§ 31. ALGEBRAICKÉ FUNKCE.

I. Racionální funkce celé.

Racionální funkce celé (mnohočleny,polynomy) jsou definované a spojité pro každé x.Jsou-li stupně n-tého,pak může existovat nejvýš (n-1) hodnot proměnné x, jež vedou k lokálním extrémům.Tato x jsou současně hranicemi intervalů monotonnosti.

Grafem racionální funkce celé n-tého stupně ($n > 2$) je tzv.,,vyšší parabola'', která může mít nejvýš (n-1) vrcholů a nejvýš (n-2) inflexních bodů.

Při výpočtech se setkáme s řešením algebraických rovnic a nerovností vyšších stupňů.Viz III. a IV. kapitola.Některé z nich se nám zatím nepodaří rozřešit.

233.cvičení.Pro dané funkce určiti lokální extrémy,intervaly monotonnosti,charakteristické body grafu a náčrtek grafu.

a) $y= 2x^3-9x^2+12x+1$, $[\ \overline{V}(1,6)\ ,\ \underline{V}(2,5)\ ,\ /J(\frac{3}{2},5\frac{1}{2})\ ]$;

b) $y= 3x^4-4x^3$, $[\ \underline{V}(1,-1),\ -\!\bullet J_1(0,0)\ ,\ /J_2(\frac{2}{3},-\frac{16}{27})\ ]$;

c) $y= x^3-3x^2+3x+3$, $[\ -\!\bullet J(1,4)$, funkce je v int.$(-\infty,+\infty)$ rostoucí $]$;

d) $y= x^4-2x^3-3x^2+4x-5$, $[\ \overline{V}(\frac{1}{2},-3\frac{15}{16}),\ \underline{V}(-1,-9),\ \underline{V}(2,-9),\ /J_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2},y_1),/J_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2},)]$;

e) $y= (x-1)^2.(x+1)^3$, $[\ \overline{V}(\frac{1}{5},y\doteq+1,1),\underline{V}(1,0),-\!\bullet J_1(-1,0),/J_2(\frac{1+\sqrt{6}}{5},y_2),/J_3(\frac{1-\sqrt{6}}{5},y_3)\ ]$;

DESÍTKA ÚLOH čís. 38

Úkol předešlého cvičení proveďte pro funkce :

1) $y= x^3-5x^2+3x+5$, $[\overline{V}(\frac{1}{3},5\frac{13}{27}),\ \underline{V}(3,-4),\ /J(\frac{5}{3},\frac{20}{27})\ ]$;

2) $y= \frac{1}{4}x^3-3x+1$, $[\overline{V}(-2,5),\ \underline{V}(2,-3),\ /J(0,1)\ ]$;

3) $y= 1 + x - x^3$, $[\overline{V}(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{9+2\sqrt{3}}{9}),\ \underline{V}(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{9-2\sqrt{3}}{9}),\ /J(0,1)\ ]$;

4) $y= x^4- 4x^3+ 4x^2$, $[\overline{V}(1,1),\ \underline{V}(0,0),\ \underline{V}(2,0),/J_1(\frac{3+\sqrt{3}}{3},y_1),\ /J_2(\frac{3-\sqrt{3}}{3},y_2)\ ]$;

5) $y= x^4- 2x^3+ 1$, $[\underline{V}(\frac{3}{2},-\frac{11}{16}),\ -\!\bullet J_1(0,1),\ /J_2(1,0)\ ]$;

6) $y= \frac{1}{4}x^4 + x^3$, $[\underline{V}(-3,-6\frac{3}{4}),\ -\!\bullet J_1(0,0),\ /J_2(-2,-4)\ ]$;

7) $y= x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-4$, $[-\!\bullet J(1,-3)$, funkce je v int.$(-\infty,+\infty)$ rostoucí $]$;

8) $y= x^4+4x^3+6x^2+4x-3$, $[\underline{V}(-1,-4)$ je tzv.plochý bod $]$;

9) $y= (x+1)^2.(x-1)^3$, $[\overline{V}(-1,0),\underline{V}(\frac{-1}{5},y\doteq-1,1),-\!\bullet J_1(1,0),\ /J_{2,3}(\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5},y_{2,3})]$

10) $y= (x-1)^2.(x+2)^3$, $[\ \overline{V}(\frac{-1}{5},y\doteq8,4),\underline{V}(1,0),-\!\bullet J_1(-2,0),\ /J_{2,3}(\frac{-2\pm3\sqrt{6}}{10},y_{2,3})]$

II. Racionální funkce lomené.

1. Racionální funkce lomené $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, jichž jmenovatel Q(x) nemá reál.kořeny (Q(x) není pro žádné reálné x roven nule).

   Tyto funkce jsou definovány a spojité pro každé x.

Nechť je P(x) stupně n-tého a Q(x) stupně m-tého.Pak pro $n \leqq m$ mají grafy uvažovaných funkcí asymptotu totožnou nebo rovnoběžnou s osou x. Je to přímka $y = q$, kde $q = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$.

V následujících cvičeních a desítkách úloh určiti pro dané funkce lokální extrémy, intervaly monotonnosti,charakteristické body grafu a náčrtek grafu.

Pro některé případy bude třeba načrtnout graf funkce bez všech možných inflexních bodů,neboť k určení jejich souřadnic x vede rovnice vyššího stupně nám známými metodami neřešitelná.Ve výsledcích bude zapsáno $J(x^3-3x+1=0)$.

234.<u>cvičení</u>. asymptota:

a) $y=\frac{1}{x^2+1}$, [$\bar{V}(0,1)$, $/J_1(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4})$, $/J_2(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4})$, $y=0$, $\frac{-\quad +}{\quad}$];

b) $y=\frac{-2x}{x^2+1}$, [$\bar{V}(-1,1)$, $\underline{V}(1,-1)$, $/J_1(0,0)$, $/J_2(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $/J_3(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $y=0$, $\frac{-\quad}{\quad +}$];

c) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, [$\bar{V}(1,3)$, $\underline{V}(-1,\frac{1}{3})$, $/J(x^3-3x+1=0)$ $y=1$, $\frac{\quad +}{-\quad}$];

DESÍTKA ÚLOH čís. 39

1) $y=\frac{4}{2+x^2}$, [$\bar{V}(0,2)$, $/J_1(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{3}{2})$, $/J_2(-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{3}{2})$; $y=0$, $\frac{-\quad +}{\quad}$];

