přednáška 11:
test střední hodnoty průměru při NEznámém rozptylu
a) test $\mu_1 = const$
b) test $\mu_1 = \mu_2$

Literatura v IS:

Přednáška by měla být přepsána během pondělka 10. května 2021 do textu Ma0008.

Dosud probrané testy statistické:

B) test střední hodnoty binomického rozdělení

C) Test střední hodnoty průměru při známém rozptylu

A nyní se zaměříme na

D) Test střední hodnoty průměru při neznámém rozptylu

Test střední hodnoty průměru při neznámém rozptylu:

V reálných datech rozptyl σ^2 většinou neznáme, tj. při pravděpodobnostním či statistickém popisu jej musíme odhadnout

- Odhad rozptylu budeme značit est σ^2

(z anglického „estimate“ = odhad)

První adept na odhad neznámého rozptylu na základě měření:

$$\text{est}\,\sigma^2 = s^2 = \left(\frac{1}{N}\cdot\sum_1^N {x_i}^2\right) - \bar{x}^2$$

(průměr čtverců MINUS čtverec průměru měření)

- Problém: tento odhad je vždy o něco menší než skutečný rozptyl

druhý adept na odhad neznámého rozptylu:

řešení problému: vždy hodnotu $s^2 = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_1^N x_i^2\right) - \bar{x}^2$ o kousek zvětšíme, a dostaneme už dobrý odhad neznámého rozptylu σ^2 :

- Vynásobíme s^2 číslem $\frac{N}{N-1}$, které je větší než 1:

$$\text{est } \sigma^2 = \frac{N}{N-1} \cdot s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2$$

Každý odhad rozptylu bude na základě určitého počtu stupňů volnosti:

Úloha: nadiktujte mi 5 reálných čísel
má 5 stupňů volnosti: 3, 20, -345, 6, 18

ALE Úloha: nadiktujte mi 5 reálných čísel, jejichž průměr je
- 10, má jen 4 stupně volnosti: 3, 20, -345, 6, ... a poslední číslo je už pevně dáno: musí být takové, aby součet daných pěti čísel byl roven 50, pak jejich průměr bude 10

Podobně i při odhadu rozptylu na základě měření N hodnot:

$$\text{est}\ \sigma^2 = \frac{N}{N-1} \cdot s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2$$

... ve vzorci je už vypočten průměr $\bar{x}$, při výpočtu rozptylu určujeme průměr kvadratických odchylek od tohoto průměru, tj. volnost tohoto odhadu je o jednu hodnotu menší, čili V= N-1

Obecně platí pro počty stupňů volnosti v jednom souboru měření:

Počet stupňů volnosti odhadu = počet měření MINUS počet parametrů odhadovaných již dříve

párový t-test
(experiment opakovaného měření … na jednom souboru jedinců provedeme dvojí měření)

Příklad 4:

Chceme zjistit, zda kofein (káva) zvyšuje srdeční tep. Proto u 9 lidí změříme srdeční tep, a potom měření zopakujeme poté, co vypili šálek kávy s kofeinem

Získala se následující data:

Tep bez kofeinu	Tep po šálku kávy	Rozdíly obou měření
70	76	6
60	61	1
49	52	3
72	71	-1
70	81	11
66	70	4
55	55	0
54	61	7
80	89	9

Ze sloupce odchylek vidíme, že tep se po kávě zvýšil; chceme ale rozhodnout na základě stat. testu

K1) H0: $\mu = 0$ (průměr odchylek je zhruba nulový, srdeční tep nezávisí na kofeinu)

H1: $\mu \neq 0$ (tep závisí na kofeinu, odchylky mezi oběma situacemi jsou významně různé)

K2) kritérium … průměr $\bar{X}$, respektive jeho normovaná hodnota $\frac{\bar{X}-0}{est\,\sigma_{\bar{X}}}$ … děláme skoro totéž co u veličiny s normálním rozdělením, odečítáme střední hodnotu a dělíme (nikoli odchylkou, ale) odhadem odchylky

K3) $\frac{\bar{X}-0}{est\,\sigma_{\bar{X}}}$ nelze popsat normálním rozdělením, protože neznáme rozptyl, ale t-rozdělením, které respektuje větší míru nejasnosti než u normálního rozdělení No (0;1)

