IMAp09 Didaktika matematiky 2

P 1

Geometrie v učivu matematiky 1. stupně ZŠ

Růžena Blažková

1. Proč se učíme geometrii

Každý z nás žije v trojrozměrném prostoru, obklopují nás nejrůznější objekty a my je využíváme k svým činnostem. Přitom zpravidla respektujeme vztahy, které mezi objekty platí (např. jejich polohu, jejich velikosti, vzájemné postavení). Dovednosti, které souvisejí s dobrými geometrickými představami, a znalostí geometrie potřebuje člověk v každé profesi, kterou vykonává, ať je to např. architekt, technik, lékař či učitel, nebo zedník, truhlář či kuchařka. Geometrické prvky nacházíme ve velké míře výtvarném umění, z mnoha umělců uveďme jen Leonarda da Vinciho nebo Albrechta Duhrera, kteří, mimo jiné, hledali zákonitosti, podle kterých se prostorová situace zobrazuje do roviny.

Geometrie má ve výuce matematiky specifické postavení. Poskytuje řadu možností k manipulativním činnostem, prostřednictvím kterých je možné rozvíjet představy žáků o vztazích mezi útvary. Vyžaduje nejen schopnosti matematicko-logické, ale také schopnosti vnímat vztahy mezi objekty jak v rovině, tak v prostoru, správně vnímat obrázek, na kterém je zobrazena prostorová situace v rovině papíru, umět pracovat s různou polohou objektů, s jejich velikostmi apod. Vyžaduje také schopnost umět obrázek nakreslit či narýsovat. Přitom objekty, které jsou v běžném životě reálné, mají v geometrii abstraktní podobu.

2. Cíle vyučování geometrii

Ve školské matematice pěstujeme základy geometrických znalostí a dovedností, a proto je potřebné uvědomit si, co je třeba naplnit, tedy je třeba stanovit si cíle výuky vzhledem k jednotlivým stupňům vzdělávání i vzhledem k věku žáků. Úkolem učitelů na prvním stupni ZŠ je vybudovat u žáků správné představy o geometrických pojmech a rozvíjet jejich geometrické nazírání a myšlení tak, aby je mohli v budoucnu využívat ve svém životě i v profesi, kterou si zvolí. Nejvhodnější věk pro rozvoj geometrické představivosti a prostorového vnímání je 5 – 12 roků dítěte. Na prvním stupni základní školy jde zejména o tyto cíle výuky geometrie:

- Přispívat k rozvoji geometrické a prostorové představivosti
- Vybudovat systém geometrických pojmů, jejich správné představy
- Umět řešit geometrické aplikační úlohy
- Rozvíjet konstrukční dovednosti žáků
- Vybudovat představu o velikostech objektů, jednotkách měr a jejich převodech
- Účelně využívat prostředky výpočetní techniky (program GeoGebra, interaktivní tabule)
- Přispívat k rozvoji komunikativních schopností žáků, zejména komunikaci obrazově názorné

Obsah výuky geometrie na základní škole je uveden v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání a každá škola jej stanoví ve svém Školním vzdělávacím programu. V těchto plánech jsou stanoveny očekávané výstupy a učivo geometrie prvního stupně ZŠ. Uvádíme základní informace o geometrických tématech:

3. Rámový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací obor: Matematika a její aplikace

Vzdělávací obsah: Geometrie v rovině a v prostoru

Očekávané výstupy - 1. období (1. – 3. ročník ZŠ)

Žák

- Rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa, nachází v realitě jejich reprezentaci
- Porovná velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky
- Rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině

Očekávané výstupy – 2. období (4. a 5. ročník ZŠ)

Žák

- Narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici), užívá jednoduché konstrukce
- Sčítá a odčítá graficky úsečky, určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran
- Sestrojí rovnoběžky a kolmice
- Určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

- Rozpozná a znázorní ve čtvercoví síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

Učivo:

Základní útvary v rovině: lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
Základní útvary v prostoru: kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
Délka úsečky
Obvod a obsah obrazce
Vzájemná poloha dvou přímek v rovině
Osově souměrné útvary.