2) $y=\frac{x}{1+_2x^2}$, [$\bar{V}(1,\frac{1}{2})$, $\underline{V}(-1,-\frac{1}{2})$, $/J_1(0,0)$, $/J_2(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$, $/J_3(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4})$, $y=0$, $\frac{\quad +}{-\quad}$];

3) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$, [$\underline{V}(0,0)$, $/J_1(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$, $/J_2(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$; $y=1$, $\frac{\quad}{-\quad +}$];

4) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$, [$\bar{V}(-1,2)$, $\underline{V}(1,0)$, $/J_1(0,1)$, $/J_{2,3}(\pm\sqrt{3},\ 1\mp\frac{\sqrt{3}}{2})$; $y=1$, $\frac{-\quad}{\quad +}$];

5) $y=\frac{4x^4}{1+x^4}$, [$\underline{V}(0,0)$, $/J_{1,2}(\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}},\frac{3}{2})$; $y=4$, $\frac{\quad}{-\quad +}$];

6) $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$, [$\bar{V}(1-\sqrt{2},y\doteq 7)$, $\underline{V}(1+\sqrt{2},y\doteq\frac{-1}{10})$, $J(x^3-4x^2-2x+1=0)$; $y=1$, $\frac{-\quad}{\quad +}$];

7) $y=\frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$, [$\bar{V}(-1,2\frac{1}{3})$, $\underline{V}(1,-3)$, $J(x^3-3x+1=0)$; $y=1$, $\frac{-\quad}{\quad +}$];

8) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$, [$\bar{V}(0,4)$, $\underline{V}(-2,2\frac{2}{3})$, $J(x^3+3x^2-1=0)$; $y=3$, $\frac{\quad +}{-\quad}$];

9) $y=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$, [$\bar{V}(1,2)$, $\underline{V}(-1,-2)$, $/J_1(0,0)$; $y=0$, $\frac{\quad +}{-\quad}$];

10) $y=\frac{x^2}{x^4+4}$, [$\underline{V}(0,0)$, $\bar{V}(\sqrt{2},\frac{1}{4})$, $\bar{V}(-\sqrt{2},\frac{1}{4})$, $/J_{1,2}(\pm\sqrt[4]{\frac{24+4\sqrt{33}}{3}},y)$, $/J_{3,4}(\pm\sqrt[4]{\frac{24-4\sqrt{33}}{3}},y)$, $y=0$, $\frac{-\quad +}{\quad}$].

2. <u>Racionální funkce lomené</u> $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, <u>jichž jmenovatel má reálné kořeny</u>

($Q(x)$ je rozložitelný mnohočlen)

Má-li mnohočlen $Q(x)$ $\underline{r}$ různých reálných kořenů, má daná funkce $\underline{r}$ bodů nespojitosti. Jsou-li x_1, x_2 , x_3 , ... x_r reálné kořeny, pak kořen x_i je bodem odstranitelné nespojitosti, když $\lim\limits_{x\to x_i}\frac{P(x)}{Q(x)}$ je vlastní, nebo bodem nespojitosti 2. druhu, když $\lim\limits_{x\to x_i}\frac{P(x)}{Q(x)}$ je nevlastní , - případně jen jednostranná.

V případě nespojitosti 2. druhu je přímka $x=x_i$ asymptotou grafu funkce.

Platí-li o stupních mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$ opět $n\leq m$, pak grafy těchto funkcí mají asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic.

V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh určete lokální extrémy, charakteristické body grafu, asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic a náčrtek grafu.

235.<u>cvičení</u>.

a) $y=\frac{3x-2}{2x^2}$, [$\bar{V}(\frac{4}{3},\cancel{\frac{9}{16}})$ $\frac{9}{8}$, $/J(2,\frac{1}{2})$; $y=0$, $\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=0$, $_|_$;];

b) $y=\frac{x}{3-x^2}$, [$/J(0,0)$, $y=0$, $\frac{-\quad}{\quad +}$; $x=-\sqrt{3}$, $^+\lfloor$, $x=\sqrt{3}$, $^+|_-$];

c) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$, [Pro $x=1$ bod nespoj. odstranit., $y=1$, $\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=-1$, $_-|^+$.];

Poznámka. Při sestrojování náčrtku grafu narýsujeme nejprve asymptoty a všechny určené body. Teprve podle potřeby vypočítáváme souřadnice dalších bodů.

DESÍTKA ÚLOH čís. 40

1) $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$, [lok.extr.neexist., $\not J(0,0)$; $y=0,\frac{+}{-}$; $x=-2,\ _{-}|^{+}$; $x=2,\ _{-}|^{+}$];

2) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$, [lok.extr.neexist., $\not J(0,0)$; $y=0,\frac{-}{+}$; $x=-1,\ ^{+}|_{-}$; $x=1,\ ^{+}|_{-}$];

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, [$\bar{V}(0,0)$, $y=1,\frac{-}{+}$; $x=-1,\ ^{+}|_{-}$; $x=1,\ _{-}|^{+}$];

4) $y=\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$, [$\bar{V}(\frac{8}{3},2\frac{9}{16})$, $\not J(4,2\frac{1}{2})$; $y=2,\frac{+}{-}$; $x=0,\ _{-}|_{-}$;];

5) $y=\dfrac{4x+4}{x^2}-2$, [$\underline{V}(-2,-3)$, $\not J(-3,-2\frac{8}{9})$; $y=-2,\frac{+}{-}$; $x=0,\ ^{+}|^{+}$;];

6) $y=\dfrac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$, [$\underline{V}(-1,\frac{3}{2})$, $\not J(-2,1\frac{5}{9})$; $y=2,\frac{+}{-}$; $x=1,\ ^{+}|^{+}$;];

7) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$, [$\bar{V}(0,-1)$, $\underline{V}(3,\frac{1}{2})$; $J(2x^3-11x^2+6x-9=0)$; $y=1,\frac{-}{+}$; $x=-3,\ ^{+}|_{-}$; $x=1,\ _{-}|^{+}$];

8) $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, [lok.extr.neexist., $\not J(\frac{1}{2},0)$; $y=0,\frac{-}{+}$; $x=0,\ ^{+}|^{+}$; $x=1,\ _{-}|_{-}$];

9) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$, [$\underline{V}(1,\frac{3}{2})$, $\not J(-\sqrt[3]{2};\ 0)$; $x=0,\ _{-}|^{+}$;];

