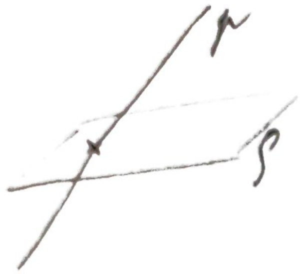
Repetitorium SŠ matematiky 2

6. cvičení

- do 5. 4. 2020 nahrajte do odevzdávárny „cv. 6" v jednom souboru následující příklady:
  - příklady 1; 2; 3
  - alespoň jeden z příkladů 4; 5; 7
  - alespoň dva z příkladů 6; 8; 9
- konzultace k tomuto cvičení v MS Teams 1. 4. 2020

6. cvičení

Vzájemná poloha přímky a roviny



1) $p \parallel \rho$ – nemají žádný průsečík

2) p leží v ρ – normálový vektor ρ je kolmý na směrový vektor p (i u 1)) a libovolný bod přímky p leží v rovině ρ

3) $p \nparallel \rho$ – rovina má s přímkou právě jeden průsečík

Vzájemná poloha dvou rovin

- nejlépe se určuje přes normálové vektory

$\rho \parallel \varphi$, $\rho = \varphi$, $\rho \nparallel \varphi$ (mají průsečnici = společná přímka)

- rozmyslete si možnosti vzájemné polohy 3 rovin

Př. 1: Určete vzájemnou polohu rovin α, β. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici. $\alpha: 2x-5y+4z-10=0$

a) $\beta: 4x-10y+8z-10=0$

b) $\beta: x-y-z-2=0$

c) $\beta: 4x-10y-2z-10=0$

Řešení: a) $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \neq \beta$

b) $\alpha \nparallel \beta$, $p: x=3t,\ y=-2+2t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R}$

c) $\alpha \nparallel \beta$, $p: x=3+\frac{5}{2}s,\ y=s,\ z=1,\ s\in\mathbb{R}$

Př. 2: Jsou dány body $A[2,0,3]$, $B[2,2,-7]$, $C[3,-1,-2]$ a rovina $\rho: 3x+y-2z-5=0$

a) veďte bodem A přímku p, $p \parallel BC$

b) ukažte, že p je různoběžná s rovinou ρ, najděte průsečík

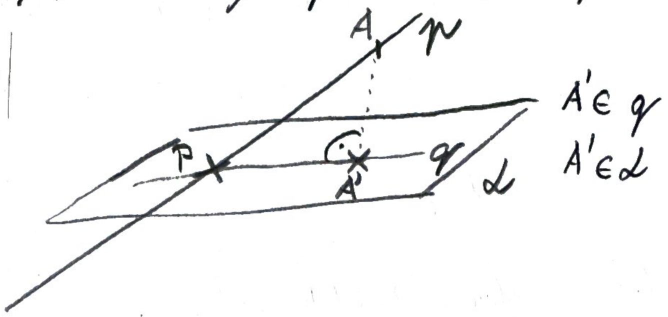
Řešení: a) $p: x=2+t,\ y=-3t,\ z=3+5t,\ t\in\mathbb{R}$ b) $P[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$

6. cvičení

Př. 3: Je dána rovina $\alpha: 2x+3y-z-6=0$ a přímka $p: x=1-s$, $y=2+2s$, $z=4+3s$, $s\in\mathbb{R}$

a) určete jejich vzájemnou polohu, případně průsečík

b) napište rovnici přímky q, která je pravoúhlým průmětem přímky p do roviny α.



