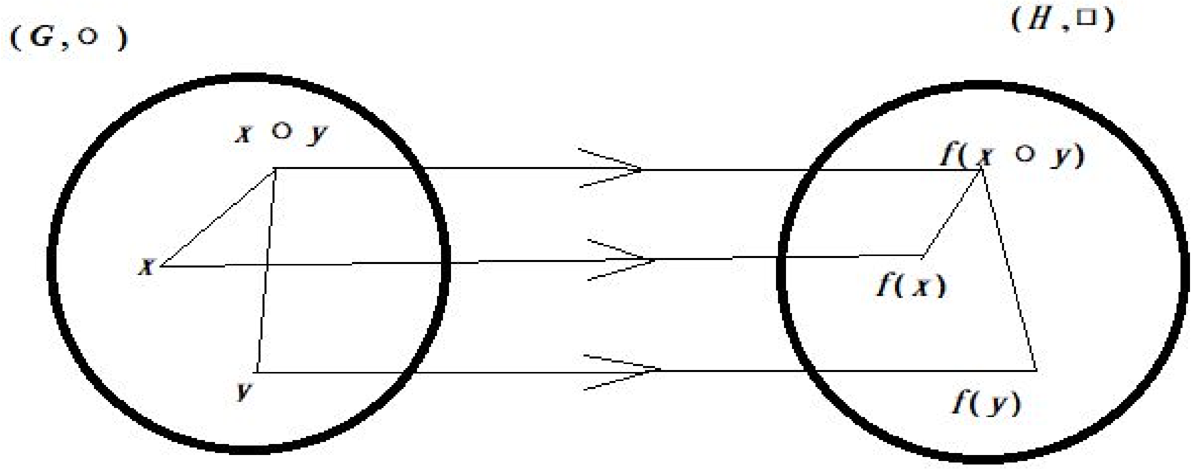
Homomorfismus a izomorfismus alg. struktur s jednou operací

Motto: Morfismus je zobrazení zachovávající operace.

Mějme dány dvě alg. struktury $(G, \circ)$, $(H, \square)$. Obě operace $\circ$, $\square$ musí mít vlastnost ND (o ostatních vlastnostech nic prozatím nepředpokládáme), tzn. obě struktury jsou minimálně grupoidy. Nechť f je zobrazení celé množiny G do množiny H. Uvažujme následující situaci (sledujte průběžně obrázek).



V množině G zvolíme libovolné dva prvky x, y. Protože struktura $(G, \circ)$ je grupoid, určitě existuje v množině G prvek $x \circ y$. Vzhledem k tomu, že f je zobrazení celé množiny G, má každý prvek množiny G svůj obraz v množině H. Má ho tedy i prvek $x \circ y$, označíme ho $f(x \circ y)$. Z téhož důvodu mají v množině H své obrazy i prvky x, y, označíme je $f(x)$, $f(y)$. V množině H je definována operace $\square$, která je ND (struktura $(H, \square)$ je grupoid). Pak v množině H existuje prvek $f(x) \square f(y)$. Ten se může nebo nemusí rovnat prvku $f(x \circ y)$. Z obrázku je vidět, že rovnost

$$f(x \circ y) = f(x) \square f(y) \qquad (*)$$

vypadá i z geometrického pohledu „hezky“. Tato rovnost vyjadřuje to, co je mottem tohoto textu: f je zobrazení zachovávající operace. Zobrazení f nazveme homomorfismem, pokud výše uvedená rovnost (*) platí pro libovolnou dvojici prvků množiny G. Nyní můžeme formulovat definici.

Definice 1: Nechť f je zobrazení množiny G do množiny H, nechť $(G, \circ)$, $(H, \square)$ jsou alg. struktury (alespoň grupoidy). Pak zobrazení f nazveme **homomorfismus** $(G, \circ)$ do $(H, \square)$, jestliže platí:

$$(\forall\, x, y \in G)\, f(x \circ y) = f(x) \square f(y)\,.$$

Poznámka 1: Existuje několik typů morfismů. Liší se podle typu zobrazení f (může být do množiny H nebo na množinu H, může a nemusí být prosté, množiny G, H mohou být různé nebo se mohou rovnat atd. Podle toho se před slovo morfismus dávají různé předpony. Nejobecnějším názvem je homomorfismus, dále existuje monomorfismus, epimorfismus, automorfismus, izomorfismus atd. Pro naše potřeby budeme později definovat pouze izomorfismus.

