Algebra 1
Domácí úloha 2

20. • $(\mathbb{N}, \cdot)$: ND ✓ (součinem dvou přirozených čísel vznikne přir. č.)

A ✓ K ✓

N ✓ číslo 1

I × pouze číslo 1 má svůj inverzní prvek, ostatní ne

$(\mathbb{N}, \cdot)$ je komutativní monoid

• $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ je také komutativní monoid

• $(\mathbb{Z}, +)$: ND ✓

A ✓ K ✓

N ✓ číslo 0

I ✓ $\forall a \in \mathbb{Z}: a^{-1} = -a$

$(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa

• $(\mathbb{Z}, -)$: ND ✓

A × např. $(3-(-1))-7 = -3$

$3-(-1-7) = 5$ $\quad -3 \neq 5$

$(\mathbb{Z}, -)$ je grupoid

• $(\mathbb{Q}, +)$: ND ✓

A ✓ K ✓

N ✓ číslo 0

I ✓ $\forall a \in \mathbb{Q}: a^{-1} = -a$

$(\mathbb{Q}, +)$ je komutativní grupa.

- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, :)$: ND ✓

  A × např. $(1:\frac{1}{2}):\frac{1}{4} = 2:\frac{1}{4} = 8$

  $1:(\frac{1}{2}:\frac{1}{4}) = 1:2 = \frac{1}{2}$ $\quad 8 \neq \frac{1}{2}$

$(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, :)$ je grupoid

- $(\mathbb{Q}, \cdot)$: ND ✓

  A ✓ K ✓

  N ✓ číslo 1

  I × inverzní prvek mají všechny prvky, až na číslo 0

  $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ je komutativní monoid

- $(\mathbb{R}, -)$: ND ✓

  A ×

$(\mathbb{R}, -)$ je grupoid

- $(\mathbb{R}, \cdot)$ stejně jako $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ... komutativní monoid

21. $(\mathbb{Q}, \oplus)$

a) $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$

ND: $\forall a,b \in \mathbb{Q}: \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ operace $\oplus$ je na $\mathbb{Q}$ neomezeně definována

A: $\forall a,b,c \in \mathbb{Q}$:

$$\left.\begin{aligned} (a\oplus b)\oplus c &= \frac{a+b}{2} \oplus c = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b}{4} + \frac{c}{2} \\ a\oplus(b\oplus c) &= a \oplus \frac{b+c}{2} = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b+c}{4} \end{aligned}\right\} \neq$$

operace není asociativní. Operace je komutativní.

$(\mathbb{Q}, \oplus)$ je komutativní grupoid

b) $a \oplus b = a + \frac{b}{2}$

ND: $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a + \frac{b}{2} \in \mathbb{Q}$

A: $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a \oplus b) \oplus c = \left(a + \frac{b}{2}\right) \oplus c = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} (a \oplus b) \oplus c = \left(a + \frac{b}{2}\right) \oplus c = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \left(b + \frac{c}{2}\right) = a + \frac{b + \frac{c}{2}}{2} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \end{array}\right\} \neq$$

Operace není asociativní.

Není ani komutativní: $a + \frac{b}{2} \neq b + \frac{a}{2}$

$(\mathbb{Q}, \oplus)$ je grupoid.