Ve fyzice a podobně i v geometrii je důležitým činitelem volba systému souřadnic.
Při našem postupu volba souřadného systému je dána volbou báze daného vektorového prostoru. Následující úvahy související se změnou báze budou využity v příští, šesté kapitole při klasifikaci kvadratických forem.
Uvažujme nyní vektorový prostor V dimenze n.

Definice 2.8 Označme $\underline{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $\underline{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ dvě různé báze téhož prostoru V.

Protože se jedná o báze, lze vektory $\vec{e}_i$ jednoznačně vyjádřit souřadnicemi v bázi $\underline{f}$:

$$\boxed{\vec{e}_i = \vec{f}_1 \cdot p_{1i} + \vec{f}_2 \cdot p_{2i} + \dots + \vec{f}_n \cdot p_{ni}}$$ vztah ① po sloupcích $\qquad \sum_k \vec{f}_k p_{ki} = \vec{e}_i$

souřadnice vektoru $\vec{e}_i$ v bázi $\underline{f}$ — zápis pomocí sumy Σ

Maticově: ① $\boxed{\underline{e} = \underline{f} \cdot P_{f \to e}}$. Matice P ... matice přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$

(někdy též matice transformace báze $\underline{f}$ na bázi $\underline{e}$)

vektory $\vec{e}_i$ jsou ve sloupcích

vektory $\vec{f}_i$ jsou ve sloupcích

v i-tém sloupci jsou souřadnice vektoru $\vec{e}_i$ v bázi $\underline{f}$

Věta 2.1 a) Matice přechodu $P_{f \to e}$ je regulární (dk.: pokud by řádky P byly lineárně závislé, byly by závislé i řádky matice $\underline{e}$, tj. byly by závislé i sloupce matice $\underline{e}$, a to nejsou (tvoří bázi))

b) Naopak jakákoli regulární matice P vytvoří z báze $\underline{f}$ „novou bázi" $\underline{e}$

(dk plyne ze vztahu ① a z toho, že součin dvou regulárních matic je zase matice regulární)

c) Vynásobením vztahu ① maticí P^{-1} zprava dostáváme, že matice P^{-1} je také matice přechodu, a sice v opačném směru!! (od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$) ② $\boxed{\underline{e} \cdot P^{-1} = \underline{f}}$

(dk plyne z regulárnosti všech matic a toho, že ve sloupcích matic $\underline{e}$, $\underline{f}$ jsou vektory bází)

Podívejme se nyní, jak se přepočítají souřadnice vektoru $\vec{x} \in V$ při změně báze:

Vektor $\vec{x}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{e}_i$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$)
a současně lze $\vec{x}$ jednoznačně vyjádřit jako lin. kombinaci vektorů $\vec{f}_i$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{f}$):

③ $$\boxed{\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{f}_1 + \beta_2 \vec{f}_2 + \dots + \beta_n \vec{f}_n}$$

(souřadnicové označení: budeme psát $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\underline{f}}$)

Vyjádříme-li $\vec{e}_i$ pomocí vztahu ① po sloupcích, dostaneme

$$\alpha_1 \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{k1} + \alpha_2 \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{k2} + \dots + \alpha_n \cdot \sum_k \vec{f}_k \cdot p_{kn} = \beta_1 \vec{f}_1 + \beta_2 \vec{f}_2 + \dots + \beta_n \cdot \vec{f}_n$$

Porovnáním koeficientů u $\vec{f}_i$ na obou stranách dostaneme systém rovnic

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot p_{11} + \alpha_2 \cdot p_{12} + \dots + \alpha_n \cdot p_{1n} = \beta_1 \\ \alpha_1 \cdot p_{21} + \alpha_2 \cdot p_{22} + \dots + \alpha_n \cdot p_{2n} = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 \cdot p_{n1} + \alpha_2 \cdot p_{n2} + \dots + \alpha_n \cdot p_{nn} = \beta_n \end{array}\right\} \to \text{SLR s neznámými } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

maticově:

$$P_{\underline{f} \to \underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\underline{f}} \quad / \cdot P^{-1} \text{ zleva}$$

$$④ \quad \boxed{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = P^{-1}_{\underline{f} \to \underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\underline{f}}}$$

Věta 22 (dk. viz předchozí odvození): Když P je matice přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$,

a) „nové" souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$ počítáme pomocí matice P^{-1} !! (vztah ④)

b) Naopak pokud $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$ a matice P je regulární čtvercová řádu n, pak existuje „stará" báze $\underline{f}$ zkonstruovatelná pomocí ②, kde souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k této „staré" bázi je možné zjistit jako

$$P \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Poznámka ke 22a: 1) jak si zapamatovat vztah přechodu bází: matice P je v součinu zprava

$$① \quad \underset{n/n}{\underline{e}} = \underset{n/n}{\underline{f}} \cdot \underset{n/n}{P}$$

kdežto při převodu vektorů ④ P^{-1} je v součinu zleva:

lineární zobrazení mezi vektory

$$\boxed{\underset{n/1}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}}} = \underset{n/n}{P^{-1}} \cdot \underset{n/1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\underline{f}}}}$$

