přednáška 04: nekonala se, máme náskok, musíme srovnat krok cvičení a přednášky

$\boxed{\text{cvičení 04}}$: věta o součtu psti, příklady různého typu, podmíněná pst – úvod

↖ zadání většiny příkladů viz slajdy 04cviceni-soucet-ruzne-podminka.pptx

Příklad 1, str. 116 d), zadání v souboru 04cviceni – slajd číslo 4

Jedná se o příklad na sjednocení náhodných jevů, které mají neprázdný průnik:

$$P(F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nebo}}}{\cup} H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H) = \frac{1826 + 76 - 13}{4000} = 0{,}47225$$

Jinými slovy, zákazníci v průniku $F \cap H$ nedostanou dva dárky, to už by firma zkrachovala! Jeden dárek jim musí stačit!!

Příklad 2, 04cviceni.pdf, slajd 5,6,7: slovní situaci ze slajdu 5 zakreslíme do množin na slajdu 6, a pak se ptáme (viz slajd 7): které situace jsou příznivé našemu jevu, že letadla dnes zůstanou přes noc?

letadla ze včerejška ↘ ↙ letadla, co dnes vzlétla, ale vrátila se

$$P(A) = \frac{2 + 3 + 16}{46} = 0{,}4565217$$

↖ celkový počet všech letadel, součet všech čísel na obr.

nová letadla, co dnes přiletěla

Příklad 3

(slajdy 8, 9 – podobný příkladu 2, zkuste pochopit)

Příklad 4: Tři lidé si v šatně divadla uschovali klobouk. Šatnářka po představení vydává klobouky náhodně. Jaká je pst, že aspoň 1 osoba dostane klobouk správně?

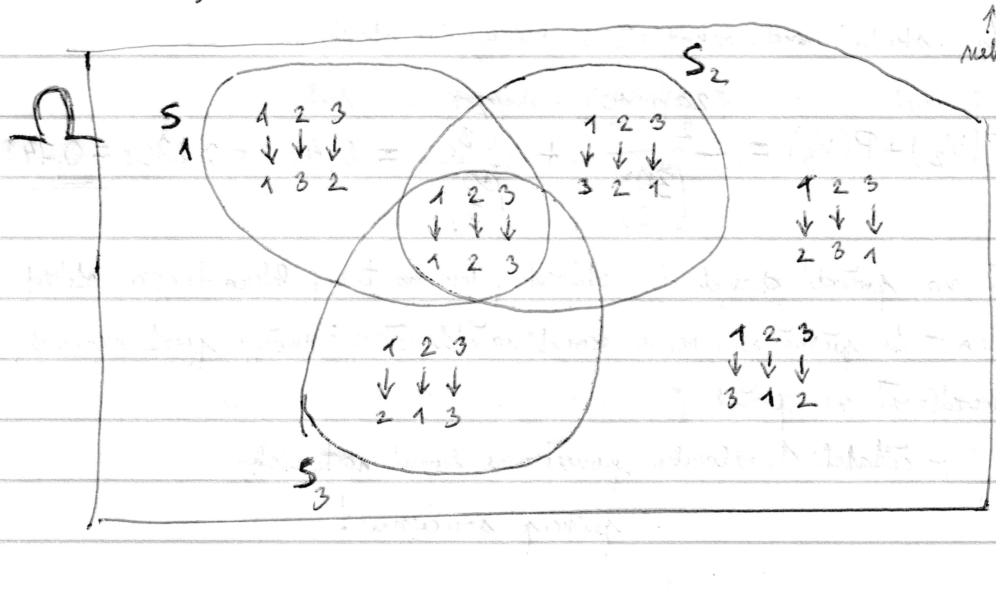
Řešení: $S_1$ ... člověk první dostane správně svůj klobouk

$S_2$ ... –"– druhý –"–

$S_3$ ... –"– třetí –"–

} máme opět určit pst sjednocení $P(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

↑ nebo ↑ nebo




Jedna možnost řešení je si situaci nakreslit množinově, všech možných výsledků je 6, příznivé jsou 4:

$$P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \frac{4}{6} = 0{,}6667$$

tento příklad bude teoretická otázka u zkoušky

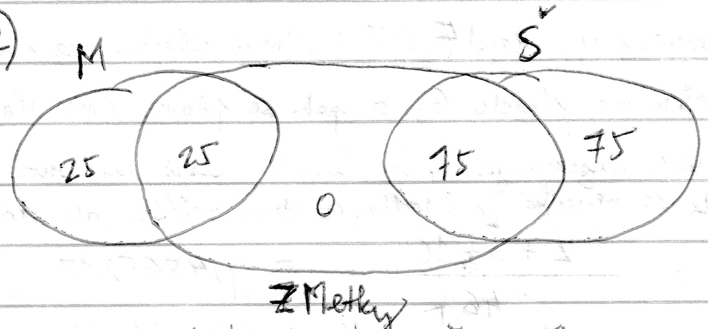
Jiná možnost řešení je použít tzv. **větu o součtu pstí**, která počítá pst obecného sjednocení jevů (je odvozena z principu inkluze a exkluze z diskrétní matematiky):