- (počet stupňů volnosti odhadu rozptylu je N-1)

Vzorec hustoty viz skripta, kap. 11 … hustota je trochu více „rozevřená“, nabývá významných nenulových hodnot na větším intervalu než jen intervalu (-3;3) u veličiny U

K4) volíme $\alpha = 0{,}05$, a najdeme kritickou mez neboli interval I pomocí tabulky kritických hodnot

(skripta, kapitola 11)

- $t_v\ (V = 8) = 2{,}306$

$t_m\ (V = 8) = -2{,}306$ (kritické hodnoty jsou symetrické vzhledem k nule)

$\frac{4{,}44-0}{1{,}37} = 3{,}24 \notin (-2{,}306; 2{,}306)$, tj. H0 zamítáme!!!!!

K5) rozhodnutí testu:

$\bar{X} = 4{,}44$ … průměr daných devíti odchylek

est $\sigma^2 = \overline{s^2} = 17{,}03$ … rozptyl jediné hodnoty měření

$est\,\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\overline{s^2}}{N} = \frac{17{,}03}{9} = 1{,}89$ … rozptyl průměru měření!!

$est\,\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{1{,}89} = 1{,}37$ … odhad odchylky, který potřebujeme

Konstrukce intervalu spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu průměrného navýšení srdečního tepu:

To, že tep je ovlivněn užitím kofeinu, vidíme i na začátku našeho testu

- Spíše než provést statistický test bychom potřebovali vědět, o kolik tepů zhruba se zvýší puls užitím dané dávky kofeinu

($\mu_{\bar{X}} \neq 0$ ... ale čemu se tedy zhruba $\mu_{\bar{X}}$ rovná??)

Interval spolehlivosti tedy podává důležitější informaci než statistický test:

Při konstrukci (1-α) %-ního intervalu spolehlivosti vycházíme z daného statistického testu:

- H0 nezamítáme pro $\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{est\ \sigma_{\bar{X}}} \in (-\ t_k(N-1);\ t_k(N-1))$

Meze intervalu splňují dvě rovnice, ze kterých vyjádříme $\mu_{\bar{X}}$

Dostaneme :

$$\mu_{\bar{X}} \in (\bar{X} - est\,\sigma_{\bar{X}} \cdot t_k(N-1); \bar{X} + est\,\sigma_{\bar{X}} \cdot t_k(N-1))$$

A tedy

$$\mu_{\bar{X}} \in (\bar{X} - \sqrt{\frac{s^2}{N}} \cdot t_k(N-1);\ \bar{X} + \sqrt{\frac{s^2}{N}} \cdot t_k(N-1))$$

- V našem příkladu $\mu_{\bar{X}} \in 4{,}44 \pm \sqrt{\frac{17{,}03}{9}} \cdot 2{,}306 = (1{,}27; 7{,}61)$ ... puls se s kofeinem zhruba zvýšil o 1 až 7 úderů za minutu

Mezi stat.testem a intervalem spolehlivosti pro totéž α existuje jasný vztah:

$H0: \mu_{\bar{X}} = \mu_0$ nebude zamítnuta na hladině významnosti α právě tehdy, když $\mu_0 \in$ daného $(1-\alpha)$%-ního intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu průměru $\mu_{\bar{X}}$.

V našem příkladu $\mu_0 = 0 \notin (1{,}27; 7{,}61)$ … a to odpovídá i výsledku testu, ve kterém jsme H0 zamítli

nepárový t-test (typ „dvě skupiny jednou“)

Změříme jednu skupinu za jedné situace (obyčejně speciální metoda, inovativní podmínka), druhou skupinu za jiné, většinou normální (nijak nepozměněné) situace (tzv. kontrolní skupina)

Příklad 5:

Chceme porovnat dvě techniky zapamatování 100 slov:

- Skupina 1 … učí se inovativní technikou, $N_1 = 5$ lidí
  Skupina 2 … učí se klasickou metodou, $N_2 = 7$ lidí

Získala se následující data (počet zapamatovaných slov ze 100):

Metoda inovativní	Metoda klasická
43	16
37	22
51	24
27	30
32	18
//	20
//	27

Proveďme statistický test pro tato data:

K1) H0: $\mu_1 = \mu_2$ (zapamatování nezávisí na technice)

