Pokud se díváme na řádky matice A jako na vektory,

**Důležité označení**

$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$

$\vdots$

$\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$, lze determinant $|A| = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ chápat jako zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které přiřadí $n$ vektorům v daném pořadí číslo

$$\boxed{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

Při tomto označení je zobrazení $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ antisymetrické, tj. záměnou 2 různých řádků v matici se změní znaménko determinantu:

**D2**

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_l, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)$$

[Důkaz: záměnou dvou indexů se jedna inverze v permutaci přidá nebo ubere, tj. před každým součinem $n$ prvků bude v sumě opačné znaménko; tedy i před celým determinantem bude opačné znaménko ]

**Důsledek vlastnosti D2:** Determinant matice A se dvěma stejnými řádky je roven 0.

[Důkaz: když zaměníme tyto stejné řádky, v matici se nic nestane, čili platí
$\det|A| = -\det|A| \Rightarrow \det A = 0$; protože jen 0 splňuje tu vlastnost, že sama se rovná číslu, které se liší pouze znaménkem ]

**Def. 6.** Pokud $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ jsou vektory, tak vektor ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou reálná čísla)

$$\vec{v} := \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k$$

||| lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$

(lineární kombinace vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ je jakýkoli součet násobků těchto vektorů)

Př. 3 Vektor $\vec{z} = (2; 10)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

[řešení: hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

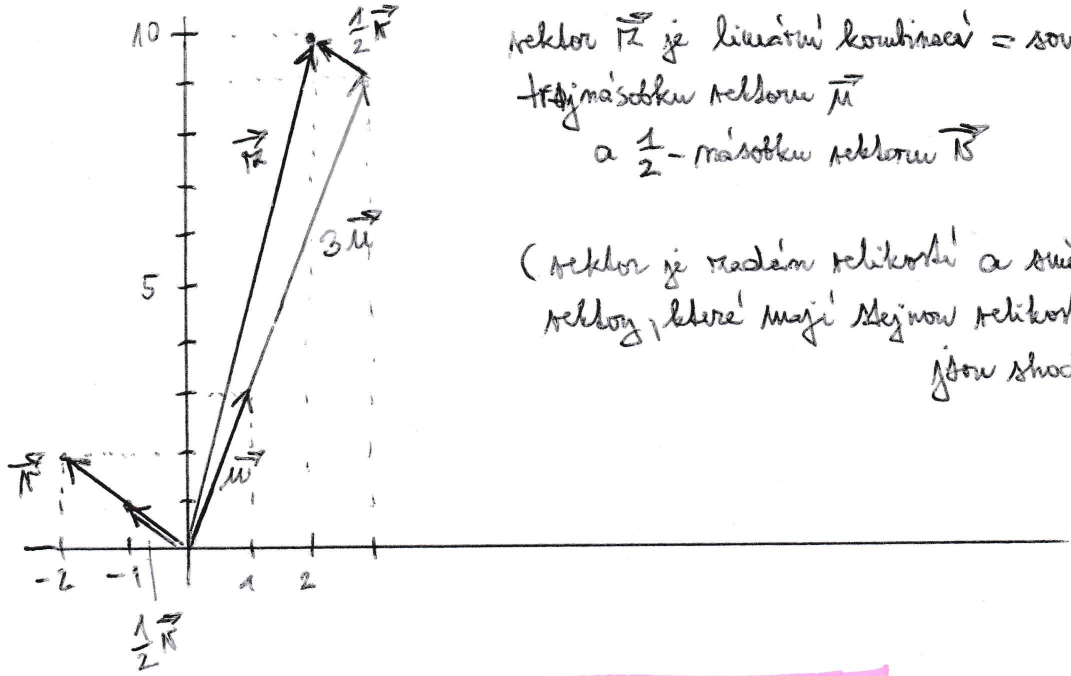
přepíšeme tuto rovnost do souřadnic:

$2 = \alpha_1 - 2\alpha_2$

$10 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$

sečtením obou rovnic: $12 = 4\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$

tedy $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ... tedy vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ je lineární kombinací vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$




vektor $\vec{r}$ je lineární kombinací = součtem trojnásobku vektoru $\vec{u}$ a $\frac{1}{2}$-násobku vektoru $\vec{v}$