10) $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$, [$\underline{V}(2,3)$, $\not J(1-\sqrt[3]{2},\ 0)$; $x=1,\ _{-}|^{+}$;];

3. <u>Racionální funkce neryze lomené s rozdílem stupňů n−m= 1</u> se liší od předešlých dvou typů tím, že jejich grafy mají také asymptotu obecně položenou.
Přímka $y = kx+q$ je asymptotou křivky $y = f(x)$, jestliže pro konstanty k, q platí :

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right],$$

za předpokladu, že obě limity existují. Přitom v podmínkách $x\to\pm\infty$ platí současně znaménka horní nebo dolní.
Takto určená asymptota nemusí být limitní polohou tečny pro $x\to\pm\infty$.
Například pro funkci $y=\dfrac{-x^3+2x+3}{x^2+5x}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+3}{x^3+5x^2}=\ldots\ldots=-1,\qquad q=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^3+2x+3}{x^2+5x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+3}{x^2+5x}=5$$

Asymptotou obecně položenou grafu dané funkce jest tedy přímka $y=-x+5$; graf má ještě asymptoty $x=0$, $x=-5$.
Pro uvažované racionální funkce lomené lze určit asymptotu různoběžnou k ose y bez výpočtu limit pro k a q. Ze vzorce pro q se odvozuje, že neryze lomenou funkci s rozdílem stupňů $n-m=1$ lze dělením čitatele jmenovatelem nahradit součtem lineární části $(kx+q)$ a ryze lomené části $\varphi(x)$, o níž platí $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$, a že právě část lineární vede k asymptotě $y=kx+q$.
V uvedeném příkladě: $(-x^3+2x+3):(x^2+5x)=-x+5+\dfrac{-23x+3}{x^2+5x}$

Lineární část podílu, tj. dvojčlen $(-x+5)$ je pravou stranou rovnice asymptoty.
K těmto funkcím zařadíme nejprve funkci racionální neryze lomenou s kvadratickým čitatelem a lineárním jmenovatelem. Obecně je jejím grafem hyperbola, jejíž jedna asymptota je kolmá k ose x a druhá obecně položená. Z rovnic těchto dvou asymptot můžeme metodami analytické geometrie pro tuto obecněji položenou hyperbolu určit souřadnice středu, rovnice os, případně délky os a ostatní konstanty.
/83/. <u>příklad</u>. $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$ čili v implicitním tvaru $x^2-xy+3x-2y-1=0$

Z implicitního tvaru poznáváme, že jde skutečně o rovnici kuželosečky.

Dělením čitatele jmenovatelem obdržíme $(x^2+3x-1):(x+2) = (x+1) - \frac{3}{x+2}$

Rovnice asymptot : $x = -2$ čili $x + 2 = 0$; $y = x + 1$ čili $x-y+1 = 0$

Střed $S(-2,-1)$; rovnice os: $o_1 \equiv y = x(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2}+1, o_2 \equiv y = x(1-\sqrt{2}) + 1-2\sqrt{2}$

236.<u>cvičení</u>. Určiti asymptoty, střed a osy hyperboly :

a) $y = \frac{x^2}{3x+1}$, [$x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$, $S(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9})$; $o_{1,2} \equiv (3 \pm 3\sqrt{10})x - 9y - 1 \pm \sqrt{10} = 0$

b) $y = \frac{x^2}{x+1}$, [$x = -1$, $y = x - 1$; $S(-1,-2)$; $o_{1,2} \equiv (1 \pm \sqrt{2})x - y - 1 \pm \sqrt{2} = 0$];

c) $y = \frac{x^2+1}{x}$, [$x = 0$, $y = x$, $S(0, 0)$; $o_{1,2} \equiv (1 \pm \sqrt{2})x - y = 0$];

d) $y = \frac{2x^2+x}{x+1}$, [$x = -1$, $y = 2x - 1$, $S(-1,-3)$; $o_{1,2} \equiv y = (2 \pm \sqrt{5})x - 1 \pm \sqrt{5}$].

237.<u>cvičení</u>. Pro dané funkce určiti asymptoty a charakteristické body grafu :

a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$, [$\bar{V}(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$, $\underline{V}(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\rightarrow J(0,0)$; $y=x$; $x=-1, \_|^+$; $x=1, \_|^+$];

b) $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, [$\bar{V}(-5, -6\frac{3}{4})$, $\rightarrow J(1,0)$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$; $x=-1, \_ \_$]

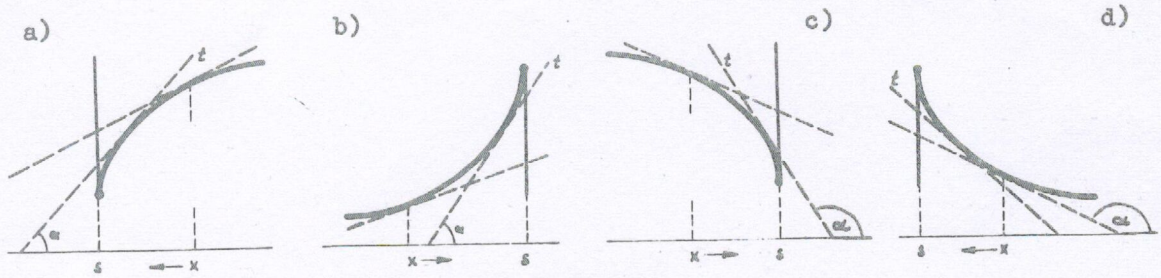
c) $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$, [$\bar{V}(1, \frac{7}{2})$, $\underline{V}(2, \frac{27}{8})$, $\bar{V}(-3, \frac{-33}{18})$, $\nearrow J(\frac{9}{7}, y \doteq 3\frac{1}{2})$; $y = \frac{1}{2}x + 1$; $x=0, \_|\_$].