Nyní se budeme se zajímat o to, jaké jsou vlastnosti operací $\circ$, $\square$ v případě, že existuje homomorfismus struktur $(G, \circ)$, $(H, \square)$. Máme definováno celkem šest vlastností operací: ND, K, A, EN, EI, ZR, přičemž vlastnost ND se u obou operací předpokládá podle definice homomorfismu. Problém jejich přenášení řeší následující věta:

Věta 1: Nechť f je homomorfismus alg. struktury $(G, \circ)$ do alg. struktury $(H, \square)$, tzn. platí $(\forall\ x, y \in G)\, f(x \circ y) = f(x) \square f(y)$. Pak platí: Jestliže operace $\circ$ má některou z vlastností K, A, EN, EI, ZR, pak má tuto vlastnost i operace $\square$.

Tuto větu 1 nelze obrátit, vlastnosti obou alg. operací se tedy přenášejí pouze „zleva doprava“, ze „vzorové“ struktury na „obrazovou“ strukturu. Všechny vlastnosti operace $\circ$ má tedy i operace $\square$, ta jich však může mít i více. Uvedeme příklad.

Příklad 1: Nechť $G = \{a, b, c\}$, $H = \{0\}$. Operace $\circ$, $\square$ jsou na množinách G, H dány tabulkami:

$\circ$	a	b	c
a	b	b	c
b	a	c	a
c	a	c	b

$\square$	0
0	0

Struktura $(G, \circ)$ je grupoid, operace $\circ$ má jedinou vlastnost ND. Vlastnost A vyloučíme protipříkladem $a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c$, neexistenci ostatních vlastností ověříme pohledem na tabulku. Struktura $(H, \square)$ je komutativní grupa, přestože obsahuje jediný početní spoj $0 \square 0 = 0$. Platnost všech vlastností operace $\square$ lze určit přímo z tabulky. Definujeme-li nyní zobrazení f předpisem $f(a) = 0, f(b) = 0, f(c) = 0,$ je zřejmé, že se jedná o homomorfismus, protože struktura $(H, \square)$ obsahuje pouze jediný prvek. Vidíme, že může existovat homomorfismus „obyčejného“ grupoidu na komutativní grupu.

Nyní uvedeme dvě věty upřesňující větu 1. Týkají se vlastností EN a EI.

Věta 2: Nechť f je homomorfismus alg. struktury $(G, \circ)$ do alg. struktury $(H, \square)$, tzn. platí $(\forall\ x, y \in G)\, f(x \circ y) = f(x) \square f(y)$. Jestliže operace $\circ$ má vlastnost EN, pak má tuto vlastnost i operace $\square$. Označíme-li neutrální prvek operace $\circ$ jako e_1 a neutrální prvek operace $\square$ jako e_2, platí $f(e_1) = e_2$. Obrazem neutrálního prvku operace $\circ$ je neutrální prvek operace $\square$.

Věta 3: Nechť f je homomorfismus alg. struktury $(G, \circ)$ do alg. struktury $(H, \square)$, tzn. platí $(\forall\ x, y \in G)\, f(x \circ y) = f(x) \square f(y)$. Jestliže operace $\circ$ má vlastnost EI, pak má tuto vlastnost i operace $\square$. Nechť $a \in G$ je libovolný prvek, nechť $a^{-1} \in G$ je inverzní prvek k prvku a v operaci $\circ$. Pak platí $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$. Obrazem inverzního prvku k prvku a v operaci $\circ$ je inverzní prvek k obrazu $f(a)$ v operaci $\square$.

Poznámka 2: Nyní již můžeme přistoupit k definici pojmu izomorfismus. Nejprve připomeneme potřebné pojmy. Zobrazení f množiny G do množiny H se nazývá vzájemně jednoznačné (bijektivní), jestliže je prostým zobrazením celé množiny G na celou množinu H. Pokud takové prosté zobrazení množiny G na množinu H existuje, říkáme, že množiny G, H jsou ekvivalentní a píšeme $G \sim H$. Připomeňme rovněž, že ekvivalentní konečné množiny musí mít stejný počet prvků.

Nechť existuje prosté zobrazení f celé množiny G na celou množinu H. Potom inverzní zobrazení f^{-1} je rovněž prostým zobrazením celé množiny H na množinu G (odtud plyne název vzájemně jednoznačné zobrazení).

Definice 2: Nechť f je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny G na množinu H, nechť $(G, \circ)$, $(H, \square)$ jsou alg. struktury (alespoň grupoidy). Pak zobrazení f nazveme **izomorfismus** $(G, \circ)$ na $(H, \square)$, jestliže platí: $(\forall\, x, y \in G)\, f(x \circ y) = f(x) \,\square\, f(y)$. Píšeme $(G, \circ) \cong (H, \square)$.

Ve smyslu předchozí poznámky platí: Je-li f izomorfismus $(G, \circ)$ na $(H, \square)$, je také zobrazení f^{-1} izomorfismem $(H, \square)$ na $(G, \circ)$. Proto u izomorfismu algebraických struktur nezáleží na pořadí těchto struktur; říkáme, že algebraické struktury $(G, \circ)$ a $(H, \square)$ jsou izomorfní.