$$\boxed{\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) \\ - P(S_2 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \end{aligned}}$$

$$P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{0{,}6667}$$

(dosazení opět viz obrázek – v čitateli jsou použité výsledky daných jevů (výsledků v $\Omega$ na předchozí straně)

str. 120, př. 2 (zadání slajd 12)




Opět si napíšeme do jednotlivých částí množin počty prvků.

Pak

$$P(M \cup ZM) = \frac{25+100}{200} = 0{,}625$$

nebo

kdo by chtěl užít větu o součtu pstí, může: $P(M \cup ZM) = P(M) + P(ZM) - P(M \cap ZM) = \frac{50}{200} + \frac{100}{200} - \frac{25}{200} = 0{,}625$

str. 120, př. 4 (zadání slajd 13) – opět se jedná o pst sjednocení jevů: o těchto jevech víme, že nemohou nastat současně, jejich průnikem je tedy prázdná množina:

$V_2$ ... student bude vědět 2 otázky z vytažených tří

$V_3$ ... student bude znát/vědět všechny tři otázky!

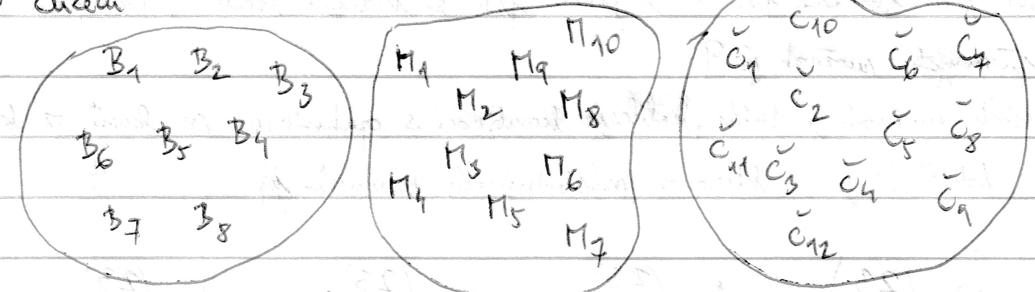
$$P(V_2 \cup V_3) = P(V_2) + P(V_3) = \frac{\binom{20}{2} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} + \frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = 0{,}468 + 0{,}2808 = \underline{0{,}7488}$$

nezáleží na pořadí daných tří otázek, jen na tom, která trojice otázek bude vytažena – to přesně je význam kombinačních čísel: určují počet variant, ve kterých nezáleží na pořadí;

v čitateli 1. zlomku používáme kombinatorický princip součinu!

str. 121/př. 6, zadání slajd 14:

Kupodivu jsme při rozboru příkladu v pondělí přišli na to, že kuličky musíme svým způsobem považovat za rozlišitelné – jako bychom měli na přednášce 8 lidí ze cvičení 1, 10 lidí ze cvičení 2, 12 lidí ze cvičení 3 a zajímalo nás, jaká je šance, že při výběru tří lidí jsou všichni ze stejného cvičení:




$$P(A) = \frac{\binom{8}{3}+\binom{10}{3}+\binom{12}{3}}{\binom{30}{3}} = \underline{\underline{0{,}0975}}$$

Jak by tedy zněla úloha, kde bychom objekty museli považovat za nerozlišitelné a příznivé případy by byly jenom tři? Asi takto: Lukáš Cik si šel koupit tři zákusky do cukrárny, kde ještě měli 8 zákusků bílých, 10 modrých a 12 černých (p.s. Lukáš Cik jí zdravě, takže tento příklad neodpovídá realitě). Vůbec nevíme nic o jeho zákuskových preferencích a oblibě – přesto i tak bychom, aniž víme, co si koupil, chtěli vědět, jaká je pst, že si koupil 3 zákusky téže barvy.

předpokládejme, že Lukáš nemá možnost → BBBBBBBB
si vybírat, zákusky jsou z tácu odebírány → MMMMMMMMMM
z jedné strany → ČČČČČČČČČČČČ