III. <u>Iracionální funkce</u>.

Iracionální funkce mají někdy v některém bodě nevlastní derivaci. Je-li v tomto bodě daná funkce definována, pak graf funkce má v tomto bodě tečnu (polotečnu) rovnoběžnou s osou y. Mohou to být :

1) krajní body intervalů definičního oboru (viz obrazce : 13 , 14 , 15)
2) inflexní body (viz bod $\dot{\uparrow} J$ v obrazci 37)
3) body vratu (viz body $\dot{H}$, $\underset{\cdot}{H}$ v obrazci 37)

Pro jejich určení vyšetřujeme jednostranné nevlastní derivace. Pomůckou je nám geometrický význam derivace funkce v bodě (směrnice tečny)



Obr. 42

a)	b)	c)	d)
$tg\alpha = f'(x) > 0$	$tg\alpha = f'(x) > 0$	$tg\alpha = f'(x) < 0$	$tg\alpha = f'(x) < 0$
Když $x \to s+$, $f'(x) \to +\infty$	Když $x \to s-$, $f'(x) \to +\infty$	Když $x \to s-$, $f' \to -\infty$	Když $x \to s+$, $f' \to -\infty$
$\lim_{x \to s+} f'(x) = +\infty$	$\lim_{x \to s-} f'(x) = +\infty$	$\lim_{x \to s-} f'(x) = -\infty$	$\lim_{x \to s+} f'(x) = -\infty$

Kombinací těchto čtyř případů obdržíme body inflexní s tečnou rovnoběžnou s osou y nebo body vratu :

1. nastanou-li oba případy a), b) nebo c), d), má graf pro x=s inflexní bod $\uparrow J$, $\dot{}$
2. nastanou-li oba případy a), c) nebo b), d), má graf pro x=s bod vratu $\underset{\cdot}{H}$ nebo $\dot{H}$.

Viz obrazec 37, str. 117.

/84/.<u>příklad</u>.

a) Funkce $y = \sqrt[3]{x-1}$ má derivaci $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, která neexistuje v bodě x=1.

Funkce je v bodě x=1 definována a proto vyšetřujeme nevlastní derivace :

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

Graf funkce má v bodě x=1 inflexní bod s tečnou rovnoběžnou s osou y.

b) Funkce $y = \sqrt[3]{x^2}$ má derivaci $y' = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$, která neexistuje v bodě x=0.

Nevlastní derivace :

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2}{3.\sqrt[3]{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{2}{3.\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Graf funkce má v bodě x=0 bod vratu $\underset{\bullet}{H}$. Pro x= 0 existuje lokální minimum.

238.<u>cvičení</u>. Určiti všechny možné lokální extrémy funkcí,případně inflexní body :

a) $y = 3 - \sqrt[3]{x-2}$, [$\nmid J(2\ ,\ 3)$]

b) $y = \sqrt{(1-x^2).(1+2x^2)}$, [$\overline{V}(\pm\frac{1}{2},\frac{3}{\sqrt{8}}), \underline{V}(0,1)$;body (-1,0),(1,0) mají „svislé" polotečny .]

c) $y = 3.\sqrt[3]{x^2} - x^2$, [$\overline{V}(-1,2), \overline{V}(1,2), \underset{\bullet}{H}(0,0)$]

d) $y = 2x - 3.\sqrt[3]{x^2}$, [$\underline{V}(1,-1)$, $\dot{H}(0,0)$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 41 — Úkol předešlého cvičení proveďte pro funkce :

1) $y= (x+1)^3.\sqrt[3]{x^2}$, [$\overline{V}(-\frac{2}{11}, y\doteq 0{,}15)$, $\nmid J(-1,0)$, $\underset{\bullet}{H}(0,0)$];

2) $y= \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, [$\overline{V}(0,2)$, $\underset{\bullet}{H_1}(-1, \sqrt[3]{4})$, $\underset{\bullet}{H_2}(1, \sqrt[3]{4})$] ;

3) $y= \sqrt[3]{x-1}.\sqrt[3]{(2x-1)^2}$, [$\underline{V}(\frac{5}{6}, \frac{-\sqrt[3]{2}}{3})$, $\nmid J(1,0)$, $\dot{H}(\frac{1}{2},0)$] ;

4) $y= \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, [$\underset{\bullet}{H}(-1,-\sqrt[3]{4})$, $\dot{H}(1, \sqrt[3]{4})$, $\nmid J(0,0)$; $y=0, \frac{\quad +}{-\quad}$] ;

5) $y= \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$, [$\overline{V}_1(-\sqrt{2},2\sqrt[3]{2}), \overline{V}_2(\sqrt{2},2\sqrt[3]{2}), \underset{\bullet}{H}(0,\sqrt[3]{4})$, $\nmid J_1(-2,\sqrt[3]{4}), \nmid J_2(2,\sqrt[3]{4})$; $y=0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

6) $y= \sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}$, [$\overline{V}(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\bullet}{H}(1,0)$, $\underset{\bullet}{H}(2,0)$] ;

7) $y= \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$, [$\overline{V}(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\bullet}{H}(0,0)$, $\nmid J(2,0)$; asympt. $y = -x+ \frac{2}{3}$] ;

8) $y= -x^2.\sqrt[5]{(x-2)^2}$, [$\overline{V}(0,0)$, $\underline{V}(\frac{5}{3},\frac{-25}{9\sqrt[5]{9}})$, $\dot{H}(2,0)$, inflex.body existují]

9) $y= \sqrt[3]{x^2 - 1}$, [$\underline{V}(0,-1)$, $\nmid J_1(-1,0)$, $\nmid J_2(1,0)$]

10) $y= \dfrac{10.\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+ 9}$ [$\overline{V}(-\frac{3}{2},\frac{8}{9}\sqrt[3]{\frac{25}{4}})$, $\overline{V}(3,\frac{5}{9}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\bullet}{H}(1,0)$; $y=0, \frac{-\quad +}{}$]

239.<u>cvičení</u>. Vyšetřiti průběh daných iracionálních funkcí s náčrtkem grafu :

a) $y= \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, [x= -1, $|_-$; funkce je v int.$(-1,+\infty)$ rostoucí] ; $y=1, \frac{\quad +}{-\quad}$]

b) $y= \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$, [$(-\infty,-2\rangle, (2,+\infty)$;bod (-2,0) má svislou polotečnu; x=2, $|^+$;

c) $y= \sqrt{\dfrac{a^3- x^3}{3x}}$, a > 0, [$\nmid J(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, \frac{a}{2}\sqrt[3]{2})$;bod (a,0) má svislou polotečnu;x=0, $|^+$];

d) $y= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})$, [$\underline{V}(0,1)$; asympt.: y = x ; y = - x] .

§ 32. TRANSCENDENTNÍ FUNKCE.

I. Goniometrické funkce.

Při určování průběhu funkcí goniometrických se setkáváme s řešením goniometrických rovnic a nerovností. V každém případě si uvědomíme, že vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí obdržíme vždy nekonečnou množinu bodů vedoucích k lokálním extrémům, nekonečnou množinu intervalů růstu (klesání), pro graf nekonečnou množinu vrcholů, bodů inflexních apod. Každou množinu zapíšeme užitím celého čísla k a čísla vyjadřujícího periodu příslušné funkce.
K správnému sestavení všech zápisů užíváme grafů základních goniometrických funkcí.