- H1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (střední hodnoty průměrů obou technik jsou rozdílné, zapamatování závisí na metodě)

K2) kritérium ... rozdíl průměrů $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, respektive

- normovaná hodnota $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{est\,\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$

K3) $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{est\,\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$ lze za předpokladu H0 popsat t-rozdělením, kde odhad rozptylu určíme na základě obou souborů měření

(předpokládáme, že vnitřní rozptýlení hodnot je v obou skupinách stejné, tj. že dílčí odhady $est\,\sigma^2{}_1$, $est\,\sigma^2{}_2$ jsou odhady téhož rozptylu ...)

$$est\,\sigma^2 = \frac{4}{4+6} \cdot \overline{S_1{}^2} + \frac{4}{4+6} \cdot \overline{S_2{}^2} = \frac{4}{4+6} \cdot 88 + \frac{4}{4+6} \cdot 24{,}61905 = 49{,}97143$$

(vážený průměr dvou dílčích rozptylů, volnost první = 4, volnost druhá = 6) ... jedná se o rozptyl jednoho měření!!

Nyní platí pro $est\,\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

$est\,\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = D(\bar{X}_1)+D(\bar{X}_2) = \frac{est\,\sigma^2}{5} + \frac{est\,\sigma^2}{7} = \frac{49{,}97143}{5} + \frac{49{,}97143}{7} = 17{,}13306$

Tedy $est\,\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{17{,}13306} = 4{,}13921$

- $\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-0}{4{,}13921}$ lze při platnosti H0 popsat rozdělením t za 4+6=10 stupňů volnosti

K4) volíme $\alpha = 0{,}05$, a najdeme kritickou mez neboli interval I pomocí tabulky kritických hodnot

(skripta viz kap. 11)

- $t_v\ (V = 10, \alpha = 2Q) = 2{,}228$

$t_m\ (V = 10, \alpha = 2Q) = -2{,}228$

K5) rozhodnutí testu:

$\overline{X_1} = 38$, $\overline{X_2} = 22{,}42857$ ... průměry v obou skupinách

- $\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{4{,}13921} = \frac{38 - 22{,}42857 - 0}{4{,}13921} = 3{,}761 \notin (-2{,}228;\ 2{,}228)$,

Tj. H0 zamítáme, inovativní metoda je statisticky významně lepší

Lze sestavit interval spolehlivosti pro každou z obou středních hodnot:

$$\frac{\overline{X_1}-\mu_1}{est\,\sigma_{\overline{X_1}}} \in \left(-\,t_k(N_1-1+N_2-1);\ t_k(N_1-1+N_2-1)\right)$$

Meze intervalu splňují dvě rovnice, ze kterých vyjádříme μ_1

$$\mu_1 \in \left(\overline{X_1} - \sqrt{\frac{49{,}97143}{5}}\cdot t_k(10);\ \overline{X_1} + \sqrt{\frac{49{,}97143}{5}}\cdot t_k(10)\right),$$ a tedy

$$\mu_1 \in 38 \pm \sqrt{\frac{49{,}97143}{5}}\cdot 2{,}228 = (38 - 7{,}043541;\ 38 + 7{,}043541) = (30{,}96;\ 45{,}04)$$

Podobně pro μ_2 :

$$\frac{\overline{X_2}-\mu_2}{est\,\sigma_{\overline{X_2}}} \in (-\,t_k(N_1-1+N_2-1);\ t_k(N_1-1+N_2-1))$$

Meze intervalu splňují dvě rovnice, ze kterých vyjádříme μ_2

- $\mu_2 \in (\overline{X_2} - \sqrt{\frac{49{,}97143}{7}} \cdot t_k(10); \overline{X_1} + \sqrt{\frac{49{,}97143}{7}} \cdot t_k(10))$, a tedy

$$\mu_2 \in 22{,}42857 \pm \sqrt{\frac{49{,}97143}{7}} \cdot 2{,}228 = (22{,}42857 - 5{,}95288;\ 22{,}42857 + 5{,}95288) = (16{,}4757;\ 28{,}3814)$$

oba intervaly spolehlivosti pro jednotlivé průměry se vůbec nepřekrývají – to přesně odpovídá tomu, že H0 v příslušném statistickém testu bylo zamítnuto