## Kapitola XIV.

### NEURČITÉ VÝRAZY. L´HOSPITALOVO PRAVIDLO.

Při výpočtu limity lomené funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ v bodě $\underline{a}$ jsme po dosazení $x=a$ přicházeli k výrazu $\frac{0}{0}$, který jsme ponechali jako symbol, neboť jako zlomek neměl smysl. Poznali jsme mnoho lomených funkcí, jež pro určité x vedly k tomuto symbolu a jejichž limity byly většinou od sebe různé.
Symbol $\frac{0}{0}$, který sám o sobě nemá žádný početní význam, patří ke skupině tak zvaných neurčitých výrazů, jež zavádíme užitím limit dvou funkcí.

<u>Neurčitý výraz</u> $\frac{0}{0}$ : (114)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$, pak $\frac{u(x)}{v(x)}$ je pro $x \to a$ neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$

Jestliže k symbolu $\frac{0}{0}$ můžeme přijít většinou pouhým dosazením určitého čísla do dané funkce, není to možné u jiných neurčitých výrazů, jež jsou vyjádřeny užitím symbolu $\infty$. Nelze totiž zapsat, že nějaký výraz dává po dosazení symbol $\infty$ a sám symbol $\infty$ nelze také dosazovat, neboť není číslem, kdežto nula je číslo.
Z neurčitých výrazů, obsahujících symbol $\infty$, je nejzákladnější

<u>neurčitý výraz</u> $\frac{\infty}{\infty}$ : (115)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \pm\infty$, pak $\frac{u(x)}{v(x)}$ je pro $x \to a$ neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$

Ostatní neurčité výrazy $0.\infty$ , $\infty - \infty$ , $0^0$ , $0^\infty$ , $\infty^0$ , $1^\infty$ zavedeme postupně až při výpočtu limit některých funkcí tvarů $u(x).v(x)$ , $u(x) - v(x)$ , a $[u(x)]^{v(x)}$ .

<u>Limity funkcí, jež vedou k neurčitým výrazům</u> $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ vypočítáváme užitím tzv. <u>L´HOSPITALOVA PRAVIDLA</u> , které stručně zapíšeme :

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u''(x)}{v''(x)} = \dots\dots\dots\dots = \lim_{x\to a}\frac{u^{(n)}(x)}{v^{(n)}(x)} \qquad (116)$$

Když po případné úpravě je podíl $\frac{u'(x)}{v'(x)}$ opět neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, určujeme dále $\lim \frac{u''(x)}{v''(x)}$ . Podle potřeby užíváme l´Hospitalova pravidla až po limitu, která se dá vypočítat.

I. <u>Výpočet limity funkce $\frac{u(x)}{v(x)}$ již po užití prvních derivací $u'(x)$ , $v'(x)$.</u>

/86/. <u>příklad</u>: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.\cos x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - x.\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}\lim\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}$

256. <u>cvičení</u>. Vypočtěte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$, $[1]$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x - 1}{\sin 4x}$, $[-\frac{1}{2}]$; c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$; d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$, $[1]$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}]$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+x+1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$, $[2]$;

Výsledky: f) $[\frac{4}{\pi}]$ ; c) $[0]$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x.\cos x}$, [2]; k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$, [a-b]; m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$, [1].

DESÍTKA ÚLOH čís 50

Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-1+\cos 3x}{e^{x}-e^{-x}}$, $[\frac{1}{2}]$ ;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\ln\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}}$, $[-a]$ ;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}-\cos bx}$, $[\frac{a}{b}]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x}}$, $[0]$ ;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^3-2x^2-x-6}$, $[\frac{3}{70}]$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-b^{x}}{x.\sqrt{1-x^2}}$, $[\ln\frac{a}{b}]$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x-\cos x}$, $[1]$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$, $[\frac{1}{3}]$ ;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-1}{\ln x}$, $[1]$;

10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\arcsin(x-a)}{\operatorname{tg}(x-a)}$ $[1]$ .

II. Výpočet limity funkce po vícenásobném užití l´Hospitalova pravidla .

/87/. příklad: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

DESÍTKA ÚLOH čís. 51

Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$, $[0]$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2a}}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$, $[\frac{1}{8}]$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^3}$, $[\frac{1}{3}]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)^2}{\sin^3 x}$, $[0]$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1}{\cos x+\frac{1}{2}x^2-1}$, $[1]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, $[\frac{1}{6}]$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg}x}$, $[0]$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-x}{1-x+\ln x}$, $[-2]$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$, $[1]$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n}-nx+n-1}{(x-1)^2}$ $[\frac{(n-1)n}{2}]$.