/85/. **příklad**. Určiti lokální extrémy a charakteristické body grafu funkce $y = -\frac{3}{2}.\sin(3x + \frac{\pi}{4})$, vyšetřované bez užití 1. a 2. derivace již v kapitole o grafech funkcí. Viz / str. 80, obr. 20 /.

$$y' = -\frac{9}{2}.\cos(3x+\frac{\pi}{4}) \qquad y'' = \frac{27}{2}.\sin(3x+\frac{\pi}{4})$$

Nutná podmínka pro lokální extrémy: $\cos(3x+\frac{\pi}{4}) = 0$, což je splněno, když

a) $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ $\qquad x = \frac{1}{12}.(8k+1).\pi$

b) $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + k.2\pi$ $\qquad x = \frac{1}{12}.(8k+5).\pi$

Dosazením do 2. derivace se přesvědčíme o splnění postačující podmínky:

$$y'' = \frac{27}{2}.\sin[-\frac{3}{12}(8k+1)\pi + \frac{\pi}{4}] = \frac{27}{2}.\sin(\frac{\pi}{2} + k.2\pi) = \frac{27}{2}.1 > 0$$

$$y'' = \frac{27}{2}.\sin[-\frac{3}{12}.(8k+5) + \frac{\pi}{4}] = \frac{27}{2}.\sin(\frac{3}{2}\pi + k.2\pi) = \frac{27}{2}.(-1) < 0$$

Množina $x = \frac{1}{12}(8k+1)\pi$ dává body, jež vedou k lokálnímu minimu funkce.

Množina $x = \frac{1}{12}.(8k+5)\pi$ dává body, jež vedou k lokálnímu maximu funkce.

Několik bodů těchto množin obdržíme pouhým dosazováním $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$k=0$, $x_0 = \frac{1}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_1 $\qquad x_0' = \frac{5}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_2

$k=1$, $x_1 = \frac{3}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_3 $\qquad x_1' = \frac{13}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_4

$k=2$, $x_2 = \frac{17}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_5 $\qquad x_2' = \frac{7}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_6

$\vdots$

$k=-1$, $\bar{x}_1 = -\frac{7}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_2' $\qquad \bar{x}_1' = -\frac{1}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_1'

$k=-2$, $\bar{x}_2 = -\frac{5}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_4' $\qquad \bar{x}_2' = -\frac{11}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_3'

$\vdots$

240. **cvičení**. Určete lokální extrémy daných funkcí, případně i charakteristické body a náčrtek grafu funkce:

a) $y = \sin x + \cos x$ $\qquad [\ \bar{V}/ \frac{\pi}{4}(8k+1), \sqrt{2}\ /,\ \underline{V}/ \frac{\pi}{4}(8k+5), -\sqrt{2}\ /\ ]$

b) $y = \cos x + \operatorname{cotg} x$ $\qquad [\ x = k\pi, |^{+};\ J_1(\frac{\pi}{2}(4k+1), 0);\ J_2(\frac{\pi}{2}(4k+3), 0)\ ]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 42

1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ $\qquad [\ \bar{V}(\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{3}{2}\sqrt{3});\ \underline{V}(\frac{\pi}{3}(6k+5), -\frac{3}{2}\sqrt{3})\ ]$

2) $y = \sin^2 x - 2\sin x$ $\qquad [\ \bar{V}(\frac{\pi}{2}(4k+3), 3);\ \underline{V}(\frac{\pi}{2}(4k+1), -1)\ ]$

3) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad [\ \bar{V}(k\pi, (-1)^k + \frac{1}{2});\ \underline{V}(\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1), -\frac{3}{4})\ ]$

4) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$, [$\bar{V}\left(k\pi, 1\right)$; $\bar{V}\left(\frac{\pi}{2}(2k+1), 1\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{4}(4k+1), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pro k sudé
$\bar{V}\left(\frac{\pi}{4}(4k+1), -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\underline{V}\left(k\pi, -1\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{2}(2k+1), -1\right)$ pro k liché]

5) $y = \sin^3 x + \sin x$, [$\bar{V}\left(\frac{\pi}{2}(4k+1), 2\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{2}(4k+3), -2\right)$; $J(k\pi, 0)$]

6) $y = 4\sin 2x + \mathrm{tg}\,x$, [$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), {}^{+}|_{-}$; $J_1\left(\frac{\pi}{3}(3k+1), 3\sqrt{3}\right)$; $J_2\left(\frac{\pi}{3}(3k+2), -3\sqrt{3}\right)$;
$J_3(k\pi, 0)$]

7) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

[$\bar{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+4), -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\bar{V}\left(\frac{\pi}{4}(8k+1), \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$; $\bar{V}\left(\frac{\pi}{4}(8k+3), \frac{-(3+4\sqrt{2})}{6}\right)$;
$\underline{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+2), \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{4}(8k+7), \frac{-(3+4\sqrt{2})}{6}\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{4}(8k+5), \frac{3-4\sqrt{2}}{6}\right)$]

8) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$

[$\bar{V}\left(2k\pi, \frac{11}{6}\right)$; $\bar{V}\left(\frac{2}{3}\pi(3k+1), -\frac{5}{12}\right)$; $\bar{V}\left(\frac{2}{3}\pi(3k+2), -\frac{5}{12}\right)$;
$\underline{V}\left(\pi(2k+1), -\frac{5}{6}\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{2}(2k+1), -\frac{1}{2}\right)$]

9) $y = \dfrac{10}{1 + \sin^2 x}$ [$\bar{V}\left(k\pi, 10\right)$; $\underline{V}\left(\frac{\pi}{2}(2k+1), 5\right)$; inflexní body řešením
rovnice $2\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0$]

10) $y = \sin x - \mathrm{tg}\,x$ [$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), {}_{-}|^{+}$; $\bar{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+1), 4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$;
$\underline{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+5), -4\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$]

II. <u>Exponenciální funkce</u>.

Při vyšetřování průběhu exponenciální funkce tvaru $y = a^{f(x)}$, $a > 0$, si uvědomujeme, že <u>funkce má pro každé x kladné funkční hodnoty</u>; proto

<u>pro žádné x není $a^{f(x)} = 0$</u>

Poněvadž 1. a 2. derivace takové exponenciální funkce se dá uvést na tvar

$$a^{f(x)} \cdot F(x) ,$$

pak řešení rovnice $a^{f(x)} \cdot F(x) = 0$ přechází na řešení rovnice $F(x) = 0$.

