Algebra 1 – 2. cvičení

Vlastnosti operace na množině

V1: UZAVŘENOST množiny M vzhledem k operaci $*$

$\forall x,y \in M: \quad x * y \in M$

V2: ASOCIATIVITA operace $*$ na množině M

$\forall x,y,z \in M: \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

V3: EXISTENCE JEDNOTKOVÉHO PRVKU v množině M vzhledem k operaci $*$

$\exists e \in M: \quad x*e = e*x = x \quad \forall x \in M$

(pro sčítání také nazývaný „nulový prvek“)

V4: EXISTENCE INVERZNÍHO PRVKU KE KAŽDÉMU PRVKU v množině M vzhledem k operaci $*$

$\forall x \in M \quad \exists x^{-1} \in M: \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

V5: KOMUTATIVITA operace $*$ na množině M

$\forall x,y \in M: \quad x*y = y*x$

V6: DISTRIBUTIVNÍ ZÁKONY platné pro interakci dvou operací (např. $+$ a $\cdot$)

$\forall x,y,z \in M: \quad x*(y \circ z) = x*y \circ x*z$

$(y \circ z)*x = y*x \circ z*x$

Př. 1: Určete vlastnosti ($V_1 - V_5$), které má:

a) operace $+$ na množině $\mathbb{N}$

b) operace $\cdot$ na množině $\mathbb{R}$

c) operace $-$ na množině $\mathbb{Z}$

Řešení: a) V_1, V_2, V_5

b) V_1, V_2, V_3, V_5

c) V_1

Množina spolu s operací tvoří **ALGEBRAICKOU STRUKTURU**. Některé algebraické struktury mají speciální pojmenování na základě vlastností operace na množině.

Definice

______ $(M, *)$ je množina M s operací $*$ na ní definovanou tak, že splňuje vlastnosti ______.

	V1	V2	V3	V4	V5
GRUPOID	✓				✓
POLOGRUPA	✓	✓			✓
MONOID (= POLOGRUPA S JEDNOTKOU)	✓	✓	✓		✓
GRUPA	✓	✓	✓	✓	✓

KOMUTATIVNÍ

Přidáním vlastnosti V5 (komutativity) se před název struktury přidá „komutativní", tedy např. pologrupa (V1, V2) se změní v komutativní pologrupa (V1, V2, V5).

Př. 2: Určete typ algebraické struktury

a) $(\mathbb{Z}, +)$

b) $(\mathbb{N}, -)$

c) $(\mathbb{Q}, :)$

d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$

e) $(\mathbb{R}, \cdot)$

f) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

g) $(M, +)$
$M = \{-100; -99; \dots; 19; 20\}$

h) $(\mathcal{P}(A), \cap)$
$A = \{a, b\}$

Řešení: a) kom. grupa
b) alg. struktura
c) grupoid
d) kom. monoid
e) kom. monoid
f) kom. grupa
g) alg. struktura
h) kom. monoid

Př. 3: Urči typ algebraické struktury $(\mathbb{Z}, *)$, kde $a * b = a + b + 1$

Uzavřená? součet dvou celých čísel a čísla 1 je vždy celé číslo ✓

Komutativní? $a * b = a + b + 1$
$b * a = b + a + 1 = a + b + 1$ ✓

Asociativní? $(a * b) * c = (a + b + 1) * c = a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$
$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + b + c + 1 + 1 = a + b + c + 2$ ✓

Existuje jednotkový prvek? $a * e = e * a = a$ *
$a + e + 1 = e + a + 1 = a \rightarrow \underline{\underline{e = -1}}$ ✓

Inverzní prvek ke každému? $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ *

$a * a^{-1} = -1$

$a + a^{-1} + 1 = -1$

$a^{-1} = -a - 2$ (existuje pro každé a, např. $a = 2$, $a^{-1} = -4$; $a = 8$, $a^{-1} = -10$) ✓

KOMUTATIVNÍ GRUPA

Př. 4: Urči typ algebraické struktury

a) $(\mathbb{N}_0, *)$, $a * b = a^2 - 2ab + b^2$

b) $(\mathbb{N}, \circ)$, $a \circ b = a + b + ab$

c) $(\mathbb{R}, \triangle)$, $a \triangle b = \dfrac{a + b}{2}$

* díky komutativitě stačí ověřovat jednu z rovností $a * e = a$, $e * a = a$

Př. 5: Určete typ algebraické struktury $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c\}$ a $*$ je operace daná tabulkou

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

(Rada: asociativitu ověřujte až jako poslední)

Uzavřená? tabulka je vyplněna prvky množiny A ✓

Komutativní? poznáme z tabulky na základě symetrie podle hlavní diagonály (z levého horního rohu) ✓

Jednotkový prvek? $x * e = x$ → v tabulce řádek a sloupec kopírující záhlaví $\underline{e = c}$ ✓

Inverzní prvky? $a * a^{-1} = c$ $\quad b * b^{-1} = c$ $\quad c * c^{-1} = c$

$\underline{a^{-1} = b}$ $\quad \underline{b^{-1} = a}$ $\quad \underline{c^{-1} = c}$ ✓

Asociativní? Teoreticky bychom měli zkontrolovat, zda platí asociativita u 27 uspořádaných trojic prvků. Ve skutečnosti si lze práci zjednodušit.

- vyskytuje-li se v trojici neutrální prvek, trojice splňuje asociativitu
  → zbývá ověřit uspořádané trojice bez prvku c, těch je pouze 8
- je-li operace komutativní, platí asociativita pro všechny uspořádané trojice tvaru (x, x, x) a (x, y, x) → platí tedy asociativita u (a,a,a), (b,b,b), (a,b,a), (b,a,b), zbývá ji ověřit u trojic (b,a,a), (b,b,a), (a,b,b), (a,a,b):

$(b*a)*a = c*a = a$ $\quad (b*b)*a = a*a = b$ $\quad (a*b)*b = b$ $\quad (a*a)*b = a$

$b*(a*a) = b*b = a$ ✓ $\quad b*(b*a) = b*c = b$ ✓ $\quad a*(b*b) = b$ ✓ $\quad a*(a*b) = a$ ✓ ✓

→ $\underline{\text{KOMUTATIVNÍ GRUPA}}$

Př. 6: Urči typ algebraické struktury $(A, \circ)$

a) $A = \{x, y\}$

$\circ$	x	y
x	x	x
y	x	y

b) $A = \{x, y\}$

$\circ$	x	y
x	y	x
y	x	y

c) $A = \{x, y, z\}$

$\circ$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	x	z
z	z	z	x

Na cvičení v týdnu od 15. 3. si připravte příklady 4 a 6.