Repetitorium SŠ matematiky 2

10. cvičení

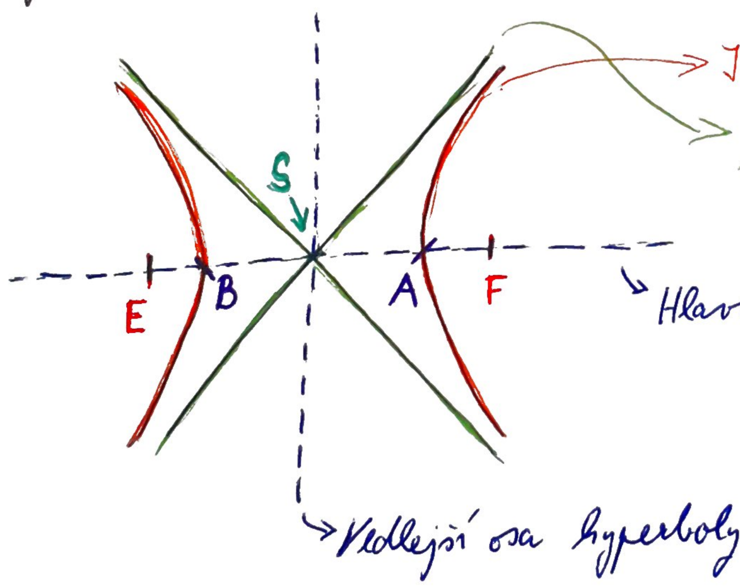
- do 3. 5. 2020 nahrajte do odevzdávárny „cv. 10" v jednom souboru následující příklady:
  - příklady 1, 2, 6
  - alespoň jeden z příkladů 3, 4, 5
- konzultace k tomuto cvičení proběhne v MS Teams dne 29. 4. 2020 v 16 hodin.

10. cvičení – hyperbola

HYPERBOLA

V rovině jsou dány body E, F $(E \neq F)$ a dále je dáno kladné číslo a tak, že $2a < |EF|$. Pak množina všech bodů roviny, pro které platí $\boxed{\big||XF| - |XE|\big| = 2a}$ se nazývá hyperbola.

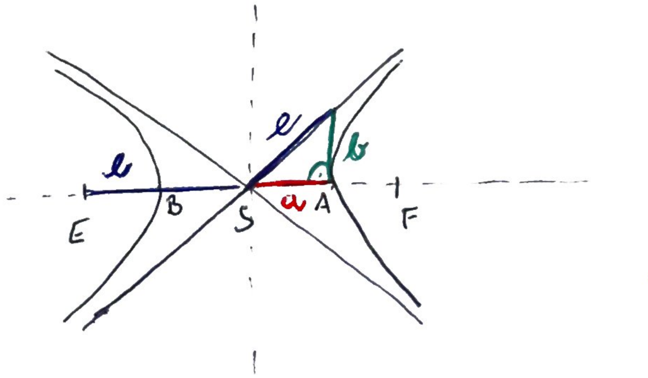
Body E, F jsou jejími ohnisky, číslo a je tzv. hlavní poloosa hyperboly. Číslo e, pro které platí $|EF| = 2e$, se nazývá výstřednost (excentricita) hyperboly.



A, B – vrcholy hyperboly

E, F – ohniska hyperboly

S – střed hyperboly



a – hlavní poloosa, $a = |SA| = |SB|$

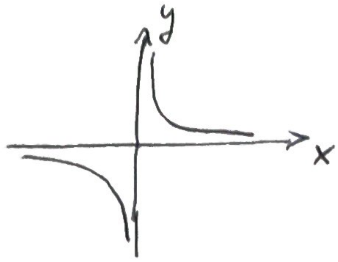
b – vedlejší poloosa

e – výstřednost (excentricita), $e = |SE| = |SF|$, $e^2 = a^2 + b^2$

Je-li $a = b$, jsou k sobě asymptoty kolmé a jedná se o ROVNOOSOU hyperbolu.

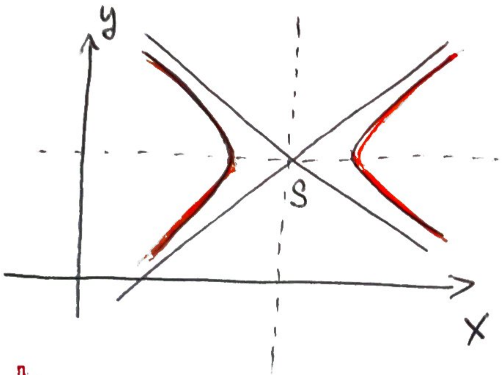
10. cvičení

S hyperbolou jste se setkali jako s grafem lomené funkce, případně nepřímé úměrnosti. Jednalo se o rovnoosou hyperbolu.