V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh vyšetřete lokální extrémy , případně i charakteristické body a asymptoty grafu dané funkce. (U grafů některých funkcí existují inflexní body, ale výpočet jejich souřadnic je složitý)

241. <u>cvičení</u>.

a) $y = x \cdot e^x$ [$\underline{V}(-1, -e^{-1})$; $J(-2, -2e^{-2})$; asymptota $y = 0$, $\frac{\quad}{-}$]

b) $y = 2^{\frac{x}{1+x^2}}$ [$\bar{V}(1, \sqrt{2})$; $\underline{V}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; exist. J_1, J_2, J_3; $y = 1$, $\frac{\quad +}{-}$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 43

1) $y = 2^{-x^2}$, [$\bar{V}(0,1)$; $J_1\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}, 2^{\frac{-1}{\ln 4}}\right)$; $J_2\left(\frac{-1}{\sqrt{\ln 4}}, 2^{\frac{1}{\ln 4}}\right)$; $y = 0$, $\frac{-\quad +}{}$]

2) $y = e^{-x^2}$, [$\bar{V}(0,1)$; $J_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $J_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $y = 0$, $\frac{-\quad +}{}$]

Asymptota:

3) $y = e^{-x^{-2}}$, $\quad$ [$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$; $\not J_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$; $\not J_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$; $\quad y = 1, \frac{\qquad}{-\ \ +}$]

4) $y = e^{\frac{1}{x}}$, $\quad$ [$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$; $\not J\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$; $x = 0$, $|^{+}$; $y = 1, \frac{\quad +}{-\quad}$]

5) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$, $\quad$ [$x \neq -2$; $\lim\limits_{x \to -2-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to -2+} y = +\infty$; $\not J\left(-2\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$; $x = -2$, $|^{+}$; $y = 1$, $\frac{\quad +}{-\quad}$]

6) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$, $\quad$ [$x \neq 1$; $\lim\limits_{x \to 1-} y = 0$; $\not J\left(\frac{2-\ln 2}{2}, 2^{\frac{-2}{\ln 2}}\right)$; $\quad x = 1$, $|^{+}$; $y = 1, \frac{\quad +}{-\quad}$]

7) $y = \dfrac{1}{1+e^{x^{-1}}}$, [$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = 0$; $\quad y = \frac{1}{2}, \frac{-\quad}{\quad +}$]

8) $y = x^2 . e^{-x}$, $\quad$ [$\bar{V}(2, 4e^{-2})$; $\underline{V}(0,0)$; $\not J_1(2+\sqrt{2}, y)$; $\not J_2(2-\sqrt{2}, y)$; $y = 0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

9) $y = x . e^{x^{-1}}$, $\quad$ [$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$; $\underline{V}(1, e)$; $\quad x = 0$, $|^{+}$; $y = 1, \frac{\quad +}{-\quad}$]

10) $y = x . e^{\frac{-x^2}{2}}$, $\quad$ [$\bar{V}\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\underline{V}\left(-1, \frac{-1}{\sqrt{e}}\right)$; $\not J_1(0,0)$; $\not J_2(\sqrt{3}, y)$; $J_3(-\sqrt{3}, y)$;
$y = 0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

III. Logaritmické funkce.

Derivace logaritmické funkce tvaru $y = \ln f(x)$ je funkcí tvaru $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Je-li vnitřní složka $f(x)$ racionální funkcí, pak řešení příslušných rovnic a nerovností není obtížné.
Často se setkáváme s rovnicí $\quad \ln x = m$, jež je splněna pro $x = e^m$
nebo s nerovností $\quad \ln x \gtrless m$, jež je splněna pro $x \gtrless e^m$.
Je však důležité zjistit předem definiční obor dané logaritmické funkce a přesvědčovat se, zda x, vypočítané pro lokální extrémy nebo pro charakteristické body grafu, náleží def. oboru funkce.
V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh určiti lokální extrémy daných funkcí, případně charakteristické body a asymptoty grafu.

242. cvičení.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, $\quad$ [$x > 0$; $\underline{V}\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $\quad x = 0$, $|^{+}$;]

b) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, $\quad$ [$x > 0$; $\underline{V}(1, 0)$; $\bar{V}\left(e^2, \frac{4}{e^2}\right)$; $\not J\left(e^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}, y\right)$; $x = 0$, $|^{+}$; $y = 0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 44

1) $y = \sqrt{x} . \ln x$, $\quad$ [$x > 0$; $\underline{V}\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$; $\not J(1, 0)$]

2) $y = x . \ln x$, $\quad$ [$x > 0$; $\underline{V}\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$;]

3) $y = x^2 . \ln x$, $\quad$ [$x > 0$; $\underline{V}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)$; $\not J\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$;]

4) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad$ [$x > 0$; $\bar{V}\left(e, \frac{1}{e}\right)$; $\not J\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$; $\quad y = 0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

5) $y = \dfrac{1}{\ln x}$, $\quad$ [$x > 0$; $x \neq 1$; $\not J\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\quad x = 1$, $|^{+}$; $y = 0, \frac{\quad +}{-\quad}$]

Asymptoty:

6) $y = \ln(1+x^2)$, [$\underline{V}(0,0)$; $\not J_1(1,\ln 2)$; $\not J_2(-1,\ln 2)$;]

7) $y = \ln(1-x^2)$, [Obor: $(-1,1)$; $\bar{V}(0,0)$; x=-1, └ ; x= 1, ┘]

8) $y = \ln(x^2-1)$, [Obor: $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; x=-1, ┘ ; x= 1, └]

9) $y = x + \ln(x^2-1)$, [Obor: $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; $\bar{V}(-1-\sqrt{2},y)$; x=1, └ ; x=-1, ┘]

10) $y = \frac{1}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x}$, [Obor: $(-1,1)$; $\not J(0,0)$; x=-1, └ ; x= 1, $^{+}|$]

IV. Cyklometrické funkce.

U složených funkcí cyklometrických se setkáváme častěji s některými zvláštnostmi (singularitami), které se zřídka objevovaly u funkcí předešlých tříd. Tyto funkce mívají body nespojitosti I. druhu, jejich grafy mají body úhlové apod. Proto je opět důležité určovat definiční obor funkce a vyšetřovat obě okolí bodů, pro něž není funkce definována.

