Vážené studentky Alg 2, dobrý den,

vzhledem k bezkontaktní situaci v ČR si myslím, že bude dobré předmět dokončit a uzavřít na dálku. Posílám instrukce k samostudiu session 3 a session 4, z každé session prosím zpracujte tři uvedené úkoly, ofoťte a pošlete mi zpět. Pak se domluvíme na zkoušce, která myslím může proběhnout na dálku také (formou zpracování teoretických otázek i výpočtu konkrétních příkladů). V následujícím přehledu se budu odkazovat na svůj přednáškový text, pak domácí úkol bude z textu Horak-sbirka.pdf.

Také omluvte, že vektoru budu v session 3 psát řádkově, v session 4 už budu psát sloupce, protože tam je to klíčově důležité.

Session 3:

-- už jsme prošli definici a příklady vektorového prostoru, nyní ještě pár pojmů a zákonitostí s tím souvisejících:

- připomínám definici 6 lineární kombinace vektorů -- strana 6 a příklad 3 na str. 6-7 ... vektor (2,10) lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů (1,3) a (-2,2).

- nyní se chvíli budeme zabývat pojmem lineární závislosti či nezávislosti vektorů ... def. 9 na straně 14: posloupnost vektorů je lineárně závislá, když některý z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

- pojem lineární nezávislosti je klíčový, pomocí něj se totiž definují pojmy báze vektorového prostoru, dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru (definice 10) .... pečlivě projděte, na definice 9 a 10 se ptáme u bkalářských zkoušek z tohoto přemětu vždy; málokdo ze studentů nám řekne i tu základní větu, že souřadnice vektoru jsou právě koeficienty ve vyjádření tohoto vektoru pomocí vektorů báze.

- stranu 15 pročtěte celou, obyčejně souřadnice vektoru (1,2,3) jsou vlastně koeficienty jeho lineární kombinace v bázi (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) -- ale zkuste najít jeho souřadnice v bázi (1,1,0), (1,2,0), (1,0,1) ... příklad 12 na str. 15 -- to je Váš první domácí úkol z této přednášky DÚ01.

- další věc, co nás (z hlediska analytické geometrie) zajímá, kdy je podmnožina vektorového prostoru sama také vektorovým prostorem. Odpověď je velmi jednoduchá: tehdy, když je uzavřena na lineární kombinace svých vektorů -- podmnožině vektorového prostoru uzavřené na lineární kombinace svých vektorů říkáme vektorový podprostor

- ... celá strana 16 a polovina str. 17: příklady podprostoru; věta 3: průnikem dvou podprostorů je zase podprostor; věta 4: sjednocením dvou podprostorů nemusí být podprostor ... důkaz protipříkladem: když jako podprostor S1 uvažujeme množinu bodů na přímce p, podprostor S2 je množina bodů na přímce q, tak jejich sjednocením podprostor není, protože jak vidíte na obrázku, součet vektoru jedné přímky s vektorem druhé přímky „vyskočí“ z oblasti těchto přímek mimo, tj. sjednocení bodů na obou přímkách není uzavřeno na lineární kombinace

- z důvodu věty 4 zavádíme operaci součtu podprostorů - výsledkem je zase podprostor, a sice nejmenší možný podprostor, který obsahuje všechny možné kombinace lineární vektorů a těchto dvou podprostorů. Ukazuje se, že součet dvou podprostorů vytvořených z bodů různoběžných přímek procházejících počátkem musí už být množina všech bodů v rovině

- rád bych upozornil na to, že přímka bodů v rovině vždy vektorovým prostorem není -- je vektorovým prostorem jen tehdy, pokud prochází počátkem, neboli pokud obsahuje nulový vektor .... abychom popsali jakoukoli přímků matematickými přesnými pojmy, zavádíme definici afinního prostoru, kterou si řeknete v geometrii 2.

- s pojmem závislosti a nezávislosti vektorů si hrají příklady 15,16,17 ... měly byste být schopné je vyřešit. Objevuje se v nich pojem množiny generátorů (nebo sloveso „generuje“): pokud nějaký vektor je generován nějakou množinou vektorů, tak jej lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.

- prostudujte si str.20-21, ty se zabývají jedinou věcí: když jsou zadány dva podprostory U1, U2 svými množinami generátorů, máme najít dimenzi a bázi jejich průniku a dimenzi a bázi jejich sjednocení. prostudujte prosím a vyřešte příklad za domácí úkol číslo 2: skripta Horák-sbírka, str. 97, příklad 3.4.B.17-pouze část (b).