4. Rozvoj geometrické a prostorové představivosti

Jak přispívat k **rozvoji geometrické a prostorové představivosti**

Definic pojmů „představivost geometrická“ a „představivost prostorová“ lze najít v didaktické literatuře mnoho. Pod pojmem geometrická představivost můžeme rozumět např. v souladu s F. Kuřinou *složku názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti.*

Pod pojmem prostorová představivost rozumíme např. v souladu s A. Šarounovou *soubor jednotlivých schopností, které se týkají představ člověka o prostoru, tvarech a vztazích mezi tělesy či mezi předměty a člověkem nebo o vzájemných dílčích částí lidského těla.* D. Jirotková uvádí, že *prostorová představivost se opírá o poznávání tvarů předmětů, jejich rozmístění a pohyb v prostoru.*

Rozvoj geometrických představ v rovině prostřednictvím různých aktivit:

Různé „skládanky“ sestavené z trojúhelníků, čtverců, obdélníků, kruhů. Děti si mohou vytvořit vlastní skládanku, která sestává z čtverců s délkou strany a = 3 cm, obdélníků s délkami stran a = 6 cm, b = 3 cm, i dalších obdélníků s jinými rozměry, rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnou velikosti 3 cm, rovnostranných trojúhelníků s délkou strany 3 cm, kruhů o průměru 3 cm, půlkruhů, čtvrtkruhů. Všechny útvary jsou vystřiženy z barevných papírů. Z těchto geometrických útvarů děti sestavují různé koláže (např. dopravní prostředky, stavby, postavičky, květiny apod.). Určují, kolik geometrických útvarů jednotlivých druhů bylo při sestavování koláže použito.

Velmi vhodnou pomůckou pro rozvoj geometrické představivosti je starý čínský hlavolam – Tangram. Sestává ze 7 útvarů (5 trojúhelníků, 1 čtverec, 1 kosodélník) sestavených do čtverce. Úkolem je vytvořit různé obrazce vhodnou kombinací všech 7 útvarů tangramu (je jich více než 6 000),

Skládání útvarů z papíru – od čepic, lodiček, parníků, kelímků, apod. ke skládání geometrických útvarů (viz např. Zajímavá geometrie pro každého)

Vhodnou aktivitou k rozvíjení geometrických představ je pokrývání roviny, Děti se snaží určitými útvary pokrýt zcela část roviny tak, aby se útvary nepřekrývaly. Poznávají, kterými útvary je možné část roviny pokrýt, ať se jedná o pravidelné mnohoúhelníky jednoho druhu (čtverec, trojúhelník, šestiúhelník) či další útvary (obdélník, trojúhelník, parkety, pentomina, hexomina, „zámková dlažba“, Escherovy obrazce) nebo i více geometrických útvarů (např. pravidelný osmiúhelník a čtverec).

Aktivity přispívající k rozvoji prostorové představivosti

K rozvíjení představivosti prostorové využíváme nejrůznějších stavebnic, lega apod. Systematičtější přístup je pak při vytváření staveb z krychlí, jsou aktivity zaměřeny postupně k určitému cíli. Děti nejprve vytvářejí stavby podle vlastní fantazie, poté podle plánu. Plán může mít formu kótovaného půdorysu, obrázku nakresleného ve volném rovnoběžném promítání, stavba může být zadána prostřednictvím pohledů na těleso (nárys, půdorys, bokorys – pohled zepředu, shora, zprava). Mohou sestavovat stavby, kdy dodržují určitou zákonitost (např. hradby). K modelování mnohostěnů mohou využívat stavebnice typu GEOMAG nebo MAGFORMERS. K modelování mnohostěnů může také posloužit hrášek (navlhčený) a párátka. Různé krabičky tvaru kvádru nebo krychle (ale i jiných, např. šestibokého hranolu, jehlanu) využíváme k sestavování sítí mnohostěnů.

Ve škole zpravidla používáme demonstrační modely různých těles. Děti by se měly seznamovat nejprve s modely plnými, později s modely stěnovými a nakonec s modely hranovými. Důležité je vyhledávání reprezentací objektů tvaru příslušných těles v běžném životě.