Příklad. $y = \arcsin\frac{1}{x}$ Def. obor : $(-\infty,-1\rangle$, $\langle 1,+\infty)$

Grafem funkce budou dva nekonečné oblouky s krajním bodem. První oblouk má krajní bod $K_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, druhý oblouk má krajní bod $K_2(1,\frac{\pi}{2})$.

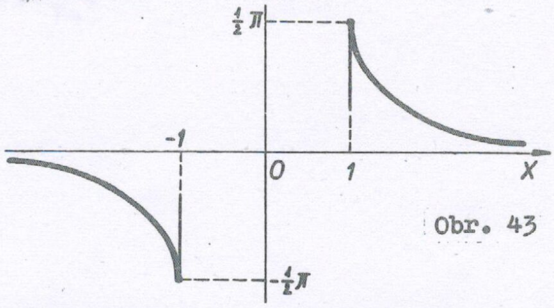
$$y' = \frac{-|x|}{x^2.\sqrt{x^2-1}} \begin{cases} \text{pro } x \geqq 1 : & y' = -\dfrac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}, \quad y'' = \dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \\ \text{pro } x \leqq -1 : & y' = \dfrac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}, \quad y'' = -\dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

Obvyklé vyšetření průběhu dané funkce vede jen k asymptotě $y = 0$, $\frac{\quad +}{-}$.
Derivace funkce neexistuje pro $x=0$ a pro $x=\pm 1$. Okolí bodu 0 nevyšetřujeme, poněvadž funkce není v něm definována. Zkoumáme tedy jen derivaci v pravém okolí bodu 1 a v levém okolí bodu -1. Vypočtěte sami limity :

$$\lim_{x\to 1+}\frac{-1}{x.\sqrt{x^2-1}} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1-}\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

V krajních bodech $K_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, $K_2(1,\frac{\pi}{2})$ má graf svislé polotečny. Viz obr. 42[cd] .

Kontrolujte výpočty na grafu v obr. 43.



Obr. 43

Příklad. $y = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$ Def. obor : $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Grafem funkce jsou dva nekonečné oblouky bez krajního bodu.
V tomto případě můžeme užitím limity vyšetřovat okolí bodu x=0, poněvadž funkce není definována jen v tomto bodě.

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty}\operatorname{arccotg} t = \pi ; \qquad \lim_{x\to 0+}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty}\operatorname{arccotg} t = 0$$

Pro x=0 má daná funkce bod nespojitosti I. druhu (různé vlastní jednostranné limity)

Sami užijte derivací $y' = \frac{1}{x^2+1}$, $y'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ k obvyklému vyšetření funkce.

Asymptoty o směrnici k :

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = 0 ; \quad q = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}. \text{Asymptota } y = \frac{\pi}{2}, \frac{-}{\quad +}.$$

Pro sestrojení grafu funkce v okolí bodu x=0 volíme pomocnou funkci $y = \varphi(x)$

NEURČITÉ VÝRAZY. L'H O S P I T A L O V O PRAVIDLO.

Při výpočtu limity lomené funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ v bodě a jsme po dosazení x=a přicházeli k výrazu $\frac{0}{0}$, který jsme ponechali jako symbol, neboť jako zlomek neměl smysl. Poznali jsme mnoho lomených funkcí, jež pro určité x vedly k tomuto symbolu a jejichž limity byly většinou od sebe různé.

Symbol $\frac{0}{0}$, který sám o sobě nemá žádný početní význam, patří ke skupině tak zvaných neurčitých výrazů, jež zavádíme užitím limit dvou funkcí.

Neurčitý výraz $\frac{0}{0}$: (114)

Je-li $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$, pak $\frac{u(x)}{v(x)}$ je pro $x \to a$ neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$

Jestliže k symbolu $\frac{0}{0}$ můžeme přijít většinou pouhým dosazením určitého čísla do dané funkce, není to možné u jiných neurčitých výrazů, jež jsou vyjádřeny užitím symbolu ∞. Nelze totiž zapsat, že nějaký výraz dává po dosazení symbol ∞ a sám symbol ∞ nelze také dosazovat, neboť není číslem, kdežto nula je číslo.

Z neurčitých výrazů, obsahujících symbol ∞, je nejzákladnější

neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$: (115)

Je-li $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \pm\infty$, pak $\frac{u(x)}{v(x)}$ je pro $x \to a$ neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$

Ostatní neurčité výrazy $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 0^∞ , ∞^0 , 1^∞ zavedeme postupně až při výpočtu limit některých funkcí tvarů $u(x).v(x)$, $u(x) - v(x)$, a $[u(x)]^{v(x)}$.

Limity funkcí, jež vedou k neurčitým výrazům $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ vypočítáváme užitím tzv. L'HOSPITALOVA PRAVIDLA, které stručně zapíšeme :

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u''(x)}{v''(x)} = \dots\dots\dots = \lim_{x \to a} \frac{u^{(n)}(x)}{v^{(n)}(x)} \qquad (116)$$

Když po případné úpravě je podíl $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ opět neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, určujeme dále $\lim \frac{u''(x)}{v''(x)}$. Podle potřeby užíváme l'Hospitalova pravidla až po limitu, která se dá vypočítat.

I. Výpočet limity funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ již po užití prvních derivací $u'(x)$, $v'(x)$.

/86/. příklad: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x.\cos x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - x.\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3} \lim \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}$

256. cvičení. Vypočtěte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$, [1]; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$, $[-\frac{1}{2}]$; c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$; d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$, [1];

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}]$; f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{\cos \frac{\pi}{2} x}$, g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$, [2];

Výsledky: f) $[\frac{4}{\pi}]$; c) [0]

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x.\cos x}$, [2]; k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$, [a−b]; m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$, [1].

DESÍTKA ÚLOH čís 50 Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-1+\cos 3x}{e^{x}-e^{-x}}$, $[\frac{1}{2}]$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\ln\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}}$, [− a];

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}-\cos bx}$, $[\frac{a}{b}]$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x}}$, [0];

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^3-2x^2-x-6}$, $[\frac{3}{70}]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x.\sqrt{1-x^2}}$, $[\ln\frac{a}{b}]$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x}$, [1]; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$, $[\frac{1}{3}]$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-1}{\ln x}$, [1]; 10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arcsin(x-a)}{\operatorname{tg}(x-a)}$ [1].

