Def. 2 Přirozené číslo p>1 nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva přirozené dělitele. Přirozené číslo a>1, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

O tom, zda dané číslo je prvočíslo nebo složené číslo, můžeme rozhodnout pomocí tzv. Eratosthenova síta nebo podle věty 3.

Věta 3. Jestliže přirozené číslo *a* není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným $\sqrt{a}$, pak *a* je prvočíslo.

Př. Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.
$\sqrt{173} \leq 14$, proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13. Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Věta 4. Každé složené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru součinu konečného počtu prvočísel

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou prvočísla, $e_1, e_2, \ldots, e_k$ jsou nenulová přirozená čísla.
Tento zápis se nazývá **prvočíselný rozklad přirozeného čísla a** a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou tzv. **prvočinitele** rozkladu.

Př. $600 = 2^3 . 3^1 . 5^2$

Def. 3 Společný dělitel přirozených čísel a, b je každé přirozené číslo d, pro které platí d a a d b.

Def. 4 Největší společný dělitel přirozených čísel a, b je ten ze společných dělitelů, který je dělitelný všemi společnými děliteli. Označujeme **D(a,b).**

Pozn. V množině přirozených čísel lze též říci, že největší společný dělitel je největší (maximální) číslo ze společných dělitelů.

Def. 5 Přirozená čísla a, b se nazývají **nesoudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel roven 1. D(a,b) = 1

Def. 6 Přirozená čísla a, b se nazývají **soudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel větší než 1. D(a,b) > 1.

Def. 7 Společný násobek přirozených čísel a, b je každé přirozené číslo m, které je dělitelné oběma čísly a, b, tj. a m a b m.

Def. 8 Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b je ten ze společných násobků, který je dělitelem všech společných násobků čísel a, b. Označujeme **n(a,b).**
Pozn. V množině přirozených čísel lze též říci, že n(a,b) je nejmenší číslo z kladných společných násobků čísel a,b.

Pozn. Definice 3 – 8 lze rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel $a_1, \ldots, a_n$.

Určování D(a,b) a n(a,b)

1) pomocí Euklidova algoritmu
2) z rozkladů čísel na součin prvočinitelů

ad 1) **Euklidův algoritmus** vychází z věty 7.1 (uč. na str. 189).
Podle této věty platí: Jestliže přirozené číslo **a** dává při dělení nenulovým přirozeným číslem **b** zbytek **z**, tj. a = b.q + z a z < b, pak největší společný dělitel čísel a, b je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z, tj. D(a,b) = D(b,z).
Tím převádíme problém určení D(a,b) na určení D(b,z). Čísla b a z jsou menší než čísla a, b.

Př. Zjistěte D(268, 80)

268 : 80 = 3	neboli	268 = 80 . 3 + 28
28		
80 : 28 = 2		80 = 28 . 2 + 24
24		
28 : 24 = 1		28 = 24. 1 + 4
4		
24 : 4 = 6		24 = 6 . 4
0		

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

Nejmenší společný násobek čísel a, b pak lze vypočítat podle věty 8.2 v učebnici na str. 191.
Věta 4: Pro každá **dvě** přirozená čísla a, b platí : **n(a,b) . D(a,b) = a . b**

ad 2) **Určení největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku z rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů.**

Největší společný dělitel daných přirozených čísel je součinem všech prvočinitelů, kteří se současně vyskytují v prvočíselných rozkladech všech daných čísel, a to s nejmenším s vyskytujících se exponentů.

Nejmenší společný násobek daných čísel je součinem všech různých prvočinitelů, kteří se vyskytují v rozkladech daných čísel, a to v největší mocnině.

Př. Zjistěte D(108, 90) a n(108, 90).
$108 = 2^2 . 3^3$ $\quad 90 = 2 . 3^2 . 5$
$D(108, 90) = 2 . 3^2 = 18$
$n(108, 90) = 2^2 . 3^3 . 5 = 540$

Určení počtu všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla:
Věta 5: Je-li $a = p^{e1} . p^{e2} . \ldots . p^{ek}$ prvočíselný rozklad přirozeného čísla a > 1, pak počet všech přirozených dělitelů čísla a (ozn, $\vartheta(a)$) je určen takto:

$$\vartheta(a) = (e_1 + 1).(e_2 + 1). \ldots .(e_k + 1)$$

Všechny přirozené dělitele čísla a určíme jako všechny možné součiny prvočinitelů, přičemž každý prvočinitel, probíhá všechny mocniny od 0. po tu, ve které se vyskytují v rozkladu.
Př:

	3^0	3^1	3^2
$2^0 . 5^0$	1	3	9
$2^0 . 5^1$	5	15	45
$2^1 . 5^0$	2	6	18
$2^1 . 5^1$	10	30	90

$90 = 2 . 3^2 . 5$

$\vartheta(90) = (1+1) . (2+1) . (2+1) = 12$