2) tedy matice přechodu P (od $\underline{f}$ k $\underline{e}$) definuje lineární zobrazení s maticí P^{-1}, které převádí vektor o souřadnicích v $\underline{f}$ na vektor o souřadnicích v $\underline{e}$

Př. 35 (Horák, str. 54) Ukažme na příkladu, jak se obecně počítá matice přechodu od jedné báze ke druhé:

báze $\underline{e} = \underset{\vec{e}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{e}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, báze $\underline{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hledáme matici P typu 3/3 tak, aby pro přechod od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ platilo

(vektory do matic $\underline{e}, \underline{f}$ píšeme sloupcově)

$$① : \quad \underline{e} = \underline{f} \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot P$$

Přehodíme pouze obě strany:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S využitím významu násobení matic a rozepsání tohoto násobení po sloupcích vlastně současně řešíme tři systémy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 2&3&4\\ 3&1&3\\ 2&2&3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2&3&4\\ 3&1&3\\ 2&2&3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2&3&4\\ 3&1&3\\ 2&2&3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Každý ze systémů najde jeden sloupec matice P. Protože všechny tři systémy mají stejnou matici A, lze je řešit současně, vektory pravých stran napíšeme všechny tři za svislou čáru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\ 3&1&3&1&1&0\\ 2&2&3&1&0&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 3\\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6&9&12&3&3&3\\ 3&1&3&1&1&0\\ 0&-1&-1&0&-1&-1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1/3\\ \cdot 2-r_1\\ \cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\ 0&-7&-6&-1&-1&-3\\ 0&1&1&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&-7&-6&-1&-1&-3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +7\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&-1&6&4 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3r_2-r_3\\ -r_3\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&2&-8&-6\\ 0&1&0&1&-5&-3\\ 0&0&1&-1&6&4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1/2\\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-4&-3\\ 0&1&0&1&-5&-3\\ 0&0&1&-1&6&4 \end{array}\right)$$

P — ve sloupcích matice P jsou souřadnice vektorů $\vec{e}_i$ v bázi $\underline{f}$:

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix} -4\\ -5\\ 6 \end{pmatrix}_{\underline{f}},\quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix} -3\\ -3\\ 4 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

Pokud bychom chtěli přepočítat $\vec{v}_{\underline{f}} = \vec{v}_{\underline{e}}$ při zadaném např. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$, musíme ještě najít P^{-1}!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-4&-3&1&0&0\\ 1&-5&-3&0&1&0\\ -1&6&4&0&0&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1\\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-4&-3&1&0&0\\ 0&-1&0&-1&1&0\\ 0&2&1&1&0&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1)\\ +2\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-4&-3&1&0&0\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +4\cdot r_2+3\cdot r_3\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&2&2&3\\ 0&1&0&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&2&1 \end{array}\right)$$

P^{-1}

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} 2&2&3\\ 1&-1&0\\ -1&2&1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 7\\ -1\\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{e}}}}$$

<u>Pozn.</u>: Protože platí, že P^{-1} je matice opačného přechodu (od $\underline{e}$ k $\underline{f}$), naopak $\underline{f}$-ové souřadnice ze $\underline{e}$-čkových přepočteme pomocí lineárního zobrazení P:

$$\vec{N}_f = P\cdot\vec{N}_e = \begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}_f \quad \text{... sedí to!!}$$

<u>Příklad 36</u>: Podívejme se nyní na obecný příklad změny matice lineárního zobrazení při změně bází vstupního a cílového prostoru:

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadané v běžných bázích

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right),\quad \underline{f} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ maticí } A = \begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}, \text{ tj. } \begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

Jak se změní matice tohoto zobrazení, pokud bázi $\underline{e}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ změníme na $\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ a bázi $\underline{f}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ změníme na $\underline{f}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$?

