BINÁRNÍ OPERACE DANÉ PŘEDPISEM

PŘÍKLAD Určete vlastnosti operace $\circ$ dané předpisem

(a) $\boxed{\circ = \{[[x,y],z] \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} : z = 2x+y\}}$ $\qquad z = x \circ y = 2x+y$

ND: $(\forall a,b \in \mathbb{N})(\exists c \in \mathbb{N})[c = 2\cdot a + b]$ ✓

$\cancel{K}$: $(\forall a,b \in \mathbb{N})[\overset{L}{a \circ b} = \overset{P}{b \circ a}]$ $\qquad$ Např. $a=1, b=2$

$2\cdot 1 + 2 \neq 2 \cdot 2 + 1$

$4 \neq 5$

$$\left.\begin{aligned} L &= a \circ b = 2a+b \\ P &= b \circ a = 2b+a \end{aligned}\right\} P \neq L$$

$2a+b \neq 2b+a$ (neplatí $\forall a,b \in \mathbb{N}$)

$\cancel{A}$: $(\forall a,b,c \in \mathbb{N})[\overbrace{(a \circ b) \circ c}^{L} = \overbrace{a \circ (b \circ c)}^{P}]$

$L = (a \circ b) \circ c = (\underbrace{2a+b}_{k}) \circ c = k \circ c = 2 \cdot k + c =$

$= 2 \cdot (2a+b) + c = 4a + 2b + c$

$P = a \circ (b \circ c) = a \circ (\underbrace{2b+c}_{l}) = a \circ l = 2 \cdot a + l =$

$= 2 \cdot a + 2b + c$

$2a+2b+c \neq 4a+2b+c$

$P \neq L$

Např. $a=1, b=2, c=3$

$2\cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \neq$

$\neq 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3$

$\cancel{EN}$: $(\exists e \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})[a \circ e = e \circ a = a]$

$a \circ e = a$ $\qquad$ $e \circ a = a$

$2a + e = a$ $\qquad$ $2e + a = a$

$e = a - 2a = -a$ $\qquad$ $2e = 0 \quad e = 0$

rozpor $\Rightarrow$ neutrální prvek neexistuje

$\cancel{EN} \Rightarrow \cancel{EI}$

1. rovnost 2. rovnost

2

$\cancel{ZR}$: $(\forall a,b\in N)(\exists x,y\in N)[a\circ x=b \wedge y\circ a=b]$

operace $\circ$ není ZR => je třeba řešit obě rovnosti:

$$a\circ x=b$$
$$2a+x=b$$
$$x=b-2a$$

Např: $b=1$, $a=4$ $\quad x=1-2\cdot 4=-7$

$-7\notin N$ => není ZR, nemusíme řešit 2. rovnost

vlastnosti operace $\circ$:

$ND \wedge \cancel{K} \wedge \cancel{A} \wedge \cancel{EN} \wedge \cancel{E/I} \wedge \cancel{ZR}$ => $\boxed{(N,\circ) \text{ je grupoid}}$

(b) $\boxed{\circ=\{[[x,y],z]\in C^2\times C;\ z=x+y-2\}}$ $\quad z=x\circ y$, $z=x+y-2$

ND : $(\forall a,b\in C)(\exists c\in C)[c=a+b-2]$ ✓

K : $(\forall a,b\in C)[\overset{L}{a\circ b}=\overset{P}{b\circ a}]$

$L=a\circ b=a+b-2$
$P=b\circ a=b+a-2$
$\Big\}$ $a+b-2=b+a-2$ $\forall a,b\in C$

$L=P$ => (K)

A : $(\forall a,b,c\in C)[\overbrace{(a\circ b)\circ c}^{L}=\overbrace{a\circ(b\circ c)}^{P}]$

$L=(a\circ b)\circ c=(\underbrace{a+b-2}_{k})\circ c=k\circ c=k+c-2=$
$=a+b+c-2-2=a+b+c-4$

$P=a\circ(b\circ c)=a\circ(\underbrace{b+c-2}_{l})=a\circ l=a+l-2=$
$=a+b+c-2-2=a+b+c-4$

$a+b+c-4=a+b+c-4$

$L=P$ => (A)

EN: $(\exists e\in \mathbb{C})(\forall a\in \mathbb{C})[a\circ e = e\circ a = a]$

1. rovnice

$a\circ e = a$

$a+e-2=a$

$e = a-a+2$

$\underline{e=2}$

2. rovnice

$e\circ a = a$

$e+a-2=a$

$e=a-a+2$

$\underline{e=2}$

1. i 2. r-ce vyšla stejně $\Rightarrow$ neutrální prvek existuje $e=2$

Pozn: 2. rovnici jsme nemuseli řešit, neboť operace o je K

EI: $(\forall a\in \mathbb{C})(\exists \bar{a}\in \mathbb{C})[a\circ\bar{a} = \bar{a}\circ a = 2]$ e