III. Výpočet limity funkce úpravou na součin limit funkcí.

Než užijeme znovu l´Hospitalova pravidla, pokusíme se nahradit funkci součinem funkcí, jejichž limity dovedeme vypočítat dřívějšími metodami nebo opět pravidlem l´Hospitalovým.

/88/. příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x.(\sqrt{1-x^2}-1-x^2)}{(1-\cos^3 x)(1+x^2).\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1-x^2}{1-\cos^3 x}=\frac{1}{1.1}.\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-2x}{3\cos^2 x.\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x.(1+2\sqrt{1-x^2})}{3\cos^2 x.\sin x.\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos^2 x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.\lim_{x\to 0}\frac{1+2.\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}.1.\frac{3}{1}=-1$$

257. cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, $[1]$; b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$, $a>0, b>0$, $[1]$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$, $[-2]$

**DESÍTKA ÚLOH čís. 52** Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-sinx}{x^3}$, $[\frac{1}{2}]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx-x}{arcsinx-x}$, $[-1]$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $[\frac{a^2}{b^2}]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$, $[\frac{a}{\sqrt{b}}]$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.e^{\cos x}}{1-\sin x-\cos x}$, $[-e]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3.\sin x}{(1-\cos x)^2}$, $[4]$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2.\cos x}{1-\cos x}$, $[2]$; 8) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)+tg\frac{\pi}{2}x}{cotg\,\pi x}$, $[-2]$; 9) $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\cos x.\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$, $[\cos a]$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x^2-1}{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}$, $[-3]$.

**Neurčité výrazy $0.\infty$**

(117)

Je-li $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, pak $u(x).v(x)$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $0.\infty$

Při výpočtu limity převádíme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, abychom mohli užít l'Hospitalova pravidla.

/89/. příklad: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x).tg\frac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{cotg\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}.\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

258. cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}x.\sin\frac{a}{x}$, $[a]$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(2-x).cotg\,\pi x$, $[-\frac{1}{\pi}]$

**DESÍTKA ÚLOH čís. 53** Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin(x-a).cotg(x-a)$, $[1]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1).cotg\,x$, $[1]$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x.(e^{\frac{1}{x}}-1)$, $[1]$; 4) $\lim\limits_{x\to a}(\sin a-\sin x).tg\frac{\pi x}{2a}$, $[\frac{2a}{\pi}\cos a]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2.arctg\,x).\ln x$, $[0]$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\ln\cos\frac{\pi}{x}$, $[-\frac{\pi^2}{2}]$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x})$, $[2\pi]$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2.(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)$, $[\ln^2 a]$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln\frac{2a+x}{a+x}$, $[a]$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+a).\ln(1+\frac{a}{x})$, $[a]$

**Neurčité výrazy $\infty-\infty$**

(118)

Je-li $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$, pak $[u(x)-v(x)]$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $\infty-\infty$

**Obyčejně jde o rozdíl lomených funkcí. Uvedením na společného jmenovatele obdržíme typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Obecně lze užít úpravy: $u-v=\dfrac{1}{u^{-1}}-\dfrac{1}{v^{-1}}=\dfrac{v^{-1}-u^{-1}}{u^{-1}.v^{-1}}$**

/90/. příklad: $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=L$ ; $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{e^x-1}=\infty$. Typ: $\infty-\infty$

$$L=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1-x}{x.(e^x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$$

259. <u>cvičení</u>. Vypočtěte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)$, $[0]$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$, $[0]$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$, $[0]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 54

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$, $[-\frac{1}{2}]$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x.\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $[\frac{1}{6}]$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$, $[\frac{1}{3}]$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2.\cos x}\right)$, $[-1]$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$, $[\frac{1}{2}]$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$, $[-\frac{1}{2}]$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, $[\frac{1}{2}]$;

8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$, $[\frac{1}{12}]$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$, $[0]$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$, $[\frac{1}{5}]$

<u>Neurčité výrazy $0^0$, $\infty^0$, $0^\infty$, $1^\infty$, k nimž vede funkce</u> $[u(x)]^{v(x)}$ (119)

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $0^0$

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $\infty^0$

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. výraz typu $0^\infty$

Je-li $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, pak $u(x)^{v(x)}$ je pro $x\to a$ neur. váraz typu $1^\infty$

Při výpočtu limity $L = \lim [u(x)]^{v(x)}$ postupujeme dvojím způsobem (jako při derivování takové funkce) :

1. způsob. (Rovnost logaritmujeme )

$$\ln L = \ln[\lim u(x)^{v(x)}] = \lim[\ln u(x)^{v(x)}] = \lim[v(x).\ln u(x)] = m$$

Existuje-li $\lim [v(x).\ln u(x)] = m$, pak $L = e^m$ .