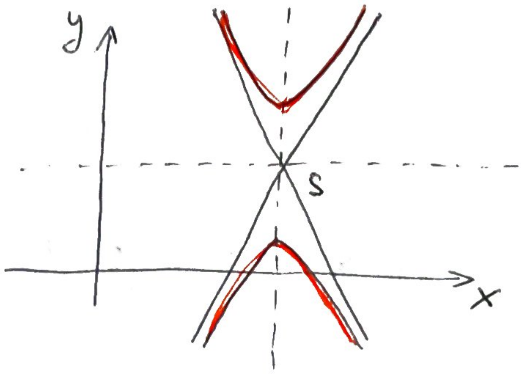
Zde se budeme zabývat hyperbolami, které mají svoji hlavní osu rovnoběžnou s osou x, případně s osou y.

Hlavní osa ∥ s x



$S[m,n]$

Hlavní osa ∥ s y



$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{\frac{(y-n)^2}{b^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}=1}$$

Asymptoty

- přímky, ke kterým se hyperbola přibližuje
- mají směrnice $\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}$

$$\boxed{a_1: \frac{x-m}{a}-\frac{y-n}{b}=0 \qquad a_2: \frac{x-m}{a}+\frac{y-n}{b}=0}$$

10. cvičení

Př. 1: Určete ohniska hyperboly $10x^2 - 5y^2 = 50$. Napište rovnici hyperboly, která má stejné asymptoty, ale prochází bodem $M[10,0]$

Řešení: $E[\sqrt{15}, 0]$, $F[-\sqrt{15}, 0]$; $10x^2 - 5y^2 = 1000$

Př. 2: Napište rovnici hyperboly s ohnisky $E[0,2]$, $F[0,6]$, která prochází bodem $M[0,3]$. Hyperbolu nakreslete. *

Př. 3: Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[5,2]$, má střed $S[0,0]$ a má asymptotu $2x + 3y = 0$. Určete velikosti poloos hyperboly

Řešení: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$, $a = 4$, $b = 8/3$

Př. 4: Je dána hyperbola $16x^2 - 25y^2 = 400$. Určete rovnice a odchylku jejích asymptot. Vypočítejte obvod a obsah trojúhelníku omezeného asymptotami a tečnou hyperboly v jejím vrcholu.

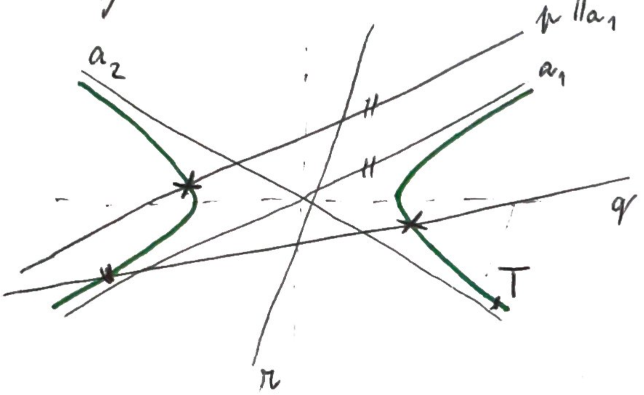
Řešení: $y = \pm\frac{4}{5}x$, $\alpha = 77°19'$, $o = 20{,}8$, $S = 20$

* Řešení: $3y^2 - 24y - x^2 + 45 = 0 \rightarrow \frac{(y-4)^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$

10. cvičení

Hyperbola a přímka

- asymptoty neprotínají hyperbolu v žádném bodě, všechny přímky s nimi rovnoběžné protínají hyperbolu v právě jednom bodě (přímka p)



- ostatní přímky mohou hyperbolu protínat ve 2 bodech (přímka q), v žádném bodě (přímka r), nebo jsou tečnami hyperboly

Tečna hyperboly

hyperbola $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ má tečnu t v bodě $T[t_1, t_2]$

$$\boxed{t: \frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2}=1}$$

Podobně pro ~~p~~ hyperbolu s hlavní osou $\parallel$ s y.

Př. 5: Najděte všechny tečny hyperboly $2x^2-y^2=2$ rovnoběžné s přímkou $p: y=2x$.

Řešení: $y=2x\pm\sqrt{2}$

Př. 6: Bodem $A[2,1]$ veďte všechny přímky, které mají s hyperbolou $x^2-2y^2=2$ jediný společný bod.

Řešení: $y=x-1$; $x-2\pm\sqrt{2}(y-1)=0$