IMAk02 Základy algebry – Úlohy k procvičení - řešení

1. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující binární relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení. Pokud ano, určete přesně typ zobrazení:

a) $R_1 = \{[b, 1], [c, 2], [d, 3]\}$,
je zobrazení z množiny A do množiny B (není zobrazením ani celé množiny A ani na celou množinu B) a je prosté.

b) $R_2 = \{[a, 1], [b, 2], [a, 3]\}$,
není zobrazení z množiny A do množiny B.

c) $R_3 = \{[a, 1], [b, 3], [c, 2], [d, 4]\}$,
je vzájemně jednoznačné zobrazení množin A, B.

d) $R_4 = \{[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 1]\}$,
je zobrazení celé množiny A do množiny B, není prosté.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících množin je ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel $\boldsymbol{N}$. Které z uvedených množin jsou nekonečné?

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$, $B = \{7, 6, 4, a, x\}$, $D = \{x \in \boldsymbol{N}: x = 5^n \wedge n \in \boldsymbol{N}\}$.

S množinou $\boldsymbol{N}$ jsou ekvivalentní množiny A a D. Vzájemně jednoznačné zobrazení množin $\boldsymbol{N}$ a A je např. $\{[0, 1], [1, \frac{1}{2}], [2, \frac{1}{4}], [3, \frac{1}{8}], \ldots\}$, obecně $\{[x, y] \in \boldsymbol{Q}^2: x \in \boldsymbol{N} \wedge y = 2^{-x}\}$. Vzájemně jednoznačné zobrazení množin $\boldsymbol{N}$ a D je např. $\{[0, 5^0], [1, 5^1], [2, 5^2], [3, 5^3], \ldots\}$, obecně $\{[x, y] \in \boldsymbol{N}^2: x \in \boldsymbol{N} \wedge y = 5^x\}$. Protože $\boldsymbol{N}$ je nekonečná množina, jsou nekonečné I množiny A, D. Množina B je konečná, neboť ani jedna její vlastní podmnožina není s množinou B ekvivalentní.

3. Zjistěte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají operace $*$, $\circ$, $\triangle$ definované v množině $M = \{a, b, c\}$:

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

$\circ$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

$\triangle$	a	b	c
a	c		a
b		c	b
c	a	b	c

Dále určete neutrální a agresivní prvky, pokud existují. Stanovte přesně typ každé algebraické struktury, kterou množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

Operace $*$: ND, K, $\neg$ A, EN, EI, $\neg$ ZR. Neutrální prvek je b, agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$. $(M, *)$ je komutativní grupoid s neutrálním prvkem, který není pologrupa.

Operace $\circ$: ND, K, A, $\neg$ EN, $\neg$ EI, $\neg$ ZR. Neutrální prvek neexistuje, agresivní prvek je c. Inverzní prvky neexistují. $(M, \circ)$ je komutativní pologrupa, která není grupou.

Operace $\triangle$: $\neg$ ND, $\neg$ K, $\neg$ A, EN, EI, $\neg$ ZR. Neutrální prvek je c, agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$. $(M, \triangle)$ je algebraická struktura s jednou operací, která není grupoid.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají následující operace ($\boldsymbol{C}$ je množina všech celých čísel):

a) $\circ = \{[x, y. z] \in \boldsymbol{N}^3 \colon z = x + 2y\}$ neboli $x \circ y = x + 2y$.

ND, $\neg$ K, $\neg$ A, $\neg$ EN, $\neg$ EI, $\neg$ ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

b) $* = \{[x, y. z] \in \boldsymbol{C}^3 \colon z = x + y + 1\}$ neboli $x * y = x + y + 1$.

ND, K, A, EN, EI, ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

5. Určete přesně typ algebraických struktur s jednou operací ($\boldsymbol{Q}$ je množina všech racionálních čísel, $\boldsymbol{Q}_0^+$ je množina všech nezáporných racionálních čísel):

$(\boldsymbol{N}, +)$, $(\boldsymbol{N}, \cdot)$, $(\boldsymbol{N}, -)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, +)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q} - \{0\}, +)$, $(\boldsymbol{Q} - \{0\}, \cdot)$.

$(\boldsymbol{N}, +)$ komutativní pologrupa, která není grupou (nemá neutrální prvek)
$(\boldsymbol{N}, \cdot)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou
$(\boldsymbol{N}, -)$ není ani grupoid
$(\boldsymbol{Q}_0^+, +)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou
$(\boldsymbol{Q}_0^+, \cdot)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou
$(\boldsymbol{Q} - \{0\}, +)$ není ani grupoid (např. $-2 + 2 = 0$, $0 \notin \boldsymbol{Q} - \{0\}$)
$(\boldsymbol{Q} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupa

6. Určete přesně typ algebraických struktur se dvěma operacemi:

$(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q}_0^+, +, \cdot)$, $(\boldsymbol{Q} - \{0\}, +, \cdot)$.

$(\boldsymbol{N}, +, \cdot)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem
$(\boldsymbol{Q}_0^+, +, \cdot)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem
$(\boldsymbol{Q} - \{0\}, +, \cdot)$ není ani polookruh

7. Je dána množina $M = \{a, b,\}$. Určete přesně typ algebraických struktur

$(\mathcal{P}(M), \cup)$, $(\mathcal{P}(M), \cap)$, $(\mathcal{P}(M), -)$, $(\mathcal{P}(M), \triangle)$, $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$,

kde $\mathcal{P}(M)$ je potenční system množiny M. Platí uvedené závěry i pro všechny množiny M, které mají nejméně dva prvky?

$(\mathcal{P}(M), \cup)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathcal{P}(M), \cap)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathcal{P}(M), -)$ nekomutativní grupoid, který není pologrupa (ND, $\neg$ K, $\neg$ A, $\neg$ EN, $\neg$ EI, $\neg$ ZR)

$(\mathcal{P}(M), \triangle)$ komutativní grupa (ND, K, A, EN, EI, ZR); $e = \emptyset$, $\overline{A} = A$, $A \triangle X = B \Rightarrow X = A \triangle B$.

$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

Uvedené závěry platí pro všechny množiny, které mají nejméně dva prvky.