K rozvíjení prostorových představ přispívá i skládání z papíru, kdy se vytvářejí různé objekty typu origami, nebo nejrůznější tělesa a předměty (např. čepice. lodička, parník, kelímek …) . Vhodná je i hra TANTRIX, kdy z 56 žetonů tvaru šestiúhelníku s čarami různých barev se vytvářejí uzavřené křivé čáry podle pravidel.

5. Komunikace v rámci geometrie

Zamysleme se nad tím, jakou komunikaci při výuce geometrie používáme. Kromě běžné sociální komunikace se ve výuce geometrie setkáme s dalšími druhy komunikace. Jednak pojmenováváme jednotlivé objekty, představám dáváme slovní vyjádření, obohacujeme slovní zásobu dětí, zdokonalujeme jejich vyjadřovací schopnosti. Pracujeme také s obrázky, učíme děti „číst" a popisovat obrázky, tedy rozvíjíme jejich komunikaci obrazově názornou. V neposlední řadě pracujeme i s některými symboly, rozvíjíme tedy komunikaci symbolickou. Děti se učí text, např. zadání geometrické úlohy, přetransformovat do řešení, narýsování obrázku a naopak. Probíhá tedy proces podle schématu:

SLOVO (TEXT) → myšlenové operace → OBRÁZEK

OBRÁZEK → myšlenkové operace → SLOVO

Učitelé by se měli vyjadřovat stručně a přesně, v jednoduchých větách a měli by komentovat každou svou činnost. Děti by měly také nahlas komentovat, co rýsují, co vidí. Přitom u dětí tolerujeme jejich vyjadřování (např. kulička místo koule), pokud není v rozporu s matematickou správností. Po dětech nevyžadujeme žádné definice pojmů, avšak vytváříme představy pojmů v duchu správných definic (např. trojúhelník není jen jeho hranice).

6. Rýsování

Postupně rozvíjíme konstrukční dovednosti dětí, obrázky nejprve načrtnou, později rýsují. K rýsování jsou třeba pomůcky – trojúhelníkové pravítko (nebo dvě), přímé pravítko, kružítko, ořezaná tužka. Děti se nejprve učí základní konstrukce a ty pak využívají při konstrukci geometrických útvarů (trojúhelník, obdélník, čtverec).

Děti by měly mít jednu sadu pomůcek pro rýsování doma a druhou ve škole. Geometrie je zařazována do výuky méně často než aritmetika. Tím, že mají sadu pomůcek ve škole, odpadá problém se zapomínáním pomůcek.

Vzhledem k tomu, že v pracovních sešitech není dostatek prostoru k nácviku základních dovedností při rýsování, doporučujeme používat nelinkovaný sešit A5, kde si děti mohou konstrukce nacvičovat, bez obav z hodnocení.

K základním konstrukcím patří:

- Narýsování přímky, která prochází daným bodem
- Narýsování přímky, která prochází danými dvěma body
- Sestrojení přímky rovnoběžné s danou přímkou, procházející daným bodem
- Sestrojení přímky kolmé k dané přímce, procházející daným bodem
- Narýsování kružnice o daném středu a daném poloměru
- Určení bodu jako společného bodu dvou přímek nebo přímky a kružnice nebo dvou kružnic
- Přenesení úsečky k dané polopřímce
- Narýsování úsečky dané délky
- Sestrojení středu úsečky
- Sestrojení osy úsečky

Tyto základní konstrukce pak využíváme v dalších konstrukčních úlohách.

7. Pomůcky

Při výuce geometrie respektujeme v plné míře zásadu názornosti. Využíváme pomůcky demonstrační i pomůcky žákovské. Žáci mají co nejvíce podnětů k manipulativním činnostem a většinu učiva si mnohou odvodit vlastními aktivitami. Používáme modely rovinných útvarů (papírové, plastové), modely těles, stavebnice, ale také špejle, různé krabičky, měřidla k určování délky úsečky apod. V současnosti má velký vliv využívání IT technologií, kdy je možné geometrické představy přibližovat prostřednictvím animací, různých programů, využívání 3D tiskáren apod.

