku znalostí, schopností

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

Bayesovská statistika se opírá o několik základních vztahů z teorie pravděpodobnosti.

Náhodné jevy A, B, C; $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$.

- Podmíněná pravděpodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

  Odtud plyne

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

Bayesovská statistika se opírá o několik základních vztahů z teorie pravděpodobnosti.

Náhodné jevy A, B, C; $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$.

- Podmíněná pravděpodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

  Odtud plyne

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

- Řetězové pravidlo:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

- Nezávislost: A a B jsou nezávislé, právě když

$$P(A \cap B) = P(A)(B).$$

Odtud pro nezávislé jevy plyne

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B).$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

- Nezávislost: A a B jsou nezávislé, právě když

$$P(A \cap B) = P(A)(B).$$

Odtud pro nezávislé jevy plyne

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B).$$

- Podmíněná nezávislost: A a B jsou podmíněně nezávislé za podmínky, že nastal jev C, právě když platí

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Odtud pro podmíněně nezávislé jevy plyne

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A|C)P(B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)} = P(A|C).$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ - úplný systém vzájemně disjunktních náhodných jevů. Pak platí:

- Věta o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i).$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ - úplný systém vzájemně disjunktních náhodných jevů. Pak platí:

- Věta o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i).$$

- Bayesova věta:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

X, Y, Z - náhodné veličiny se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$, $f_{X,Y,Z}(x, y, z) > 0$

- Marginalizace:

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy.$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

X, Y, Z - náhodné veličiny se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$, $f_{X,Y,Z}(x, y, z) > 0$

- Marginalizace:

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy.$$

- Podmíněná hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X za podmínky $Y = y$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

  Odtud plyne

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y).$$

- Řetězové pravidlo:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_{X|Y,Z}(x|y,z) f_{Y|Z}(y|z) f_Z(z)$$

Základní pojmy a vztahy z teorie pravděpodobnosti

- Řetězové pravidlo:

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_{X|Y,Z}(x|y, z)f_{Y|Z}(y|z)f_Z(z)$$

- Nezávislost: Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, právě když

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

  Odtud pro nezávislé veličiny plyne

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$$

- Náhodné veličiny X a Y jsou podmíněně nezávislé za podmínky $Z = z$, právě když platí

$$f_{X,Y|Z}(x, y|z) = f_{X|Z}(x|z)f_{Y|Z}(y|z).$$

Odtud pro podmíněně nezávislé veličiny plyne

$$f_{X|Y,Z}(x|y, z) = f_{X|Z}(x|z).$$

- Náhodné veličiny X a Y jsou podmíněně nezávislé za podmínky $Z = z$, právě když platí

$$f_{X,Y|Z}(x,y|z) = f_{X|Z}(x|z) f_{Y|Z}(y|z).$$

  Odtud pro podmíněně nezávislé veličiny plyne

$$f_{X|Y,Z}(x|y,z) = f_{X|Z}(x|z).$$

- Bayesův vzorec:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}.$$

Neznámé veličiny v úloze jsou považovány za náhodné.

- Systém popsaný náhodnými veličinami x, θ
  - x ... pozorovatelná veličina, data
  - θ ... neznámý parametr
- Pravděpodobnostní model $f(x|\theta)$
  - závislost x na neznámém parametru θ
  - podmíněná hustota pravděpodobnosti
- **Apriorní hustota pravděpodobnosti** $f(\theta)$
  - informace o parametru θ dostupné předem
- **Aposteriorní hustota pravděpodobnosti** $f(\theta|x)$

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{f(x)} = \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int f(x|\theta)f(\theta)d\theta}$$

  - celková informace o θ (apriorní + inf. z dat)

- Model:
  - nejen běžné statistické modely
  - obecně složitý, např. hierarchický
  - často využívá podmíněných nezávislostí
- Veličiny x, θ:
  - obecně vektorové
  - složky závislé
  - veliká dimenze
- Parametr θ může mít jakýkoliv význam:
  - parametr statistického modelu
  - nepozorované fyzikální veličiny
  - ...

Poznámky
Apriorní hustota

- explicitně vyjádřená apriorní informace
- charakteristický prvek bayesovských metod
- zdroj apriorní informace:
  - teoretické modely, např. fyzikální
  - expertní zkušenost
  - podobné úlohy
  - omezení
- technicky obtížné, není-li vhodná informace k dispozici
  - neinformativní apriorní hustoty
- Nemám-li apriorní informaci, nemám problém!

- vyjadřuje celkovou informaci o parametru
- zjednodušený zápis

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)f(\theta),$$

  $\propto$ značí úměrnost až na normlizační člen
- normalizační člen určen podmínkou $\int f(\theta|x)d\theta = 1$
- Bayesův vzorec představuje mechanizmus učení.

Předpokládejme:

- $x = (x_1, \ldots, x_t)$
- $x_1, \ldots, x_t$ nezávislá pozorování
- index (τ) ... čas

aposteriorní hustota v čase τ:

$$f(\theta|x_1, \ldots, x_\tau) = \frac{f(x_\tau|\theta)f(\theta|x_1, \ldots, x_{\tau-1})}{\int f(x_\tau|\theta)f(\theta|x_1, \ldots, x_{\tau-1})d\theta}$$

Aposteriorní hustota z předchozího času $(\tau - 1)$ slouží v čase τ jako apriorní. Učení probíhá sekvenčně.

Cíle rozhodování popsány ztrátovou funkcí.

- množina možných rozhodnutí: $\mathcal{A}$
- množina hodnot parametru: Θ

Ztrátová funkce je libovolná funkce

$$L : \mathcal{A} \times \Theta \to R^{+}.$$

Rozhodnutí přiřazuje hodnotu ve smyslu ztráty, kterou toto rozhodnutí způsobí v závislosti na hodnotě parametru θ.

Příklad: kvadratická ztrátová funkce

$$L(a, \theta) = (a - \theta)^2.$$

Za optimální rozhodnutí a^{opt} pak považujeme rozhodnutí, které minimalizuje střední hodnotu ztrátové funkce vzhledem k aposteriornímu rozdělení, tj.

$$a^{opt} \in \operatorname*{Argmin}_{a \in \mathcal{A}} \int L(a, \theta) f(\theta | x) d\theta. \tag{1}$$

1. Pro daný problém specifikujeme
   - statistický model: $f(x|\theta)$,
   - apriorní hustotu pravděpodobnosti: $f(\theta)$,
   - množinu rozhodnutí: $\mathcal{A}$,
   - ztrátovou funkci: $L : \mathcal{A} \times \Theta \to \mathbb{R}^+$.
2. Optimální rozhodnutí $a^{opt} \in \mathcal{A}$ hledáme tak, aby splňovalo podmínku

$$a^{opt} \in \operatorname*{Argmin}_{a \in \mathcal{A}} \int L(a, \theta) f(\theta|x) d\theta,$$

kde

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta) f(\theta)}{\int f(x|\theta) f(\theta) d\theta}.$$

Bayesovská rozhodovací úloha

- uvedená formulace pro statické úlohy
- pro dynamické úlohy složitější, ale princip stejný
- výhody bayesovského přístupu:
  - jednoduchá formulace i pro složité úlohy
  - explicitně reprezentována apriorní informace
- nevýhody bayesovského přístupu: všechny dílčí kroky mohou být technicky obtížné
  - tvar aposteriorní hustoty
  - dimenze úlohy
  - optimalizace rozhodovací strategie
- často využívána numerická a suboptimální řešení