<u>Řešení</u>: složíme tři lineární zobrazení
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^3$
- zobrazení φ
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$: $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2$: $\underline{f} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_e \arrow[rr, "\varphi \text{ v bázích } \underline{e},\underline{f}"] \arrow[drr, "\text{pouze změna } \underline{f}\to\underline{f}'"] & & \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_f \arrow[d, "\text{přepočet souřadnic}"] \\
\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{e'} \arrow[u, "\text{přepočet souřadnic}"] \arrow[urr, "\text{pouze změna } \underline{e}\to\underline{e}'"] \arrow[rr, "\varphi \text{ v bázích } \underline{e}',\underline{f}'"'] & & \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{f'}
\end{tikzcd}$$

φ v bázích $\underline{e},\underline{f}$: $A\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

přepočet souřadnic: $P\cdot\vec{x}' = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{e'} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_e$

přepočet souřadnic: $Q\cdot\vec{y} = \begin{pmatrix}2/3&1/3\\-1/3&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}$

pouze změna $\underline{f}\to\underline{f}'$: $Q\cdot A\cdot\vec{x} = \vec{y}'$: $\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&-1&5/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{f'}$

pouze změna $\underline{e}\to\underline{e}'$: $A\cdot P\cdot\vec{x}' = \vec{y}$: $\begin{pmatrix}-1&0&3\\4&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{e'} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_f$

φ v bázích $\underline{e}',\underline{f}'$: $\boxed{Q\cdot A\cdot P\cdot\vec{x}' = \vec{y}'}$

$\underset{2|2}{Q}\cdot\underset{2|3}{A}\cdot\underset{3|3}{P}$ $\to$ $2|3$

$$\begin{pmatrix}2/3&2/3&1\\5/3&2/3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{e'} = \begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}_{f'}$$

matice přechodu $P_{\underline{e}\to\underline{e}'}$: $\boxed{\underline{e}\cdot P = \underline{e}'}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&2\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

tohle už je matice P!

matice přechodu $Q_{\underline{f}\to\underline{f}'}$: $\boxed{\underline{f}'\cdot Q = \underline{f}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_1}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&3&-1&1\end{array}\right)\cdot\tfrac{1}{3}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&1&-1/3&1/3\end{array}\right)\xrightarrow{+r_2}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/3&1/3\\0&1&-1/3&1/3\end{array}\right) = Q$$

$\mathbb{R}^3$: $\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^2$: $\underline{f}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$

Shrnutí příkladu: Obecně řečeno, při změně báze jednoho či obou prostorů dojde ke změně matice lineárního zobrazení φ – složí se s jedním či dvěma lineárními transformacemi vstupního či cílového prostoru způsobenými změnou báze:

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}$ ... zadané maticí A, přepočet vektorů: $\vec{y}_f = A\cdot\vec{x}_e$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}$ ... zadané maticí $A\cdot P$, — || — $\vec{y}_f = A\cdot P\cdot\vec{x}_{e'}$

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}'$ ... zadané maticí $Q\cdot A$, — || — $y_{f'} = Q\cdot A\cdot\vec{x}_e$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}'$ ... zadané maticí $Q\cdot A\cdot P$, — || — $y_{f'} = Q\cdot A\cdot P\cdot\vec{x}_{e'}$

Příklad 37: Jak se změní matice A lineárního zobrazení $\psi: V\to V$ při změně báze?

Definice 29: Lineární zobrazení $\varphi: V\to W$ ||| **izomorfismus** mezi vektorovými prostory, je-li navíc bijektivní.

Lineární zobrazení $\psi: V\to V$ ||| **lineární transformace** (vstupní i cílový prostor je jeden a tentýž)

pokud A je singulární, ψ je projekce na nějaký podprostor prostoru V

Lineární transformace $\psi: V\to V$ ||| **automorfismus** (vektorového prostoru na sebe samo), je-li navíc bijektivní.

Příkladem automorfismu je právě přepočet souřadnic vektorů způsobený změnou báze. (automorfismus ... A je regulární a čtvercová)

Zadání př. 37: Jak se změní matice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ lineární transformace $\psi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ při změně báze $\underline{e}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ na bázi $\underline{e}'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$?

Řešení: podobně př. 36 s tím rozdílem, že zpětný přepočet báze je zadán maticí inverzní ke vstupnímu přepočtu báze

$\underline{e}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ψ v bázi $\underline{e}$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\underline{e}} \mapsto A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_{\underline{e}}$$

přechod P: $\underline{e}'\to\underline{e}$: $\underline{e}\cdot P=\underline{e}'$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$P\cdot\vec{x}'=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Def. 30 Čtvercové matice A, B ||| podobné, když $B=P^{-1}\cdot A\cdot P$ pro nějakou regulární P.

Věta 23. Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic.

$$P^{-1}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}$$

přechod $\underline{e}\to\underline{e}'$: P^{-1}

$\underline{e}'\cdot P^{-1}=\underline{e}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&-1&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&-2&1&2\\0&0&1&1&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&-2&1&2\\0&0&1&1&0&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=P^{-1}$$

$\underline{e}'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

ψ v bázi $\underline{e}'$: matice $P^{-1}\cdot A\cdot P$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'} \mapsto B\vec{x}=P^{-1}\cdot A\cdot P\vec{x}'=\vec{y}'$$

$$\begin{pmatrix}-2&-2&0\\5&6&2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}_{\underline{e}'}$$