(vektor je zadán velikostí a směrem; vektory, které mají stejnou velikost i směr, jsou shodné)

**D3.** $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ je zobrazení lineární v každé složce, tj.

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}}_{\substack{k\text{-tý vektor} \\ \text{pro pevné } k}}, \dots, \vec{a}_n) = \alpha \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{u}, \dots, a_n) + \beta \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{a}_n)$$

— je lineární kombinací vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

[Dk.: $\sum (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} a_{1 j_1} \cdots \underline{(\alpha \cdot u_{k j_k} + \beta \cdot v_{k j_k})} \cdots a_{n j_n} =$

PLUS

vytkneme $\alpha, \beta$ a rozdělíme na dva součty

$= \alpha \sum (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} a_{1 j_1} \cdots u_{k j_k} \cdots a_{n j_n} + \beta \sum (-1)^{N(j_1, \dots, j_n)} a_{1 j_1} \cdots v_{k j_k} \cdots a_{n j_n} =$

$= \alpha \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{a}_n) + \beta \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{v}, \dots, a_n)$ ]

Poznámka: Vlastnost D3 lze přirozeně rozšířit tak, že $k$-tý vektor není lineární kombinací pouze dvou vektorů, ale $l$ vektorů (a $l$ je číslo větší než 2).

**Důsledek vlastnosti D3:** Vynásobením $k$-tého řádku matice $A$ se stejným číslem vynásobí i celý determinant.

(plyne z D3: $\alpha \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \boxed{\vec{a}_k}, \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \boxed{\alpha \cdot \vec{a}_k}, \dots, \vec{a}_n)$)

**Další důsledek vlastnosti D3**, nebo též i fakt plynoucí z definice $|A|$:

je-li některý řádek matice $A$ řádek samých nul, $|A| = 0$

(z D3: $\det(\vec{a}_1, \dots, \underset{0 \cdot \vec{a}_k}{\underset{\parallel}{\vec{o}}}, \dots, \vec{a}_n) = 0 \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = 0$ )

(nebo z definice: v každém součinu v determinantu je alespoň jedna $0 \Rightarrow |A| = 0$)

**Klíčová vlastnost D4: determinant matice A se nezmění, pokud k řádku $\vec{a}_k$ přičteme nějaký násobek jiného řádku, například řádku $\vec{a}_l$:**

$$\det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_n)=\det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k+\alpha\cdot\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_n)$$

[Důkaz: rozepíšeme si pravou stranu této rovnosti:

$$\det(\vec{a}_1,\dots,\underline{\vec{a}_k+\alpha\cdot\vec{a}_l},\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_n)\overset{D3}{=}\det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_n)+\alpha\cdot\underbrace{\det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_l,\dots,\vec{a}_n)}_{=0}$$

podle $D_2$ důsledku (determinant matice se dvěma stejnými řádky)]

Vlastnost D4 nám poskytuje dobrý nástroj pro výpočet determinantu: snažíme se k nějakému řádku přičíst násobek jiného řádku, abychom v matici tímto způsobem vyrobili nuly – čím více nul, tím méně součinů je nenulových.

**Definice 7: Schodový tvar matice A** = takové obsazení matice A čísly, že v každém dalším řádku matice je více nul zleva než v tom předchozím, nebo se už jedná o řádek samých nul.

Nyní se už můžeme vrátit k příkladu 2 a pokusit se vypočítat determinanty $|A|, |A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|$: při úpravách využíváme hlavně vlastnost D4

$$|A|=\begin{array}{|cccc|l}1&1&1&1&\\1&2&-1&2&-r_1\\1&-1&2&1&-r_1\\1&3&3&2&-r_1\end{array}=\begin{array}{|cccc|l}1&1&1&1&\\0&1&-2&1&\\0&-2&1&0&+2\cdot r_2\\0&2&2&1&+r_3\end{array}=\begin{array}{|cccc|l}1&1&1&1&\\0&1&-2&1&\\0&0&-3&2&\\0&0&3&1&+r_3\end{array}=$$

$$=\begin{vmatrix}\boxed{1}&1&1&1\\0&\boxed{1}&-2&1\\0&0&\boxed{-3}&2\\0&0&0&\boxed{3}\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-3)\cdot3=\underline{\underline{-9}}$$