1. rovnice

$a\circ\bar{a}=2$

$a+\bar{a}-2=2$

$\bar{a}=2+2-a$

$\underline{\bar{a}=4-a}$ $\bar{a}\in\mathbb{C}$

2. rovnice

$\bar{a}\circ a = 2$

$\bar{a}+a-2=2$

$\underline{\bar{a}=4-a}$

Pozn: 2. rovnici jsme nemuseli řešit, neboť operace o je K

1. i 2. r-ce vyšly stejně $\Rightarrow (\forall a\in\mathbb{C})[\exists\bar{a}\in\mathbb{C}]$

např. $a=5$

$\bar{a}=4-a=4-5=-1\in\mathbb{C}$

$a=-2$

$\bar{a}=4-(-2)=4+2=6\in\mathbb{C}$

$a=1$; $\bar{a}=4-(-1)=5$ tj. např. prvky 5, −1 jsou inverzní vzhledem k o.

ZR: $(\forall a,b\in\mathbb{C})(\exists x,y\in\mathbb{C})[a\circ x=b \wedge y\circ a=b]$

1. rovnice

$a\circ x=b$

$a+x-2=b$

$\underline{x=b+2-a}$

$x\in\mathbb{C}$ vždy

2. rovnice

$y\circ a=b$

$y+a-2=b$

$\underline{y=b-a-2}$

$y\in\mathbb{C}$ vždy

Pozn: 2. rovnici jsme nemuseli řešit, neboť operace o je K

výsledek (x, y je vždy celé číslo) $\Rightarrow$ ZR

$\boxed{(\mathbb{C},\circ) \text{ je grupa}}$

$$\boxed{\circ = \{[[x,y], z] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},\ z = x+y+x\cdot y\}}$$ $z = x\circ y$

$z = x+y+x\cdot y$ (4)

UD : $\underline{(\forall a,b\in\mathbb{R})(\exists c\in\mathbb{R})[c = a+b+a\cdot b]}$, $c\in\mathbb{R}$

K : $(\forall a,b\in\mathbb{R})[a\circ b = b\circ a]$

$$\left.\begin{aligned} L &= a\circ b = a+b+a\cdot b \\ P &= b\circ a = b+a+b\cdot a \end{aligned}\right\} \underline{\underline{P=L}} \Rightarrow K$$

A : $\underline{(\forall a,b,c\in\mathbb{R})[(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)]}$

$L = (a\circ b)\circ c = \underbrace{(a+b+a\cdot b)}_{k}\circ c = k\circ c = k+c+k\cdot c =$

$= (a+b+a\cdot b) + c + (a+b+a\cdot b)\cdot c = \underline{a+b+c+ab+ac+}$
$\underline{+bc+abc}$

$P = a\circ(b\circ c) = a\circ\underbrace{(b+c+b\cdot c)}_{l} = a\circ l = a+l+a\cdot l =$

$= a+b+c+b\cdot c + a\cdot(b+c+b\cdot c) = \underline{a+b+c+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c+}$
$\underline{+a\cdot b\cdot c}$

$\underline{\underline{P=L}} \Rightarrow A$

EN : $\underline{(\exists e\in\mathbb{R})(\forall a\in\mathbb{R})[a\circ e = e\circ a = a]}$

$a\circ e = a$ K $\Rightarrow$ 2. rovnost není třeba řešit

$a+e+a\cdot e = a$

$e + a\cdot e = 0$

$\underline{e\cdot(1+a) = 0}$ $\Rightarrow$ je-li $e=0$, ~~je rovnice řešit.~~ pak rovnost platí $\forall a\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{e=0}$ EN

EI : $\underline{(\forall a\in\mathbb{R})(\exists \bar{a}\in\mathbb{R})[a\circ\bar{a} = \bar{a}\circ a = 0]}$

$a\circ\bar{a} = 0$

$a+\bar{a}+a\cdot\bar{a} = 0$

$\bar{a} + a\cdot\bar{a} = -a$

$\bar{a}(1+a) = -a$

$\bar{a} = -\dfrac{a}{1+a}$ } pro $a=-1$ neexistuje $\bar{a}\in\mathbb{R}$ } $\Rightarrow$ ~~EI~~

(vyjde 0 ve jmenovateli)

$(\mathbb{R},\circ)$ je komut. pologrupa s neutrál. prvkem

ZR : $\underline{(\forall a,b\in\mathbb{R})(\exists x,y\in\mathbb{R})[a\circ x = b \wedge y\circ a = b]}$

$a\circ x = b$

$a+x+a\cdot x = b$

$x(1+a) = b-a$ $x = \dfrac{b-a}{1+a}$

pokud $a=-1$, pak rovnice nemá řešení $\Rightarrow$ ~~ZR~~