Věta 4: Nechť $(G, \circ)$, $(H, \square)$ jsou struktury (alespoň grupoidy), nechť $(G, \circ) \cong (H, \square)$ (tj. obě struktury jsou izomorfní). Pak platí:
1. $G \sim H$.
2. Má-li jedna z operací $\circ$, $\square$ některou z vlastností K, A, EN, EI, ZR, má tuto vlastnost i druhá z těchto operací. Obě operace mají tedy tytéž vlastnosti.
3. Obě algebraické struktury $(G, \circ)$, $(H, \square)$ jsou téhož typu.

Příklad 2: Nechť $G = \{a, b, c, d\}$, $H = \{1, -1, i, -i\}$. Operace $\circ$, $\cdot$ jsou na množinách G, H dány tabulkami:

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

·	1	–1	i	–i
1	1	–1	i	–i
–1	–1	1	–i	i
i	i	–i	–1	1
–i	–i	i	1	–1

Pro úplnost doplníme informaci, že množina H je množina všech řešení rovnice $x^4 = 1$ v oboru komplexních čísel, tedy množina všech čtvrtých odmocnin z čísla 1. Operace $\cdot$ na množině H je pak „obyčejné“ násobení v oboru komplexních čísel. Čtenáři, který není seznámen s komplexními čísly, postačí vědět, že $i \cdot i = -1$. Ostatní spoje v tabulce alg. struktury $(H, \cdot)$ se již snadno doplní s využitím znalosti násobení v oboru $\boldsymbol{R}$ reálných čísel.

Zkoumáním vlastností operací $\circ$, $\cdot$ zjistíme, že obě tyto operace mají všechny probrané vlastnosti K, A, EN, EI, ZR, tzn. obě algebraické struktury $(G, \circ)$, $(H, \cdot)$ jsou komutativní grupy. Definujeme-li nyní vzájemně jednoznačné zobrazení f množiny G na množinu H předpisem $f(a) = 1, f(b) = -1, f(c) = i, f(d) = -i,$ snadno se přesvědčíme pohledem na tabulky, že toto zobrazení je izomorfismus, tedy platí vztah $(G, \circ) \cong (H, \cdot)$. Prvky v obou tabulkách jsou totiž „konfigurovány“ úplně stejně; prvek a je na stejných místech jako číslo 1 (podle věty 2 je předpis $f(a) = 1$ vynucený, oba prvky jsou ve svých strukturách neutrální), prvek b je na stejných místech jako číslo -1, prvek c je na stejných místech jako číslo i a prvek d je na stejných místech jako číslo $-i$. V tom mj. tkví podstata izomorfismu: i když obě algebraické struktury jsou formálně různé (mají různé nosné množiny a různé operace), „počítá“ se v nich přitom podle stejných pravidel, protože obě tabulky obsahují čtyři prvky rozmístěné úplně stejně. Je to i další doklad toho, že obě izomorfní struktury musí být téhož typu.

Příklad 3: Nechť $\boldsymbol{R}^+$ označuje množinu všech kladných reálných čísel, nechť $\boldsymbol{R}$ je množina všech reálných čísel. Uvažujme algebraické struktury $(\boldsymbol{R}^+, \cdot)$, $(\boldsymbol{R}, +)$. Obě tyto struktury jsou komutativní grupy (operace $\cdot$, $+$ jsou „obyčejné“ násobení a sčítání reálných čísel). Zobrazením f množiny $\boldsymbol{R}^+$ na množinu $\boldsymbol{R}$ nechť je reálná funkce jedné proměnné $f(x) = ln\ x$ pro každé $x \in \boldsymbol{R}^+$. Jak je známo ze střední školy, logaritmická funkce je definována pro všechna kladná reálná čísla a jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel, přitom je prostá v celém definičním oboru. Pro funkci $f(x) = ln\ x$ platí vztah $f(x \cdot y) = ln\ (x \cdot y) = ln\ x + ln\ y = f(x) + f(y)$. Logaritmická funkce je tedy izomorfním zobrazením $(\boldsymbol{R}^+, \cdot)$ na $(\boldsymbol{R}, +)$, platí $(\boldsymbol{R}^+, \cdot) \cong (\boldsymbol{R}, +)$.
Jestliže existuje izomorfní zobrazení $f(x) = ln\ x$ grupy $(\boldsymbol{R}^+, \cdot)$ na grupu $(\boldsymbol{R}, +)$, existuje také inverzní izomorfní zobrazení f^{-1} grupy $(\boldsymbol{R}, +)$ na grupu $(\boldsymbol{R}^+, \cdot)$. Tímto zobrazením je reálná funkce $f(x) = e^x$. Vskutku, exponenciální funkce je prostá a je definována pro všechna reálná čísla a jejími funkčními hodnotami jsou pouze kladná reálná čísla, přičemž platí vztah $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Příklad 4: Nechť $M = \{1, 2, 3\}$. Označíme $a, b, c, d, e\ f$ všechny permutace množiny M. Množinu těchto permutací označme P.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nekomutativní grupa permutací množiny M s operací skládání permutací je určena tabulkou:

