

10. cvičení - KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Kdo jste se ještě nezaměřili s komplexními čísly, nastudujte si základy se stručnější učebnice nastavené ve studijních materiálech pod názvem 08-a-komplexní-čísla.pdf. Stejně tak můžete tohoto materiálu využít, jestliže bude výklad zde nedostatečný a nerozumíte.

Do příštího cvičení si připravte všechny příklady z tohoto materiálu.

Komplexní číslo v algebraickém tvaru je výraz tvaru

$[a + bi]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, i je číslo, pro něž platí $i^2 = -1$.

a - reálná část, b - imaginární část, i - imaginární jednotka
Je-li $a = 0$, mluvíme o reálné imaginárním čísle.

Operace $+$ a \cdot fungují u komplexních čísel tak, jak jsou zvyklí.

Power se při násobení využívá vztah $i^2 = -1$. Tedy

$$i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = i^1 \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i \quad i^4 = (i^2)^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = i \quad \text{a tak dále}$$

Algebra 1

10. cvičení

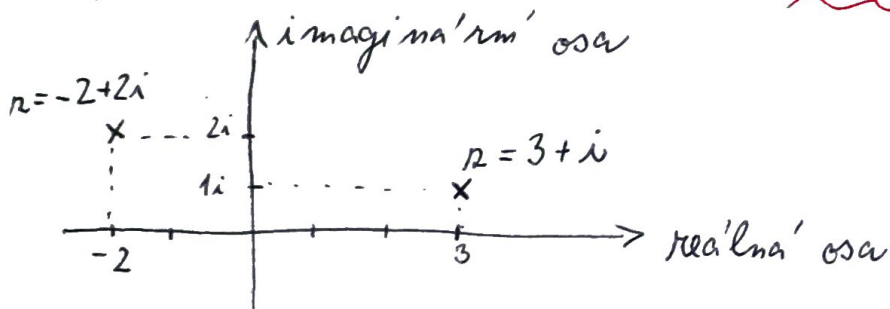
Př. 1. Vypočítejte a zapíšte v alg. tvaru $(a+bi)$

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$$

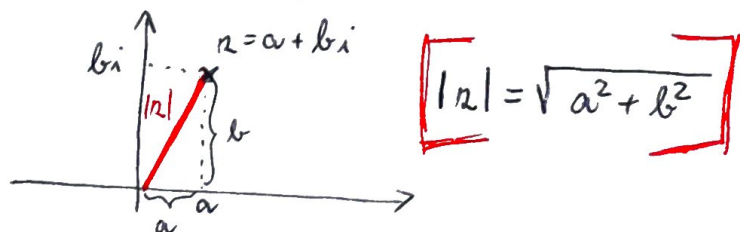
Číslo KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ s číslem $z = a+bi$ je $\bar{z} = a-bi$.

Platí $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ $(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

Komplexní čísla lze zakreslit do GAUSSOVY ROVINY



Absolutní hodnota komplexního čísla je v Gaussově rovině jeho vzdálenost od počátku. Je-li $|z| = 1$, nazývá se z komplexní jednotka.



Př. 2. Upravte číslo z do algebraického tvaru a následně určete jeho absolutní hodnotu.

a) $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1-2i$

b) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

Nápověda: Vytvárejte si ve jmenovateli z konjugát \bar{z} následovně

$$\frac{x}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{x(a-bi)}{a^2+b^2}, \quad x \in \mathbb{C}$$

10. cvičení

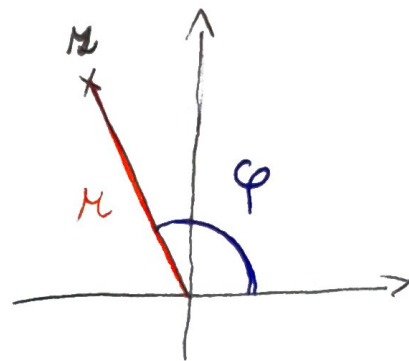
Př. 3: V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z ,
pro něž platí $|2+3i| \geq |z| > |1-i|$

GONIOMETRICKÝ TVAR komplexního čísla

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$r = |z|$ φ - argument komplexního čísla

- úhel svíraný přívodičem
čísla z a kladnou poloosou x

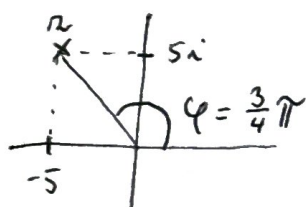


například

$$z = -5 + 5i$$

$$|z| = r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$z = 5\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$



$$\underline{\underline{z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)}}$$

~~Př. 4:~~ Př. 4: Zapište komplexní číslo v goniometrickém tvaru

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$ b) $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $z = \pi \cdot i$ d) $z = \frac{-3+i}{2+i}$

Na pověsta: ve variantě d) nejprve upravte do algebraického tvaru

Př. 5: Zapište komplexní číslo v algebraickém tvaru

a) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b) $z = \frac{1}{2} \left(\cos 193\pi + i \sin 193\pi \right)$