II. Výpočet limity funkce po vícenásobném užití l'Hospitalova pravidla.

37/. příklad: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

DESÍTKA ÚLOH čís. 51 Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$, [0]; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2a}}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$, $[\frac{1}{8}]$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^3}$, $[\frac{1}{3}]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)^2}{\sin^3 x}$, [0]; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1}{\cos x+\frac{1}{2}x^2-1}$, [1]; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, $[\frac{1}{6}]$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, [0]; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-x}{1-x+\ln x}$, [−2]; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$, [1]; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n}-nx+n-1}{(x-1)^2}$ $[\frac{(n-1)n}{2}]$.

II. Výpočet limity funkce úpravou na součin limit funkcí.

Než užijeme znovu l'Hospitalova pravidla, pokusíme se nahradit funkci součinem unkcí, jejichž limity dovedeme vypočítat dřívějšími metodami nebo opět pravidlem 'Hospitalovým.

88/. příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x.(\sqrt{1-x^2}-1-x^2)}{(1-\cos^3 x)(1+x^2).\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1-x^2}{1-\cos^3 x}=\frac{1}{1.1}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-2x}{3\cos^2 x.\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x.(1+2\sqrt{1-x^2})}{3\cos^2 x.\sin x.\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos^2 x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.\lim_{x\to 0}\frac{1+2.\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}.1.\frac{3}{1}=-1$$

257. cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$, [1]; b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $a>0, b>0$, [1]; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$, [−2]

DESÍTKA ÚLOH čís. 52 Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-sinx}{x^3}$, $\left[\frac{1}{2}\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx - x}{arcsinx - x}$, $[-1]$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $\left[\dfrac{a^2}{b^2}\right]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$, $\left[\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right]$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$, $[-e]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3.\sin x}{(1-\cos x)^2}$, $[4]$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2.\cos x}{1-\cos x}$, $[2]$; 8) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\ln(1-x) + tg\frac{\pi}{2}x}{cotg\,\pi x}$, $[-2]$; 9) $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{\cos x.\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$, $[\cos a]$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 1}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$, $[-3]$.

Neurčité výrazy $0.\infty$

(117)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, pak $u(x).v(x)$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $0.\infty$

Při výpočtu limity převádíme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, abychom mohli užít l´Hospitalova pravidla.

/89/.příklad: $\lim\limits_{x\to 1} (1-x).tg\frac{\pi}{2}x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{cotg\frac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{\dfrac{-1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}.\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$

258.cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\frac{a}{x}$, $[a]$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(2-x).cotg\,\pi x$, $\left[-\frac{1}{\pi}\right]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 53 Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin(x-a).cotg(x-a)$, $[1]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1).cotg\,x$, $[1]$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x.(e^{\frac{1}{x}} - 1)$, $[1]$; 4) $\lim\limits_{x\to a} (\sin a - \sin x).tg\frac{\pi x}{2a}$, $\left[\frac{2a}{\pi}\cos a\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} (\pi - 2.arctg\,x).\ln x$, $[0]$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.\ln\cos\frac{\pi}{x}$, $\left[-\frac{\pi^2}{2}\right]$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{x})$, $[2\pi]$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2)$, $[\ln^2 a]$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\ln\frac{2a+x}{a+x}$, $[a]$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+a).\ln(1 + \frac{a}{x})$, $[a]$

Neurčité výrazy $\infty - \infty$

(118)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, pak $[u(x)-v(x)]$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $\infty - \infty$

Obyčejně jde o rozdíl lomených funkcí. Uvedením na společného jmenovatele obdržíme typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Obecně lze užít úpravy: $u - v = \dfrac{1}{u^{-1}} - \dfrac{1}{v^{-1}} = \dfrac{v^{-1} - u^{-1}}{u^{-1}.v^{-1}}$

/90/.příklad: $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = L$; $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - 1} = \infty$. Typ: $\infty - \infty$

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1 - x}{x.(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

259. __cvičení__. Vypočtěte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$, $[0]$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$, $[0]$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$, $[0]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 54

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$, $[-\frac{1}{2}]$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x.\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $[\frac{1}{6}]$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $[\frac{1}{3}]$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2.\cos x}\right)$, $[-1]$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$, $[\frac{1}{2}]$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$, $[-\frac{1}{2}]$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, $[\frac{1}{2}]$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$, $[\frac{1}{12}]$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$, $[0]$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$, $[\frac{1}{5}]$

__Neurčité výrazy 0^0, ∞^0, 0^∞, 1^∞, k nimž vede funkce__ $[u(x)]^{v(x)}$ (119)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu 0^0

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu ∞^0

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu 0^∞

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. váraz typu 1^∞

Při výpočtu limity $L = \lim\, [u(x)]^{v(x)}$ postupujeme dvojím způsobem (jako při derivování takové funkce) :

1. způsob. (Rovnost logaritmujeme)

$$\ln L = \ln[\lim u(x)^{v(x)}] = \lim[\ln u(x)^{v(x)}] = \lim[v(x).\ln u(x)] = m$$

Existuje-li $\lim\, [v(x).\ln u(x)] = m$, pak $L = e^m$.

2. způsob. (Užijeme rovnosti $a^b = e^{b.\ln a}$ pro $a > 0$)

$$L = \lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x).\ln u(x)} = e^{\lim [v(x).\ln u(x)]} = e^m ,$$

za předpokladu, že limita v exponentu existuje.

Oba způsoby vedou k typu $0 \cdot \infty$ a další úpravou na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

/91/. __příklad__: $\lim\limits_{x\to 1-} (1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x} = L$; $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-} \cos\frac{\pi}{2}x = 0$. Typ 0^0.

2. způsob:

$$L = \lim_{x\to 1-} e^{\cos\frac{\pi}{2}x.\ln(1-x)} = e^{\lim \cos\frac{\pi}{2}x.\ln(1-x)} = e^m = e^0 = 1 \text{, neboť}$$

$$m = \lim_{x\to 1-}\cos\tfrac{\pi}{2}x.\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-}\frac{\ln(1-x)}{(\cos\frac{\pi}{2}x)^{-1}} = \lim_{x\to 1-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{(\cos\frac{\pi}{2}x)^{-2}.\sin\frac{\pi}{2}x.\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}.\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}.\lim_{x\to 1-}\frac{(\cos\frac{\pi}{2}x)^2}{1-x} = -\frac{2}{\pi}.1.\lim_{x\to 1-}\frac{-2\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x.\frac{\pi}{2}}{-1} = 0$$