8. Vývoj pojmů

V předškolním věku většinou děti vnímají předměty podle velikosti nebo podle tvaru, jaký se jim jeví. Předměty jsou buď velké nebo malé, nebo je označují jako „hranaté“ nebo „kulaté“ nebo „špičaté“. V období kolem šestého roku dokáží postupně předměty diferencovat, takže z hranatých poznávají v rovině čtverec, obdélník, později mnohoúhelník, v prostoru krychli, kvádr, hranol, z kulatých v rovině kruh a kružnici, v prostoru kouli a válec, ze špičatých v rovině trojúhelník a v prostoru jehlan a kužel.

9. Čáry

Při kreslení a rýsování používáme různé druhy čar. Čáry klasifikujeme podle několika hledisek. Podle druhu rozlišujeme čáry pravidelné a nepravidelné. Pravidelné čáry jsou plné, čárkované, tečkované, střídavé. Čáry klasifikujeme také podle tloušťky na tenké tlusté, velmi tlusté. Pro potřeby didaktiky matematiky rozlišujeme čáry přímé, křivé a lomené. Křivé a lomené čáry mohou být otevřené nebo uzavřené, Čáry se využívají jednak k rozvoji grafomotoriky (také úchop tužky, tlak na tužku) a uvolnění zápěstí, jednak k chápání geometrických pojmů, např. přímka, kružnice, mnohoúhelník, atd.

V souvislosti s čarami sledujeme také dětskou kresbu, Od období tzv. čmáranic přecházejí děti ke kreslení „hlavonožců“, později vnímají proporce a perspektivu. Z tohoto hlediska také sledujeme děti, u kterých by se mohla projevit některá ze specifických poruch učení – v tomto případě dysgrafie.

10.Základní pojmy

Geometrie je dnes rozsáhlý vědní obor, který zahrnuje geometrii syntetickou, analytickou, diferenciální, a mnoho dalších oborů. Je budována deduktivně, tj. vychází ze základních pojmů, které jsou zavedeny pomocí axiomů (určitého počtu jednoduchých pravidel), odvozené pojmy se pak definují pomocí pojmů dříve zavedených.

Základními pojmy v geometrii vědecké jsou bod, přímka, rovina. Ostatní pojmy (polopřímka, polorovina, úsečka, úhel, trojúhelník, atd.) jsou pak budovány z těchto základních pojmů pomocí definic.

V geometrii školské jsou základními pojmy bod a úsečka. Zavádějí se názorně, na reálných objektech. Odvozenými pojmy jsou zde polopřímka, přímka – polopřímku je možné vyvodit na základě postupného prodlužování úsečky za jeden krajní bod, přímku prodlužováním úsečky za oba krajní body.

Bod chápeme jako průsečík dvou čar (dvou přímek, přímky a kružnice, dvou kružnic), označujeme malým křížkem a popisujeme písmeny velké abecedy písmem kolmým. Vždy bychom měli popisovat body tak, abychom při dalších konstrukcích nerýsovali čáry přes písmeno.

Úsečka AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje body A, B a všechny takové body X, které leží mezi body A, B. Úsečku přibližujeme dětem pomocí názoru, např. špejle, napjatá nit mezi dvěma body, hrana krychle apod. Úsečka se narýsuje (děti by měly vidět několik úseček v různých polohách a s různými krajními body).

Děti se seznamují s pojmy krajní body úsečky, např. krajní body úsečka AB jsou body A, B. Na příkladech určují, které body dané úsečce patří (leží na úsečce), které jí nepatří (neleží na úsečce).

Úseček se využívá ke kreslení různých lomených čar (hradby, zuby pily, některé dopravní značky, digitální číslice z úseček, písmena velké abecedy jen z úseček, apod.), vyhledávají a kreslí různé piktogramy z úseček.

Učivo, které je třeba zvládnout: (všechny konstrukce si proveďte sami nebo v semináři).

Přenášení úsečky k dané polopřímce.

Úkol: Úsečku AB přeneste k polopřímce PX.

Úsečku přenášíme pomocí proužku papíru nebo pomocí kružítka. Pozor na vyjadřování: do kružítka vezmeme úsečku AB (nikdy velikost úsečky nebo délku úsečky – pracujeme s množinou bodů).

Porovnávání úseček

Úkol: porovnejte úsečky AB a CD.