2. způsob. (Užijeme rovnosti $a^b = e^{b.\ln a}$ pro $a > 0$ )

$$L = \lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x).\ln u(x)} = e^{\lim [v(x).\ln u(x)]} = e^m ,$$

za předpokladu, že limita v exponentu existuje.

Oba způsoby vedou k typu $0 . \infty$ a další úpravou na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ .

/91/. <u>příklad</u>: $\lim\limits_{x\to 1-} (1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x} = L$ ; $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x) = 0$ , $\lim\limits_{x\to 1-} \cos\frac{\pi}{2}x = 0$ . Typ $0^0$.

2. způsob:

$$L = \lim_{x\to 1-} e^{\cos\frac{\pi}{2}x.\ln(1-x)} = e^{\lim \cos\frac{\pi}{2}x.\ln(1-x)} = e^m = e^0 = 1 \text{, neboť}$$

$$m = \lim_{x\to 1-} \cos\tfrac{\pi}{2}x.\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{(\cos\frac{\pi}{2}x)^{-1}} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-(\cos\frac{\pi}{2}x)^{-2}.\sin\frac{\pi}{2}x.\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}.\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}.\lim_{x\to 1-}\frac{(\cos\frac{\pi}{2}x)^2}{1-x} = -\frac{2}{\pi}.1.\lim_{x\to 1-}\frac{-2\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\sin\frac{\pi}{2}x.\frac{\pi}{2}}{-1} = 0$$

260.cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, $[1]$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^x$, $[1]$; c) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\sin x}$, $[1]$.

/92/.příklad: $\lim\limits_{x\to 0+} (\ln \frac{1}{x})^x = L$; $\lim\limits_{x\to 0+} \ln \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$. Je to typ $\infty^0$.

1.způsob:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x\to 0+} (\ln \tfrac{1}{x})^x\right] = \lim_{x\to 0+} \left[\ln(\ln \tfrac{1}{x})^x\right] = \lim_{x\to 0+} \left[x.\ln(\ln \tfrac{1}{x})\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\ln \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln\frac{1}{x})^{-1}.x(-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-\ln x} = 0$$

$$L = e^0 = 1$$

261.cvičení.

a) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$, $[1]$; b) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{\frac{1}{x^2}}$, $[1]$; c) $\lim\limits_{x\to 0+} (\mathrm{cotg}\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$, $[\frac{1}{e}]$.

| DESÍTKA ÚLOH čís. 55 |
|---|

Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to a+} (x-a)^{x-a}$, $[1]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$, $[e^3]$; 3) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$, $[1]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$, $[1]$; 5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, $[e]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0+} (\mathrm{cotg}\, x)^{\sin x}$, $[1]$;

7) $\lim\limits_{x\to 0+} (\frac{1}{x})^{\mathrm{tg}x}$, $[1]$; 8) $\lim\limits_{x\to 0+} (1+\frac{a}{x})^x$, $[1]$; $a>0$; 9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi}$, /1/;

10) $\lim\limits_{x\to \infty} (\mathrm{tg}\, \frac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$, $[1]$.

262.cvičení. Vypočtěte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x\to \infty} (\cos\frac{a}{x})^x$, $[1]$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\, x)^{\mathrm{tg}2x}$, $[\frac{1}{e}]$; c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, $[\frac{1}{e}]$; d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, $[1]$.

| DESÍTKA ÚLOH čís. 56 |
|---|

Vypočtěte limity funkcí :

1) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$, $[e^2]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{x^{-2}}$, $[e^{-2}]$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x^2})^x$, $[1]$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$, $[e^3]$; 5) $\lim\limits_{x\to \infty} (\frac{x^2-1}{x^2})^{x^4}$, $[0]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{cotg}x}$, $[e]$

7) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{cotg}^2x}$, $[e^3]$; 8) $\lim\limits_{x\to a} (2-\frac{x}{a})^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$, $[e^{\frac{2}{\pi}}]$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} [\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+x)]^{\mathrm{cotg}2x}$, /e/; 10) $\lim\limits_{x\to a} (\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$, $[e^{\mathrm{cotg}\, a}]$.