o	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

Nechť *ABC* je rovnostranný trojúhelník. Všechna shodná zobrazení, která převádějí tento trojúhelník na sebe, označíme následujícím způsobem:

i … identita

o_1 … osová souměrnost podle osy strany *AB*

o_2 … osová souměrnost podle osy strany *BC*

o_3 … osová souměrnost podle osy strany *AC*

r_1 … otočení o $+60°$ podle středu trojúhelníka

r_2 … otočení o $-60°$ podle středu trojúhelníka

Množinu všech těchto zobrazení označíme *S*.

Grupa skládání těchto shodných zobrazení s operací skládání zobrazení je dána tabulkou:

o	i	o_1	o_2	o_3	r_1	r_2
i	i	o_1	o_2	o_3	r_1	r_2
o_1	o_1	i	r_2	r_1	o_3	o_2
o_2	o_2	r_1	i	r_2	o_1	o_3
o_3	o_3	r_2	r_1	i	o_2	o_1
r_1	r_1	o_2	o_3	o_1	r_2	i
r_2	r_2	o_3	o_1	o_2	i	r_1

Definujme nyní zobrazení $f\colon P \to S$ takto:

$$f = \begin{pmatrix} e & a & b & c & d & f \\ i & o_1 & o_2 & o_3 & r_1 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení je izomorfismem, platí tedy $(P, \circ) \cong (S, \circ)$.

Srovnejme nyní všechny permutace množiny *M* a všechna shodná zobrazení z množiny *S* určená výčtem:

$i = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$, $o_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$, $o_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$,

$o_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$, $r_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$, $r_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$.

Ztotožníme-li $A \sim 1$, $B \sim 2$, $C \sim 3$, vidíme, že šest permutací tříprvkové množiny přesně odpovídá šesti shodným zobrazením, převádějícím rovnostranný trojúhelník na sebe.

Homomorfismus a izomorfismus alg. struktur se dvěma operacemi

Tato část bude velmi krátká. Stručně ji můžeme charakterizovat takto: Jedná-li se o algebraické struktury se dvěma operacemi, musí být definice homomorfismu (resp. izomorfismu) splněna pro obě dvě operace. Pro každou z nich pak platí všechno, co bylo uvedeno v první části zaměřené na homomorfismus a izomorfismus struktur s jednou operací. Proto uvedeme pouze definici, větu a příklad.

Definice 3: Nechť $(G, \oplus, \odot)$, $(H, \boxplus, \boxdot)$ jsou algebraické struktury se dvěma operacemi. Nechť f je zobrazení množiny G do množiny H. Pak zobrazení f nazveme **homomorfismus** $(G, \oplus, \odot)$ do $(H, \boxplus, \boxdot)$, jestliže současně platí:

(i) $(\forall\, x, y \in G)\, f(x \oplus y) = f(x) \boxplus f(y)$,

(ii) $(\forall\, x, y \in G)\, f(x \odot y) = f(x) \boxdot f(y)$.

Je-li f vzájemně jednoznačné zobrazení množiny G na množinu H, nazývá se izomorfismus $(G, \oplus, \odot)$ na $(H, \boxplus, \boxdot)$, píšeme $(G, \oplus, \odot) \cong (H, \boxplus, \boxdot)$.

Věta 5: Nechť $(G, \oplus, \odot)$, $(H, \boxplus, \boxdot)$ jsou algebraické struktury, nechť pro tyto struktury platí $(G, \oplus, \odot) \cong (H, \boxplus, \boxdot)$ (tj. obě struktury jsou izomorfní). Pak platí:

1. $G \sim H$.
2. Obě algebraické struktury $(G, \oplus, \odot)$, $(H, \boxplus, \boxdot)$ jsou téhož typu.

Příklad 5: Nechť $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ je obor integrity všech celých čísel s operacemi sčítání a násobení, nechť $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$ je těleso všech racionálních čísel s operacemi sčítání a násobení. Pro každé celé číslo n definujme zobrazení celé množiny $\boldsymbol{Z}$ do množiny $\boldsymbol{Q}$ předpisem $f(n) = \frac{n}{1}$. Pak toto zobrazení je homomorfismem oboru integrity $(\boldsymbol{Z}, +, \cdot)$ do tělesa $(\boldsymbol{Q}, +, \cdot)$, o čemž se snadno přesvědčíte rozepsáním. Protože zobrazení f je prosté, říká se tomuto homomorfismu též **vnoření**. Můžete se proto setkat i s tvrzením, že se jedná o vnoření oboru integrity do tělesa.