

Typy úloh k písemné části zkoušky

Zkoušející: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

- Jsou dány množiny $M = \{1,2,3,4\}$ a $N = \{a,b,c,d\}$.
 - Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N , která není zobrazením.
 - Definujte relaci Z , která je zobrazením z množiny N do M a určete přesně jeho typ.
 - Zapište výčtem prvků relaci $R \circ Z$ a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
 - Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M .
 - Na množině N definujte dvě různé permutace P_1, P_2 a určete permutace $P_1 \circ P_2$ a $P_2 \circ P_1$.

- Je dána množina $M = \{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:
 $R = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x + y = 5\}$, $T = \{[x, y] \in M \times M; x \neq 2 \vee y = x + 1\}$,
 $U = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \wedge y = x + 1\}$, $V = \{[1,3], [2,1], [3,2]\}$.
 - Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M . Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M ?
 - Zapište relace $R^{-1}, V^{-1}, V \circ V, U \circ V, R \circ U, R \circ (V \circ U)$. Je některá z těchto relací zobrazením v množině M ? Pokud ano, určete přesně typ.

- Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině $M = \{a, b, c\}$ operace $*$:

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

*	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

*	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

- V množině $M = \{a, b, c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
 - $K \wedge \overline{EN}$
 - $ND \wedge \overline{K} \wedge EN$
 - $ND \wedge EN \wedge \overline{EI}$
 - $A \wedge \overline{ZR}$
 - $\overline{K} \wedge EN \wedge \overline{EI}$
 - $EI \wedge ZR$
 - $ND \wedge \overline{A} \wedge EI \wedge \overline{ZR}$

U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v M existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

- Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace \circ v množině $\mathbf{N}(\mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$:
 - $x \circ y = 2x + y$
 - $x \circ y = x + y + 1$
 - $x \circ y = 2x + 2y$
 - $x \circ y = 2x - y$
 - $x \circ y = x + y - 2$
 - $x \circ y = x - 2y$
 - $x \circ y = xy + 1$
 - $x \circ y = x + y + xy$
 - $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly $+$, $-$, \cdot , $:$ označují obvyklé číselné operace):
 $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, -)$, (\mathbf{N}, \cdot) , $(\mathbf{N}, :)$, $(\mathbf{C}, +)$, $(\mathbf{C}, -)$,
 (\mathbf{C}, \cdot) , $(\mathbf{C}, :)$, (\mathbf{Q}, \cdot) , $(\mathbf{N}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$
 $(P(\mathbf{M}), \cup)$, $(P(\mathbf{M}), \cap)$, $(P(\mathbf{M}), \cup, \cap)$, $(P(\mathbf{M}), \cap, \cup)$, kde $P(\mathbf{M})$ je
potenční systém množiny $\mathbf{M} = \{a, b\}$
7. Necht' (G, \circ) je komutativní grupa. Dokažte podrobně, že pro každé prvky $a, b, c \in G$ platí: a) $\overline{a \circ b} = \overline{a} \circ \overline{b}$ b) $\overline{\overline{a}} = a$ c) $c \circ a = c \circ b \Rightarrow a = b$.
8. Množina $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné, b) nekonečné.
9. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny A, B, C tak, že množiny A, B mají společné dva prvky.
a) Rozhodněte a запиšte, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.
b) Porovnejte kardinální čísla množin A, B, C . Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.
c) Určete $|A| + |B|$, $|A| + |C|$, $|B| + |C|$, $|A| \cdot |B|$, $|A| \cdot |C|$.
10. Je dáno číslo 54. Zvolte si další přirozené číslo větší než 65 a menší než 70. Obě čísla запиšte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) číselné soustavě, použijte obě metody převodu. Dále vypočítejte ve čtyřkové (pětkové, sedmičkové, šestnáctkové) soustavě jejich součet, součin a rozdíl (proved'te zkoušky správnosti). Všechny výsledky získané ve čtyřkové soustavě převed'te přímo do soustavy dvojkové a šestnáctkové.
11. Vypočítejte a proved'te zkoušky správnosti:
a) $ABA_{12} + BAB_{12}$, b) $1A2E3_{16} - 76B9_{16}$, c) $13721_8 : 5_8$. Výsledky porovnejte.
12. Trojčiferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 6. Přesuneme-li ji na místo stovek (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 387 větší než původní číslo. Určete původní číslo.
13. Čtyřčiferné přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet roven 22. Obě krajní číslice jsou stejné, obě vnitřní číslice jsou rovněž stejné. Vyměníme-li krajní číslice s vnitřními, zvětší se číslo o 891. Určete obě čísla.
14. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla A, B platí:
a) $-(A + B) = (-A) + (-B)$ b) $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$ c) $(-A) \cdot (-B) = A \cdot B$
(v důkazu využijte této reprezentace: $A = [a, b]$, $B = [c, d]$).
15. Pro celá čísla A, B, X platí $A + X = B$. Určete celé číslo $X = [x, y]$, jestliže
 $A = [1, 3]$, $B = [7, 2]$.

16. Dokažte, že sčítání a násobení celých čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel.)
17. Dokažte, že rovnice $A \cdot X = B$ nemá v množině všech celých čísel řešení pro $A = [3, 0]$, $B = [0, 4]$.
18. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.
19. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují
 a) celé číslo 0 (nula) b) celé číslo 1 (jedna)
20. Jsou dána celá čísla $A = [1, 3]$, $B = [4, 5]$.
 a) Vypočítejte $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$. b) Porovnejte čísla A , B .
 Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.
21. Dokažte, že pro každá tři celá čísla A , B , C platí: $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$.
 Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „<“ v úloze 16 na s. 199 v učebnici.
22. Vypočítejte: $a + |b| \cdot |a| - |-a| + |a \cdot b| - |a|^2 + |-b|$ pro $a = -6$, $b = 3$.
23. Dokažte, že pro každé celé číslo a platí $|a| = |-a|$.
24. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd zlomků.)
25. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem (-5) . Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.
26. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísla desetinnými.
27. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo
 a) $3,56$ b) $1,4\bar{3}$ c) $0,2\bar{7}$ d) $0,1\bar{9}$

Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů studovaných v předmětech: Základy algebry a aritmetiky a Aritmetika 1