Při porovnávání úseček volíme úsečky tak, aby na první pohled nebyla patrné, která úsečka je větší, aby děti měly důvod, proč úsečky porovnat. Jednodušší je z jedné z úseček, např. z úsečky AB vytvořit polopřímku prodloužením za bod B a k polopřímce AB přenést úsečku CD. Přitom opět komentujeme postup: do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě A a poloměr CD. Průsečík oblouku s polopřímkou AB označíme E. Pokud bod E je bodem úsečky AB, je úsečka CD menší než AB. Pokud bod E splyne s bodem B, pak úsečky AB a CD jsou shodné, pokud bod E je bodem polopřímky AB za bodem B (není bodem úsečky AB), pak CD je větší než AB.

Shodnost úseček

Při porovnávání úseček může nastat možnost, kdy úsečky AB a CD jsou shodné. Shodnost úseček uvádí axiom shodnosti. Shodnost úseček je relace ekvivalence (je reflexivní, symetrická, tranzitivní).

Z hlediska využití v praktickém životě má uplatnění v mnoha povoláních (truhlář, zedník, švadlena aj.). Vyhledejte na internetu Optické klamy a pozorujte, jak se dá shodnost úseček porušit.

Grafický součet úseček

Najděte motivaci, kde se s grafickým součtem úseček setkáme v běžném životě.

Úkol: sečtěte graficky úsečky AB a CD.

Volíme jednodušší formu, kdy např. z úsečky AB sestrojíme polopřímku AB (prodloužíme za bod B) a úsečku CD přeneseme k polopřímce BX, kde bod X vyznačíme jako další bod polopřímky AB, za bodem B.

Opět dbáme na správné vyjadřování (učitel, děti nemusejí) Do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku s polopřímkou označíme E a platí:

AE = AB + CD .

Zopakujte si: Grafický součet úseček je operace neomezeně definovaná (každé dvě úsečky mohu sečíst), ke komutativní (AB + CD = CD + AB), je asociativní (při sčítání tří úseček AB + (CD + EF) = (AB + CD) + EF), neutrálním prvkem by byla nulová úsečka.

Grafický rozdíl úseček

Vyhledejte reprezentaci z běžného života, která ilustruje odčítání úseček.

Při řešení grafického rozdílu dvou úseček máme zpravidla zadány dvě úsečky a máme od větší odečíst menší. Toto je abstrakce, protože v běžném životě je dána jedna úsečka a ta se má např. zkrátit. Můžeme to uvést tak, že je dána úsečka a druhá úsečka ilustruje, o kolik se má daná úsečka zkrátit.

Úkol: Od úsečky AB odečtěte úsečku CD (AB je větší než CD).

Dbáme na správný postup: Do kružítka vezmeme úsečku CD a sestrojíme oblouk, který má střed v bodě B a poloměr CD. Průsečík oblouku s úsečkou AB označíme E. Platí: AE = AB – CD.

Poznámka: U grafického rozdílu nezáleží na tom, zda oblouk rýsujeme z bodu B nebo z bodu A, rozdíl úseček je stejný. Didakticky je vhodnější využít bodu B, aby se dětem grafický rozdíl nezaměňoval s porovnáváním úseček.

Násobek úsečky

Motivace – kde se setkáme v praxi s násobkem úsečky – např. pravidelné umístění sazenic v řádku na záhonku.

Postup: Je dána úsečka AB, máme narýsovat úsečku, která je dvojnásobkem úsečky AB. Využijeme grafického součtu úseček: 2 AB = AB + AB, dále 3 AB = 2 AB + AB, atd. obecně n AB = (n – 1) AB + AB.

Střed úsečky

Vycházíme z manipulativní činnosti, přeložením papíru. Děti samy mohou určit, co je středem úsečky AB. Střed úsečky AB je takový bod S úsečky AB, pro který platí AS je shodná s SB. Konstrukci středu úsečky provádíme kružítkem.

Osa úsečky

Osa úsečky AB je přímka, která prochází středen úsečky a je k úsečce kolmá. Opět se modeluje překládáním papíru.

Vlastnosti osy úsečky: Zvolíme-li na ose úsečky libovolný bod X, (který na úsečce neleží), pak porovnáváním zjistíme, že pro každý bod osy úsečky platí AX je shodná s BX. Tuto skutečnost vyjadřujeme větou:

Každý bod osy úsečky má od krajních bodů úsečky stejnou vzdálenost.