... pokud se nám pomocí D1 až D4 podaří upravit matici na schodový tvar, determinant je roven pouze součinu prvků na hlavní diagonále

(ve všech dalších součinech musíme vybrat aspoň jednu nulu pod diagonálou)

tj. zbývajících 23 součinů je rovno 0

$$|A_1|=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-1&2&1\\3&3&3&2\end{vmatrix}\overset{(D2)}{=}-\begin{array}{|cccc|l}1&2&-1&2&\\2&1&1&1&-2\cdot r_1\\-1&-1&2&1&+r_1\\3&3&3&2&+3\cdot r_3\end{array}=-\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&-3&3&-3\\0&1&1&3\\0&0&9&5\end{vmatrix}\overset{(D3)}{=}-(-3)\cdot\begin{array}{|cccc|l}1&2&-1&2&\\0&1&-1&1&\\0&1&1&3&-r_2\\0&0&9&5&\end{array}=$$

vytkneme (−3) ze 2. řádku

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to \text{vytkneme } 2 \\ \\ \end{matrix} \overset{(D3)}{=} 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -9 \cdot r_3 \end{matrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{vmatrix} = \underline{\underline{-24}}$$

**Vlastnost $D_5$ (Laplaceův rozvoj determinantu podle k-tého řádku nebo l-tého sloupce)**

tento rozvoj převádí výpočet determinantu řádu $n$ na $n$ determinantů řádu $(n-1)$:

mění se sloupcový index $j$

rozvoj podle k-tého řádku:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot |A_{kj}|$$

, kde $A_{kj}$ jsou matice vzniklé z $A$ vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce

rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |A_{il}|$$

, kde $A_{il}$ jsou matice vzniklé z $A$ vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce

mění se řádkový index $\underline{i}$

[Dk.: plyne z definice determinantu pouhým rozepsáním: např. pro řádkový rozvoj: $a_{kj}$ se vyskytuje v $(n-1)!$ součinech; když $(-1)^{k+j} a_{kj}$ z těchto součinů vytkneme, v závorce se objeví $|A_{kj}|$ jako součet součinů $n-1$ prvků, tj. determinant řádu o 1 menšího]

Ad př. 2:
vypočtěme $|A_2|, |A_3|, |A_4|$ kombinací vlastností D1–D5:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(D5) rozvineme např. podle řádku 3

$$= (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot |A_{31}| + (-1)^{3+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 0 \cdot |A_{34}| =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2+0+0-2-0-0) + (-1+0+0-1-0-0) = \underline{\underline{-14}}$$

tj. nejen že převádíme na determinanty nižších řádů, ale využíváme přitom výběr takového řádku nebo sloupce, který obsahuje větší počet nul

A konečně

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \overset{(D4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(D5)\text{ - rozvoj podle 1. sloupce}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+0-2-(-6)-0-2 = \underline{\underline{-1}}$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \overset{(D4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2\cdot r_2 \\ -2\cdot r_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

D5 - rozvoj podle 2. sloupce

$$= (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -0 - 9 + 0 + 0 - (-30) - 0 - 0 = \underline{\underline{21}}$$

můžeme psát odpověď: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-24}{-9} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{+14}{+9}$

$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{+1}{+9}$

$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{21}{-9} = \underline{\underline{\frac{-7}{3}}}$

a vektorovým zápisem: řešení je jediné,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 14/9 \\ 1/9 \\ -7/3 \end{pmatrix}$$

**Vlastnost D6** pokud některý řádek, např. $l$-tý, je lineární kombinací jiných řádků, např. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, **pak $|A| = 0$** [ důkaz: velmi podobný důkazu D4: $\vec{a}_l = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k$, pak

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots, \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) + \alpha_2 \cdot \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) + \dots +$$

$$+ \alpha_k \cdot \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = 0,$$

protože každý z těchto determinantů se rovná 0 díky dvěma stejným řádkům (D2 důsledek) ]

Př. 4 ověřte, že a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$