- příznivé případy jsou jen 3: BBB, MMM a ČČČ
- u všech možných výběrů trojic nezáleží na pořadí, pouze záleží na tom, kolik ks kterého zákusku si Lukáš vybral: tedy počet všech možností je roven počtu kombinací s opakováním 3 kusů ze 3 druhů

počet různých výběrů n kusů z k druhů je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

tedy $P(L) = \frac{3}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} = \underline{\underline{0{,}3}}$

Předchozí příklad nebyl ovšem dosti pedagogicky názorný, protože n i k jsou v něm stejná čísla. Přeformulujme tedy příklad pro n různé od k: Někdo naprosto jiný než Lukáš Cík (Lukáš jí zdravě, takže by ho to ani nenapadlo) si jde koupit 15 zákusků do cukrárny, kde mají 9 druhů zákusků v nepřeberném množství, takže si lze koupit i všech 15 zákusků stejného druhu. Nevíme, které si koupil, a tak můžeme jen počítat pst: s jakou pstí si koupil všech 9 zákusků stejného druhu?

Řešení:
- „příznivých" možností je 9
- všech možností je tolik, ~~kolik~~ je kombinací s opakováním n kusů z k druhů, takže to je... která z následujících variant je správná?

a) $\binom{23}{8}$ b) $\binom{23}{9}$ c) $\binom{23}{15}$ d) $\binom{23}{14}$

odpověď: některé z těchto variant jsou stejné díky vzorci $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

správné odpověď: a) i c) ! Přestože studenti měli vzorec na tabuli vzorec, odpověděl správně jediný Josef Steigl z pondělního cvičení, který má u mne balíček oříšků kešu, až pomine bezkontaktní karanténa, dá-li Pán Bůh (říkal jsem čokoládu? Ale oříšky kešu jsou zdravější!)

Ovšem čtenáři tohoto doporučeného textu jistě všichni odpověděli správně variantu (a), protože jsem na předchozí straně uvedl vzorec pro počet kombinací s opakováním v lepším tvaru, nikoli v zavádějícím tvaru, jak je uveden ve většině učebnic.

$$\text{Tedy celkem } P(\text{všech 15 zákusků je stejného druhu}) = \frac{9}{\binom{23}{8}} \doteq 0{,}0000183556$$

(na kombinace s opakováním se vás v tomto předmětu ptát nebudu, ale zeptám se vás na ně u otázky KOMBINATORIKA u bakalářských zkoušek, takže je záhodno si vzorec i příklad o 15 zákuscích z 9 druhů pamatovat)

↓

v kombinatorice bych se zeptal pouze na jmenovatel toho zlomku, tj. kolik je všech možných variant koupí 15 zákusků z 9 druhů (nezáleží na pořadí)

Str. 121, př. 8, zadání slajd 15: hezký příklad na výpočet pravděpodobnosti pomocí opačného jevu,

řešení lze vyčíst dostatečně podrobně z výsledku v textu 08-d-statistika.pdf, str. 216

str. 124, př. 2, zadání slajd 22: PŘÍKLAD NA PODMÍNĚNOU PST při hodu dvěma kostkami,

a) s jakou pst padla aspoň jedna šestka, víme-li, že padl součet 8?

! [Budeme používat následující druh zápisu, který se prosím naučte:

$P(N|V)$ ... pst jevu N (to nevíme, zda nastal) za podmínky V (o výsledku víme, že leží v množině V)]

v souladu s tímto zápisem můžeme spočítat

$A_6$ ... padla aspoň jedna šestka ze dvou kostek

$S_8$ ... padl součet osm na těchto dvou kostkách

$$P(A_6|S_8) = \frac{2}{5} = \underline{0{,}40}$$

↑ víme, že nastalo

↑ dosud nevíme, zda nastal; chceme znát pst tohoto jevu

$$S_8 = \{[2,6],[6,2],[3,5],[5,3],[4,4]\}$$

(tedy při řešení nevypisujeme všechny možné případy, ale jen ty, které splňují $S_8$)

b) s jakou pst padl součet větší než 10 (tedy 11 nebo 12), víme-li, že padla aspoň jedna šestka?

Řešení: musíme vypsat všechny varianty jevu, o kterém víme, že nastal:

$$A_6 = \{[6,1],[6,2],[6,3],[6,4],[6,5],[6,6],[1,6],[2,6],[3,6],[4,6],[5,6]\}$$

$$P(S_{11,12}|A_6) = \frac{3}{11} \doteq \underline{\underline{0{,}27273}}$$

Příklady na samostatné řešení a přípravu na prověrku:

① str. 126, př. 8, zadání slajd 19
② str. 126, př. 6, zadání slajd 20

} výsledky viz soubor (15) 08-d-statistika.pdf, str. 217

③ slajdy prednaska03.pptx, příklad na slajdu 27
(podrobné vyřešení na slajdech 27 – 35 té přednášky 3)