Vlastnosti binárních operací:

Definice : Binární operace $\circ$ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na** množině M). Značíme **ND**.

$$\text{Symbolicky: } (\forall x, y \in M)(\exists z \in M)[x \circ y = z].$$

Definice: Binární operace $\circ$ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall x, y \in M)[x \circ y = y \circ x].$$

Značíme **K**.

Definice: Binární operace $\circ$ definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall x, y, z \in M)[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

Značíme **A**.

Definice: Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$. Existuje-li prvek $e \in M$, pro který platí:

$$(\forall x \in M)[x \circ e = e \circ x = x].$$

Pak se prvek $e \in M$ nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci $\circ$**.**
Značíme **EN**.

Poznámka. Je-li operace $\circ$ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EN** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $x \circ e$ nebo $e \circ x$.

Definice : Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$ a nechť e je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci $\circ$. Prvek $\bar{a} \in M$ nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $a \in M$ v operaci $\circ$ v množině M právě tehdy, když platí:

$$\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e.$$

Jestliže $(\forall a \in M)(\exists \bar{a} \in M)[\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e]$, řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci $\circ$. Značíme **EI**.

Poznámka . Je-li operace $\circ$ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EI** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a}$.

Definice : Říkáme, že binární operace $\circ$ definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

$$(\forall a,\ b \in \mathrm{M})\ )(\exists\ x,\ y \in \mathrm{M})[\ a \circ x = b \quad y \circ a\ = b].$$

Značíme **ZR**.

Poznámka. Je-li operace $\circ$ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **ZR** lze vynechat jedna z výrokových forem $a \circ x = b$ nebo $y \circ a\ = b$.

Definice: Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$. Existuje-li prvek $g \in \mathrm{M}$, pro který platí:

$$(\forall x \in \mathrm{M})[\ x \circ g = g \circ x = g].$$

Pak se prvek g nazývá **agresivním** prvkem množiny M vzhledem k operaci $\circ$.

Určování vlastností operací

I. **Určených předpisem** – přímým výpočtem

II. **Určených tabulkou**:

ND – tabulka zcela vyplněna prvky množiny M

K – tabulka souměrná podle hlavní diagonály

A – kromě výjimek nelze z tabulky přímo poznat – viz dále

EN – existuje řádek a sloupec shodný se záhlavím tabulky

EI – v každém řádku a každém sloupci tabulky je neutrální prvek

ZR – v každém řádku i sloupci tabulky jsou všechny prvky množiny M

Agresivní prvek $g \in \mathrm{M}$ poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek g.

Užitečné vztahy: K $\Rightarrow$ ND, A $\Rightarrow$ ND, EI $\Rightarrow$ EN (užívají se v obměněném tvaru)

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{EI} \Leftrightarrow \mathrm{ZR})$$

Určování asociativnosti z tabulek:

1. Pohledem (velmi zřídka)

2. Ověřením všech možných trojic prvků (s využitím cvičení 9 – 13 v učebnici, s. 123 – 124) (těžkopádné a zdlouhavé)

3. Využitím obměny implikace A $\Rightarrow$ ND a implikace A $\Rightarrow$ (EI $\Leftrightarrow$ ZR)

4. Podle tvrzení: „ Operace, která splňuje EN $\wedge$ EI $\wedge$ ZR a současně není asociativní, existuje na množině o nejméně pěti prvcích“.

Užití na příkladech:

ad 1. Např.

o	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

ad 3. Nejčastější případ – rozbor implikace A $\Rightarrow$ (EI $\Leftrightarrow$ ZR). Je-li u EI a ZR rozdílná pravdivostní hodnota, pak operace není asociativní. Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 1, pak postupujeme podle bodu 4 (v písemných pracích jsou zadávány tabulky o maximálně čtyřech prvcích). Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 0, pak je nutno postupovat podle bodu 1 nebo 2. Zpravidla jde o bod 1, kdy určíme asociativnost přímo z tabulky.

o	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Má všechny vlastnosti.

Př: Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M = $\{a,b,c\}$ operace určená tabulkou:

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

○	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

□	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

■	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

*: ~~ND~~ ∧ ~~K~~ ∧ ~~A~~ ∧ EN ∧ EI ∧ ~~ZR~~

○: ND ∧ ~~K~~ ∧ ~~A~~ ∧ ~~EN~~ ∧ ~~EI~~ ∧ ZR

□: ~~ND~~ ∧ ~~K~~ ∧ ~~A~~ ∧ EN ∧ EI ∧ ~~ZR~~

■: ND ∧ ~~K~~ ∧ ~~A~~ ∧ EN ∧ EI ∧ ~~ZR~~

Př: V množině M = $\{a,b,c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:

a) K ∧ ~~EN~~ b) ND ∧ ~~K~~ ∧ EN c) ND ∧ EN ∧ ~~EI~~ d) A ∧ ~~ZR~~

e) ~~K~~ ∧ EN ∧ ~~EI~~ f) EI ∧ ZR g) ND ∧ ~~A~~ ∧ EI ∧ ~~ZR~~ h) ~~A~~ ∧ EN ∧ EI ∧ ZR

a)	a	b	c
a	c	a	b
b	a	c	c
c	b	c	b

b)	a	b	c
a	b	a	a
b	c	b	b
c	a	b	c

c)	a	b	c
a	b	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

d)	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

e)	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	c	c	a

f)	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

g)	a	b	c
a	c	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

Nemá			
řešení			