Algebra 1

3+4. cvičení

Podgrupa grupy $(G,*)$ – jak ji poznáme? S je podmnožina G, operace $*$

- stačí ověřit, že neprázdná podmnožina S je uzavřená vzhledem k operaci $*$ a že s každým prvkem $a \in S$ obsahuje množina S i prvek a^{-1} (tím si zajistíme i přítomnost neutrálního prvku, protože $a * a^{-1} = n$ a S je uzavřená vzhl. k $*$, tedy $n \in S$)

- triviální podgrupa – samotná grupa $(G,*)$ – tzn. $S = G$
  - grupa obsahující pouze jednotku $S = \{e\}$

- podgrupa grupy $(G,*)$ generovaná množinou S, značíme $\langle S \rangle$ – grupa, která vznikne vytvořením všech možných součinů (operace $*$) v rámci prvků ~~grupy~~ množiny S, např. $S = \{x,y\}$, pak $\langle S \rangle$ má prvky

  $x*y$, $x*x^{-1}*y$, $y^{-1}*x*y$, ...

  - je to nejmenší možná podgrupa obsahující prvky množiny S
  - pokud je celá grupa $(G,*)$ generována množinou S obsahující jediný prvek, nazývá se cyklická grupa

Př. 1: Určete, zda množina H spolu s operací $*$ tvoří podgrupu $(G,*)$

a) $(G,*) = (\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$, $H = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $(G,*) = (\mathbb{R}, +)$, $H = \{\log a, a \in \mathbb{Z}, a > 0\}$

c) $(G,*) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x,y) ; y = 2x\}$

$\downarrow$

vektory a jejich sčítání – provádí se po složkách

$(1,3) + (7,-2) = (8,1)$

Řešení: ~~XX~~

Naším úkolem je určit, zda je množina H uzavřená vzhledem k operaci, zda v ní existuje neutrální prvek (je stejný jako v G) a zda ke každému prvku existuje prvek inverzní

a) $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$, $H = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$

✓ U: $2^n \cdot 2^y = 2^{n+y}$, $n+y \in \mathbb{Z}$, protože $n \in \mathbb{Z}$ a $y \in \mathbb{Z}$

✓ $\exists n$: neutrální prvek pro $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ je $n = 1$, ten můžeme zapsat $n = 1 = 2^0$, $0 \in \mathbb{Z}$, $2^0 \in H$

✓ $\exists x^{-1}$: $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$ $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$, jestliže $n \in \mathbb{Z}$, také $-n \in \mathbb{Z}$ a proto $2^{-n} \in H$ pro $\forall n \in \mathbb{Z}$

$(H, \cdot)$ je podgrupa $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$

Př. 2: Nalezněte alespoň dvě podgrupy grupy $(G, *)$

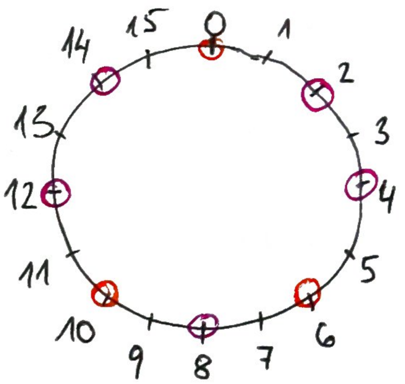
a) $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$

b) $(G, *) = (F(\mathbb{R}), +)$, kde $F(\mathbb{R})$ je množina všech reálných funkcí

Př. 3: Vypište všechny prvky podgrupy $\langle 6 \rangle$ grupy $(H_{16}, +)$

tj. grupy pootočení hodinových ručiček o 1/16 plného úhlu

<u>Řešení:</u>



K prvku $\underline{6}$ musí grupa jistě obsahovat inverzní prvek $-6 = \underline{10}$ (v H_{16} $10+6=\underline{0}$), dále obsahuje všechny možné součty vzniklých prvků

$6+6=\underline{12}$ $\quad 2+6=\underline{8}$ $\quad 2+2=\underline{4}$

$12+6=\underline{2}$ $\quad 8+6=\underline{14}$

Součtem sudých čísel vždy dostaneme sudé číslo

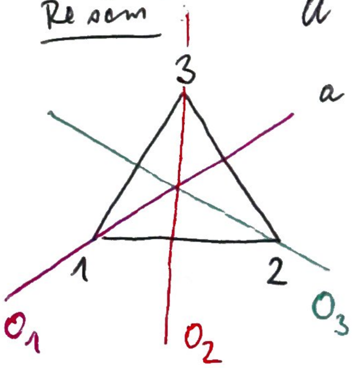
$$\langle 6 \rangle = \underline{\underline{\{6, 10, 0, 12, 2, 8, 14, 4\}}}$$

Př. 4: Určete všechny cyklické podgrupy grupy $(H_{10}, +)$

Př. 5: Vypište všechny prvky podgrupy $\langle 6, 9 \rangle$ grupy $(H_{12}, +)$

Př. 6: Určete všechny prvky grupy symetrií rovnostranného Δ, vytvořte tabulku skládání symetrií. Je tato grupa komutativní?

