DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL

Def. 1 Říkáme, že celé číslo **b dělí** celé číslo a (nebo **b je dělitelem a** nebo **a je dělitelné b** nebo **a je násobkem b**), právě když existuje celé číslo x, pro které platí **a = b . x.**
Symbolicky: $b|a \Leftrightarrow (\exists x \in C)(a = b . x)$

Jestliže k číslům $a, b \in C$ neexistuje $x \in C$ takové, že $a = b . x$, říkáme, že b nedělí a. $b \nmid a$

Platí-li, že a = b . x, pak čísla b a x jsou dělitelé čísla a a nazývají se **sdružení dělitelé čísla a.**

Pozn.
1. Každé celé číslo $a \neq 0, 1, -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla 1, a, -1, -a. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla a.** (Ostatní dělitele, pokud existují, nazýváme nesamozřejmými.)
2. Čísla 1 a –1 mají právě dva dělitele v množině C, a to 1, -1.
3. Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.
4. Číslo 0 není dělitelem žádného nenulového čísla a, protože neexistuje žádné celé číslo x tak, aby platilo $0 . x = a$.
5. Číslo 0 je dělitelem sebe sama (0|0), neboť pro libovolné celé číslo x platí $0 . x = 0$.

Cvičení:
1. Doplňte:
   Číslo 10 má 12 dělitelů, jsou to čísla:
   Dvojice **sdružených dělitelů** čísla 10:
   Samozřejmí dělitelé čísla 10:
   Přirození dělitelé čísla 10 (to jsou dělitele čísla 10 patřící do množiny přirozených čísel):

2. Zjistěte, jaké vlastnosti má binární relace „dělitelnost celých čísel", a tvrzení dokažte.

Věta 1.
Pro libovolná celá čísla a, b, c platí
a) $(b|a \wedge b|c) \Rightarrow (b|a+c \wedge b|a-c)$
b) $b|a \Rightarrow (-b)|a$
c) $b|a \Rightarrow b|(-a)$

Důkaz:

Pozn. Na základě části b) a c) uvedené věty můžeme dále pracovat jen v množině přirozených čísel. (Určíme-li přirozené dělitele přirozeného čísla a, umíme snadno určit všechny dělitele čísla a i čísla -a.).

Znaky dělitelnosti
jsou věty, které umožňují rozhodnout o dělitelnosti čísla jiným číslem bez provedení dělení, jen ze zápisu čísla
Ve všech dalších úvahách máme na mysli přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě.
1. Přirozené číslo a je dělitelné dvěma (pěti, deseti) právě tehdy, když je dvěma (pěti, deseti) dělitelné číslo, zapsané jeho cifrou nultého řádu.
2. Přirozené číslo a je dělitelné čtyřmi, právě když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.
3. Přirozené číslo a je dělitelné osmi, právě když je osmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním trojčíslím.
4. Přirozené číslo a je dělitelné třemi (devíti), právě když je třemi (devíti) dělitelný jeho ciferný součet. (Ciferný součet je součet všech čísel zapsaných jednotlivými číslicemi v zápisu čísla a)
5. Přirozené číslo a je dělitelné jedenácti, právě když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla a.

Tyto znaky dělitelnosti plynou z obecnějších vět:

I. Dělíme-li přirozené číslo a dvěma (pěti, deseti) dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme dvěma (pěti, deseti) číslo zapsané cifrou nultého řádu v zápisu čísla a.

II. Dělíme-li přirozené číslo a (aspoň trojciferné) čtyřmi, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme čtyřmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

III. Dělíme-li přirozené číslo a (aspoň čtyřciferné) osmi, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme osmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.

IV. Dělíme-li přirozené číslo a třemi (devíti), dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme třemi (devíti) jeho ciferný součet.

V. Dělíme-li přirozené číslo a jedenácti, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme jedenácti součet čísel zapsaných ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných ciframi lichých řádů.

Důkazy vět I. – V. provedeme s využitím následující věty.

Věta 2.
Je-li celé číslo a součtem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem celého čísla b, pak druhé dává při dělení číslem b stejný zbytek jako číslo a.

(Důkaz viz učebnice s. 185)