

11. cvičení - KOMPLEXNÍ ČÍSLA, 2. ČÁST

Při nejasnostech si opět můžete pomoci s materiálem
08-a - komplexní - čísla.pdf v ISu.

Do příštího cvičení si připravte všechny příklady
z tohoto materiálu.

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru jsou často velmi
výhodná pro výpočty, jak bude vidět z tohoto cvičení!

Součin komplexních čísel z_1, z_2 , kde

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z_2 = r_2 (\cos \rho + i \sin \rho) \quad \text{je roven}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi + \rho) + i \sin(\varphi + \rho))$$

Podobně podíl čísel z_1, z_2 je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi - \rho) + i \sin(\varphi - \rho))$$

2 pravidla pro výpočet součinu dvou komplexních
čísel vychází Moivreova věta
[moavrova]

Algebra 1

11 cvičení

MOIVREOVA VĚTA (rozšířená)

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{\left[r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \right]^m = r^m \cdot (\cos(m \cdot \varphi) + i \sin(m \cdot \varphi))}$$

Př. 1. Umocněte a uveďte výsledek v algebraickém tvaru

a) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{62}$

b) $(1 - i)^{100}$

c) $(-1 + i)^{66} - i(1 + i)^{80}$

Podobně jako umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru funguje i jejich odmocňování. Toho se využívá v binomických rovnicích.

BINOMICKÁ ROVNICE je rovnice tvaru $x^m - a = 0$, kde a je dané komplexní číslo, x je neznámá a $m > 1$ je přirozené číslo.

Binomická rovnice $x^m - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ má v komplexních číslech právě m různých řešení tvaru

$$x_k = \sqrt[m]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{m} \right), \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

Koreňny tvoří v Gaussově rovině všechny pravidelného m -úhelníku.

Algebra 1

3

11. cvičení

napiš'klad pro rovnici $x^4 + 2 - 2i = 0$ je $a = -2 + 2i$

Zapiš' v goniometrickém tvaru:

$$|a| = 2\sqrt{2} \quad a = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$$

Kořeně x_k vypiš' v jednotné obci

$$x_k = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3$$

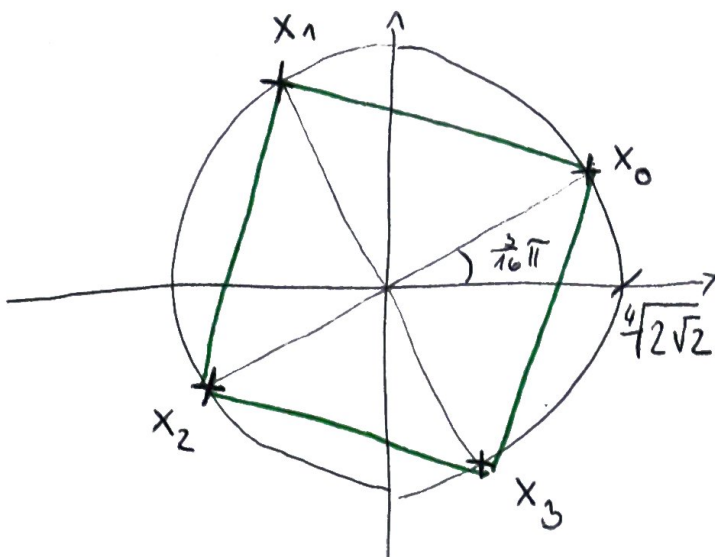
Vypiš' každé řešení rotací a zakreslene do Gaussovy roviny:

$$x_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3}{16}\pi + i \sin \frac{3}{16}\pi\right)$$

$$x_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{11}{16}\pi + i \sin \frac{11}{16}\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{19}{16}\pi + i \sin \frac{19}{16}\pi\right)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{27}{16}\pi + i \sin \frac{27}{16}\pi\right)$$



M. cricem'

Pr. 2. Rezolte binomiale' rovnice, vjstlede' radresete do Gaussovy rovnice

a) $x^3 = 27$

b) $x^6 - i = 0$

c) $x^8 - 1 = 0$

d) $x^6 + i\sqrt{3} - 1 = 0$