- a poslední věc v této session: podívejme se, jak souvisí vektorové prostory s řešením systému lineárních rovnic (= SLR): pojem vektorového prostoru se objevuje u tzv. homogenního SLR, což je SLR, který má jako vektor pravých stran samé nuly - str. 27,28 .... když si to rozmyslíte, tk SLR-hom má řešení vždy, protože ty nuly na pravé straně se sčítáním ani násobením rovnic neporuší, takže v příslušném schodovém tvaru neůže nastat rovnice 0=1 nebo 0=3, vždy to bude rovnice přinejhorším 0=0, kterou úplně vypustíme z úvah, protože na řešení neklade žádné omezení --- tj. SLR-hom má řešení vždy, minimálně vektor samých nul, a při hodnosti matice A menší než počet neznámých je řešení nekonečně mnoho ... a tak vždy platí, že množina řešení SLR-hom je vektorovým prostorem, viz příklad na str. 28.

- pro libovolný SLR neplatí, že by množina jeho řešením byla vektorovým prostorem, ale platí zde princip superpozice: množinu řešení libovolného SLR lze získat jako součet JEDNOHO libovolného řešení SLR a příslušné množiny řešení SLR-hom ... str. 29 plus věta 11 na str. 30 ... a příklad za domácí úkol 03: Horák-sbírka, str. 127, příklad 5.1.B.3-jenom část (b) ... OVŠEM VYJÁDŘETE ŘEŠENÍ TOHOTO PŘÍKLADU POMOCÍ PRINCIPU SUPERPOZICE ... OZNAČTE, CO VE VÝSLEDKU JE PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ SIR A CO JE OBECNÉ ŘEŠENÍ SLR-HOM!!

Toť vše ze session 3, prostudujte a dané tři příklady mi ofoťte a pošlete zpět emailem, může to být i Vaše společná práce ve dvojici, samostatné úkoly Vám dám až na zkoušku :-)

Session 4: podívejme se na poslední téma, které s Vámi projdu (aspoň na dálku), a to je téma lineárního zobrazení. Pojem lineárního zobrazení je vlastně „schovaný“ v každém systému lineárních rovnic Ax=b .... matice A nám představuje to lineární zobrazení, vektor x je vstupním vektorem zobrazení a vektor b je obrazem vektoru x vzhledem k tomuto zobrazení.

Zkuste se prosím prokousat definicí lineárního zobrazení a třemi způsoby jeho zadání (zadání pomocí matice je pouze jedním ze tří způsobů zadání), já mezitím ještě napíšu nějaké příklady, abych Vás přesvědčil, že se jedná o celkem zajímavou matematiku už pro zobrazení v rovině, která není daleko od ZŠ a určitě se objevuje na SŠ. Zatím si projděte str. 37 a 38.

Nyní ty příklady --- ty jsou součástí mimořádného skenu, který ještě v mé přednášce skenů nebyl zpracován: lin-zob.pdf. Odtud plyne i domácí úkol 01: Nalezněte matici lineárního zobrazení, které představuje osovou souměrnost v rovině vzhledem k ose y=1 +3x (postupujte podobně jako ve skenu ... najděte si obrazy dvou vhodných vektorů a z rovnice zobrazení dopočítejte a,b,c,d v matici F).

Domácí úkol 02: Můžete se podívat na nalezení vlastních čísel a vektorů na str. 63 v rámci obsáhlejšího příkladu, ale toho si nevšímejte: projděte si jen začátek řešení od poloviny str. 63 do prvních dvou a půl řádku na str. 64. Pak nalezněte vlastní vektory a vlastní čísla zobrazení v příkladu str. 162, příklad 7.3.B4-pouze část (a).

Domácí úkol 03: str. 39 od definice 22 až str.40 (na str. 40 je něco, co se chová jako matematická věta, ale uvnitř důkazu této věty je spočítán příklad nalezení Ker(fí) a Im(fí) .... zkuste totéž použít pro zobrazení v příkladu Horák-sbírka, str. 151, příklad 7.1.B4-pouze část (d) ... nalezněte jádro a obor hodnot daného lineárního zobrazení.

To je ode mne v předmětu Alg2 vše! Zbylé věci nejsou tak důležité -- vynechal jsem ovšem jedno důležité téma, a to je téma skalárního a vektorového součinu --- něco málo jste zopakovali s kolegyní v Repetitoriu 2, a něco více navážete v předmětu Geometrie 2. Ten předmět má svá vlastní skripta, ale lze se povídat i do mého skenu na nějaký úvod, na který pak v Geom 2 se navazuje.

Až mi pošlete vypracované obě úlohy session 3,1-3 a session 4,1-3, pošlu Vám zadání zkoušky, které mi vypracujete, a to bude ode mne nyní za těchto zvláštních okolností všechno.

Břeťa Fajmon