Řešení:



U rovnostranného Δ existují 3 možná pootočení (o $0°$, $120°$ a $240°$) a 3 osy souměrnosti viz obrázek

Popišme jednotlivé symetrie pomocí permutací:

$R_0 = id$ pootočení o $0°$

$R_1 = (1,2,3)$ pootočení o $120°$

$R_2 = (1,3,2)$ pootočení o $240°$

$R_3 = (2,3)$ osa o_1

$R_4 = (1,2)$ osa o_2

$R_5 = (1,3)$ osa o_3

$\circ$	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_0	id	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	R_1	R_2	id	R_4	R_5	R_3
R_2	R_2	id	R_1	R_5	R_3	R_4
R_3	R_3	R_5	R_4	id	R_2	R_1
R_4	R_4	R_3	R_5	R_1	id	R_2
R_5	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	id

$R_0 = e$

není komutativní grupa

$R_1 \circ R_2 = (1,2,3) \circ (1,3,2) = id$

$R_1 \circ R_1 = (1,2,3) \circ (1,2,3) = (1,3,2)$

$R_1 \circ R_3 = (1,2,3) \circ (2,3) = (1,2)$

$R_1 \circ R_4 = (1,2,3) \circ (1,2) = (1,3)$

$R_1 \circ R_5 = (1,2,3) \circ (1,3) = (2,3)$

$R_2 \circ R_1 = (1,3,2) \circ (1,2,3) = id$

$R_3 \circ R_1 = (2,3) \circ (1,2,3) = (1,3)$

$\vdots$

Př. 7: Vypište prvky cyklické podgrupy grupy $(S_6, \circ)$ generované prvkem $f = (1,2,3,4)\circ(5,6)$

Řešení: Mezi prvky cyklické grupy musí patřit neutrální prvek (v případě skládání permutací $n = id$), zároveň s f musí do grupy patřit f^{-1}, které získáme otočením pořadí prvků v závorkách f.

$f = (1,2,3,4)\circ(5,6)$ $\qquad$ $f^{-1} = (4,3,2,1)\circ(6,5)$

(Kontrola $f\circ f^{-1} = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(4,3,2,1)\circ(6,5) = id$)

Další prvky grupy získáme skládáním všech možných dvojic již nalezených prvků.

$f\circ f = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(1,2,3,4)\circ(5,6) = (1,3)\circ(2,4) = g$

$g\circ g = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,3)\circ(2,4) = id$

$f\circ g = (1,2,3,4)\circ(5,6)\circ(1,3)\circ(2,4) = (1,4,3,2)\circ(5,6) = f^{-1}$

$f^{-1}\circ f^{-1} = (4,3,2,1)\circ(6,5)\circ(4,3,2,1)\circ(6,5) = (1,3)\circ(2,4) = g$

$f^{-1}\circ g = (4,3,2,1)\circ(6,5)\circ(1,3)\circ(2,4) = (1,2,3,4)\circ(5,6) = f$

$g\circ f = (1,3)\circ(2,4)\circ(1,2,3,4)\circ(5,6) = (1,4,3,2)\circ(5,6) = f^{-1}$

Při skládání prvků můžeme využít tabulku

$\circ$	id	f	f^{-1}	g
id	id	f	f^{-1}	g
f	f	g	id	f^{-1}
f^{-1}	f^{-1}	id	g	f
g	g	f^{-1}	f	id

V: Operace na cyklické podgrupě je vždy komutativní!

Prvky cyklické podgrupy $\langle (1,2,3,4)\circ(5,6)\rangle$ jsou

$\{(1,2,3,4)\circ(5,6),\ (4,3,2,1)\circ(6,5),\ (1,3)\circ(2,4),\ id\}$

Př. 8 Podgrupa grupy $(S_4, \circ)$ generovaná prvky $f = (1,3)\circ(2,4)$

$g = (3,4)$

má 8 prvků. Nalezněte je všechny.

Př. 9. Uvažujme grupu $(S_3, \circ)$. Kolik má prvků?

a) dokažte, že $(S_3, \circ)$ není cyklická grupa

b) nalezněte dvouprvkovou podmnožinu S_3 generující grupu $(S_3, \circ)$

Návod: u a) pracujte postupně s jednotlivými prvky S_3.

Na příští cvičení si připravte příklady 1b,c , 2, 4, 5