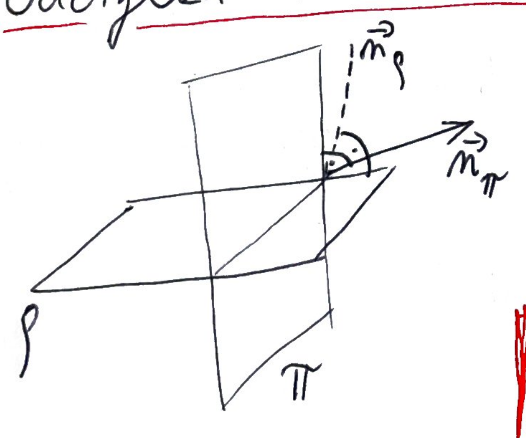
Řešení: $P[-1,6,10]$, $q: x=-1+16s$
$y=6-25s$
$z=10-43s$ $s\in\mathbb{R}$

Vzdálenost bodu od roviny

- odvození je stejné jako u vzdálenosti bodu od přímky
- bodem vedeme kolmici k rovině, nalezneme průsečík kolmice a roviny a určíme vzdálenost průsečíku od zadaného bodu

$$\boxed{\text{pro } P[p_1,p_2,p_3] \text{ a } \rho: ax+by+cz+d=0 \quad |P\rho| = \frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$ platí

Odchylka dvou rovin

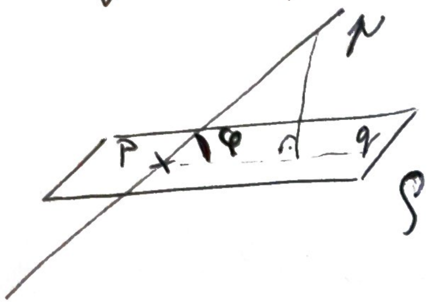


odchylka dvou rovin určujeme jako odchylka jejich normálových vektorů (z obecné rovnice roviny)

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\rho|\cdot|\vec{n}_\pi|}}$$

6. cvičení

Odchylka přímky a roviny



- odchylku přímky a roviny určujeme jako odchylku přímky od jejího pravoúhlého průmětu do roviny

- pravoúhlý průmět přímky nalezneme následovně:
  - jakékoli dva body přímky si kolmo promítneme na rovinu, tzn. vytvoříme kolmici k rovině procházející daným bodem a nalezneme průsečík této kolmice s rovinou
  - je výhodné za jeden z těchto dvou bodů volit průsečík přímky a roviny
  - z průmětů na rovinu vytvoříme novou přímku
  - odchylku nalezneme tak, že spočítáme odchylku směrových vektorů přímky a jejího průmětu

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

Př. 4: Určete odchylku rovin $\alpha: -x+2y+z+5=0$

$\beta: x+y+2z+7=0$

Řešení: $\varphi = 60°$

6. cvičení

Př. 5: Určete vzdálenost bodu Q od roviny ρ.

$Q[-3,-2,3]$, $\rho: 2x-y-2z+1=0$

Řešení: $d=3$

Př. 6: Napište obecnou rovnici roviny α, která je kolmá k rovině $\beta: 2x+3y+2z-1=0$ a obsahuje přímku AB, $A[5,5,3]$, $B[-1,0,1]$.

Řešení: $\alpha: x-2y+2z-1=0$

Př. 7: Jsou dány body $A[1,-2,-2]$, $B[2,-1,-1]$, $C[1,-1,-2]$, $M[0,2,-2]$. Určete vzdálenost bodu M od roviny ABC.

Řešení: $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Př. 8: Je dána přímka $p: x=1+t$, $y=2-t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, rovina $\alpha: 3y+8=0$ a rovina $\beta: x=5-r-3s$, $y=16+r-3s$, $z=3+4r$, $r,s\in\mathbb{R}$.

Určete a) odchylku p,α
b) odchylku p,β
c) odchylku α,β

Řešení: a) $35°16'$ b) $74°12'$ c) $48°11'$

Př. 9: Jsou dány přímky $p: x=1-t$, $y=1+t$, $z=3+2t$, $t\in\mathbb{R}$, $q: x=1-2s$, $y=s$, $z=3+3s$, $s\in\mathbb{R}$ a rovina $\rho: x+2y-z+2=0$.

Určete polohu přímek a rovnici jejich příčky ležící v rovině ρ.

Řešení: mimoběžky, $n: x=1-2t,\ y=3t,\ z=3+4t,\ t\in\mathbb{R}$